Théorie du signal et mécanique quantique

Nicolas Lerner
Sorbonne Université

Colloquium de mathématiques,
Université de Reims Champagne-Ardenne

Mardi 31 janvier 2023, 14:30–15:30

1. Introduction

La fonction de Wigner

Soient $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On définit la fonction de Wigner de u, v, par la formule

1. Introduction

La fonction de Wigner

Soient $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On définit la fonction de Wigner de u, v, par la formule

$$\mathcal{W}(u,v)(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi z\cdot\xi} u(x+\frac{z}{2})\bar{v}(x-\frac{z}{2})dz.$$

1. Introduction

La fonction de Wigner

Soient $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On définit la fonction de Wigner de u, v, par la formule

$$\mathcal{W}(u,v)(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi z\cdot\xi} u(x+\frac{z}{2})\bar{v}(x-\frac{z}{2})dz.$$

On peut remarquer que $\mathcal{W}(u,v)$ est la transformée de Fourier partielle (par rapport à z) de

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (z,x) \mapsto u(x+\frac{z}{2})\bar{v}(x-\frac{z}{2}) = \Omega(u,v)(x,z),$$

1. Introduction

La fonction de Wigner

Soient $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On définit la fonction de Wigner de u, v, par la formule

$$\mathcal{W}(u,v)(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi z\cdot\xi} u(x+\frac{z}{2})\bar{v}(x-\frac{z}{2})dz.$$

On peut remarquer que $\mathcal{W}(u,v)$ est la transformée de Fourier partielle (par rapport à z) de

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (z,x) \mapsto u(x+\frac{z}{2})\bar{v}(x-\frac{z}{2}) = \Omega(u,v)(x,z),$$

de sorte que

$$\|\mathcal{W}(u,v)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \|\Omega(u,v)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

1. Introduction

La fonction de Wigner

Soient $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On définit la fonction de Wigner de u, v, par la formule

$$\mathcal{W}(u,v)(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi z\cdot\xi} u(x+\frac{z}{2})\bar{v}(x-\frac{z}{2})dz.$$

On peut remarquer que $\mathcal{W}(u,v)$ est la transformée de Fourier partielle (par rapport à z) de

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (z,x) \mapsto u(x+\frac{z}{2})\bar{v}(x-\frac{z}{2}) = \Omega(u,v)(x,z),$$

de sorte que

$$\|\mathcal{W}(u,v)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \|\Omega(u,v)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

De plus, $\mathcal{W}(u,v)$ appartient à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ si u, v appartiennent à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Eugene P. Wigner (1902–1995)
est un physicien américain d'origine hongroise,

Eugene P. Wigner (1902–1995)
est un physicien américain d'origine hongroise, récipiendaire du prix Nobel de physique en 1963 pour ses contributions à la théorie du noyau atomique et des particules élémentaires, particulièrement grâce à la découverte et à l'application de principes fondamentaux de symétrie.

Eugene P. Wigner (1902–1995)
est un physicien américain d'origine hongroise, récipiendaire du prix Nobel de physique en 1963 pour ses contributions à la théorie du noyau atomique et des particules élémentaires, particulièrement grâce à la découverte et à l'application de principes fondamentaux de symétrie.

E.P. Wigner est aussi l'auteur en 1960 d'un article assez polémique, *"The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences"* dans lequel il affirme notamment

Eugene P. Wigner (1902–1995)
est un physicien américain d'origine hongroise, récipiendaire du prix Nobel de physique en 1963 pour ses contributions à la théorie du noyau atomique et des particules élémentaires, particulièrement grâce à la découverte et à l'application de principes fondamentaux de symétrie.

E.P. Wigner est aussi l'auteur en 1960 d'un article assez polémique, *"The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences"* dans lequel il affirme notamment

The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning.

La fonction de Wigner de u est définie par

$$\boxed{\mathcal{W}(u,u)(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi z\cdot\xi} u(x+\frac{z}{2})\bar{u}(x-\frac{z}{2})dz} \tag{1}$$

La fonction de Wigner de u est définie par

$$\boxed{\mathcal{W}(u,u)(x,\xi)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi z\cdot\xi} u(x+\frac{z}{2})\bar{u}(x-\frac{z}{2})dz} \tag{1}$$

Elle est à valeurs réelles et telle que

$$\iint \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

La fonction de Wigner de u est définie par

$$\boxed{\mathcal{W}(u,u)(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi z\cdot\xi} u(x+\frac{z}{2})\bar{u}(x-\frac{z}{2})dz} \tag{1}$$

Elle est à valeurs réelles et telle que

$$\iint \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

mais peut prendre des valeurs strictement négatives : si l'on choisit par exemple $u_1(x) = xe^{-\pi x^2}$ sur $\mathbb{R}$, on trouve

$$\mathcal{W}(u_1,u_1)(x,\xi) = 2^{1/2}e^{-2\pi(x^2+\xi^2)}(x^2+\xi^2-\frac{1}{4\pi}).$$

La fonction de Wigner de u est définie par

$$\boxed{\mathcal{W}(u,u)(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi z\cdot\xi} u(x+\frac{z}{2})\bar{u}(x-\frac{z}{2})dz} \tag{1}$$

Elle est à valeurs réelles et telle que

$$\iint \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

mais peut prendre des valeurs strictement négatives : si l'on choisit par exemple $u_1(x) = xe^{-\pi x^2}$ sur $\mathbb{R}$, on trouve

$$\mathcal{W}(u_1,u_1)(x,\xi) = 2^{1/2}e^{-2\pi(x^2+\xi^2)}\big(x^2+\xi^2-\frac{1}{4\pi}\big).$$

En fait la fonction $\mathcal{W}(u,u)$ prend des valeurs strictement négatives sauf si u est une fonction gaussienne (un théorème dû à E. Lieb).

La fonction de Wigner de u est définie par

$$\boxed{\mathcal{W}(u,u)(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi z\cdot\xi} u(x+\frac{z}{2})\bar{u}(x-\frac{z}{2})dz} \tag{1}$$

Elle est à valeurs réelles et telle que

$$\iint \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

mais peut prendre des valeurs strictement négatives : si l'on choisit par exemple $u_1(x) = xe^{-\pi x^2}$ sur $\mathbb{R}$, on trouve

$$\mathcal{W}(u_1,u_1)(x,\xi) = 2^{1/2}e^{-2\pi(x^2+\xi^2)}(x^2+\xi^2-\frac{1}{4\pi}).$$

En fait la fonction $\mathcal{W}(u,u)$ prend des valeurs strictement négatives sauf si u est une fonction gaussienne (un théorème dû à E. Lieb). Finalement, le fait que l'image de $\mathcal{W}(u,u)$ rencontre $(-\infty,0[$ pour la plupart des "impulsions" u dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ rend assez étrange la qualification de $\mathcal{W}(u,u)$ comme une **"quasi-probabilité"**

La fonction de Wigner de u est définie par

$$\boxed{\mathcal{W}(u,u)(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi z\cdot\xi} u(x+\frac{z}{2})\bar{u}(x-\frac{z}{2})dz} \tag{1}$$

Elle est à valeurs réelles et telle que

$$\iint \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

mais peut prendre des valeurs strictement négatives : si l'on choisit par exemple $u_1(x) = xe^{-\pi x^2}$ sur $\mathbb{R}$, on trouve

$$\mathcal{W}(u_1,u_1)(x,\xi) = 2^{1/2}e^{-2\pi(x^2+\xi^2)}\big(x^2+\xi^2-\frac{1}{4\pi}\big).$$

En fait la fonction $\mathcal{W}(u,u)$ prend des valeurs strictement négatives sauf si u est une fonction gaussienne (un théorème dû à E. Lieb). Finalement, le fait que l'image de $\mathcal{W}(u,u)$ rencontre $(-\infty,0[$ pour la plupart des "impulsions" u dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ rend assez étrange la qualification de $\mathcal{W}(u,u)$ comme une **"quasi-probabilité"** (certainement, l'accent doit être mis sur *quasi*, pas sur *probabilité*).

On a aussi grâce à la formule d'inversion de Fourier

$$u(x+\frac{z}{2})\bar{u}(x-\frac{z}{2})=\Omega(x,z)=\int \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)e^{2i\pi z\cdot\xi}d\xi,$$

On a aussi grâce à la formule d'inversion de Fourier

$$u(x+\frac{z}{2})\bar{u}(x-\frac{z}{2}) = \Omega(x,z) = \int \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)e^{2i\pi z\cdot\xi}d\xi,$$

de sorte que, avec $z = 2x = y$, on obtient la Formule de reconstruction,

$$\boxed{u(y)\bar{u}(0) = \int \mathcal{W}(u,u)(\frac{y}{2},\xi)e^{2i\pi y\cdot\xi}d\xi} \tag{2}$$

On a aussi grâce à la formule d'inversion de Fourier

$$u(x+\frac{z}{2})\bar{u}(x-\frac{z}{2}) = \Omega(x,z) = \int \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)e^{2i\pi z\cdot\xi}d\xi,$$

de sorte que, avec $z = 2x = y$, on obtient la Formule de reconstruction,

$$\boxed{u(y)\bar{u}(0) = \int \mathcal{W}(u,u)(\frac{y}{2},\xi)e^{2i\pi y\cdot\xi}d\xi} \qquad (2)$$

Votre radar vous donne en principe **la fonction de Wigner** $\mathcal{W}(u,u)$ et en utilisant (2), vous pouvez **reconstruire l'impulsion** u (supposée appartenir à $L^2(\mathbb{R}^n)$).

On a aussi grâce à la formule d'inversion de Fourier

$$u(x+\frac{z}{2})\bar{u}(x-\frac{z}{2})=\Omega(x,z)=\int \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)e^{2i\pi z\cdot\xi}d\xi,$$

de sorte que, avec $z=2x=y$, on obtient la Formule de reconstruction,

$$\boxed{u(y)\bar{u}(0)=\int \mathcal{W}(u,u)(\frac{y}{2},\xi)e^{2i\pi y\cdot\xi}d\xi} \qquad (2)$$

Votre radar vous donne en principe **la fonction de Wigner** $\mathcal{W}(u,u)$ et en utilisant (2), vous pouvez **reconstruire l'impulsion** u (supposée appartenir à $L^2(\mathbb{R}^n)$). Une difficulté parmi d'autres : l'intégrale ci-dessus converge en général assez lentement et en particulier, vous ne pouvez pas supposer que $W(u,u)(\frac{y}{2},\cdot)$ appartienne à $L^1(\mathbb{R}^n)$.

On a aussi grâce à la formule d'inversion de Fourier

$$u(x+\frac{z}{2})\bar{u}(x-\frac{z}{2}) = \Omega(x,z) = \int \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)e^{2i\pi z\cdot\xi}d\xi,$$

de sorte que, avec $z = 2x = y$, on obtient la Formule de reconstruction,

$$\boxed{u(y)\bar{u}(0) = \int \mathcal{W}(u,u)(\frac{y}{2},\xi)e^{2i\pi y\cdot\xi}d\xi} \tag{2}$$

Votre radar vous donne en principe **la fonction de Wigner** $\mathcal{W}(u,u)$ et en utilisant (2), vous pouvez **reconstruire l'impulsion** u (supposée appartenir à $L^2(\mathbb{R}^n)$). Une difficulté parmi d'autres : l'intégrale ci-dessus converge en général assez lentement et en particulier, vous ne pouvez pas supposer que $W(u,u)(\frac{y}{2},\cdot)$ appartienne à $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Il y a bien d'autres propriétés de la fonction de Wigner et il se trouve que la plupart d'entre elles ont une interprétation via la quantification de Weyl :

On a aussi grâce à la formule d'inversion de Fourier

$$u(x+\frac{z}{2})\bar{u}(x-\frac{z}{2}) = \Omega(x,z) = \int \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)e^{2i\pi z\cdot\xi}d\xi,$$

de sorte que, avec $z = 2x = y$, on obtient la Formule de reconstruction,

$$\boxed{u(y)\bar{u}(0) = \int \mathcal{W}(u,u)(\frac{y}{2},\xi)e^{2i\pi y\cdot\xi}d\xi} \tag{2}$$

Votre radar vous donne en principe **la fonction de Wigner** $\mathcal{W}(u,u)$ et en utilisant (2), vous pouvez **reconstruire l'impulsion** u (supposée appartenir à $L^2(\mathbb{R}^n)$). Une difficulté parmi d'autres : l'intégrale ci-dessus converge en général assez lentement et en particulier, vous ne pouvez pas supposer que $W(u,u)(\frac{y}{2},\cdot)$ appartienne à $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Il y a bien d'autres propriétés de la fonction de Wigner et il se trouve que la plupart d'entre elles ont une interprétation via la quantification de Weyl : il s'agit bien entendu du mathématicien Hermann Weyl, *qu'il ne faut évidemment pas confondre avec* André Weil,

On a aussi grâce à la formule d'inversion de Fourier

$$u(x+\frac{z}{2})\bar{u}(x-\frac{z}{2}) = \Omega(x,z) = \int \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)e^{2i\pi z\cdot\xi}d\xi,$$

de sorte que, avec $z = 2x = y$, on obtient la Formule de reconstruction,

$$\boxed{u(y)\bar{u}(0) = \int \mathcal{W}(u,u)(\frac{y}{2},\xi)e^{2i\pi y\cdot\xi}d\xi} \tag{2}$$

Votre radar vous donne en principe **la fonction de Wigner** $\mathcal{W}(u,u)$ et en utilisant (2), vous pouvez **reconstruire l'impulsion** u (supposée appartenir à $L^2(\mathbb{R}^n)$). Une difficulté parmi d'autres : l'intégrale ci-dessus converge en général assez lentement et en particulier, vous ne pouvez pas supposer que $W(u,u)(\frac{y}{2},\cdot)$ appartienne à $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Il y a bien d'autres propriétés de la fonction de Wigner et il se trouve que la plupart d'entre elles ont une interprétation via la quantification de Weyl : il s'agit bien entendu du mathématicien Hermann Weyl, *qu'il ne faut évidemment pas confondre avec* André Weil, *pas plus que l'on ne peut confondre la sœur d'André, la philosophe* Simone Weil, *avec la ministre* Simone Veil.

Hermann Weyl (1885–1955)
est un mathématicien allemand (et américain à partir de 1930),

Hermann Weyl (1885–1955)
est un mathématicien allemand (et américain à partir de 1930), mathématicien universel aux contributions multiples en logique, théorie des nombres, théorie des groupes, géométrie, physique mathématique.

Hermann Weyl (1885–1955)

est un mathématicien allemand (et américain à partir de 1930), mathématicien universel aux contributions multiples en logique, théorie des nombres, théorie des groupes, géométrie, physique mathématique.

Co-auteur avec H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, de l'ouvrage The principle of relativity [1922-1923], auteur des ouvrages de référence, Die Idee der Riemannschen Fläche [1913], Space-Time-Matter [1918], Gruppentheorie und Quantenmechanik [1928], Algebraic Theory of Numbers (Annals of Mathematics Studies)[1940], Symmetry (Princeton University Press) [1952].

Hermann Weyl (1885–1955)
est un mathématicien allemand (et américain à partir de 1930), mathématicien universel aux contributions multiples en logique, théorie des nombres, théorie des groupes, géométrie, physique mathématique.

Co-auteur avec H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, de l'ouvrage The principle of relativity [1922-1923], auteur des ouvrages de référence, Die Idee der Riemannschen Fläche [1913], Space-Time-Matter [1918], Gruppentheorie und Quantenmechanik [1928], Algebraic Theory of Numbers (Annals of Mathematics Studies)[1940], Symmetry (Princeton University Press) [1952].

Notez que E.P. Wigner a publié en 1931 l'ouvrage Group Theory and its Application to Quantum Mechanics of Atomic Spectra, un livre très proche du Gruppentheorie ... de H. Weyl.

Hermann Weyl (1885–1955)
est un mathématicien allemand (et américain à partir de 1930), mathématicien universel aux contributions multiples en logique, théorie des nombres, théorie des groupes, géométrie, physique mathématique.

Co-auteur avec H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, de l'ouvrage The principle of relativity [1922-1923], auteur des ouvrages de référence, Die Idee der Riemannschen Fläche [1913], Space-Time-Matter [1918], Gruppentheorie und Quantenmechanik [1928], Algebraic Theory of Numbers (Annals of Mathematics Studies)[1940], Symmetry (Princeton University Press) [1952].

Notez que E.P. Wigner a publié en 1931 l'ouvrage Group Theory and its Application to Quantum Mechanics of Atomic Spectra, un livre très proche du Gruppentheorie . . . de H. Weyl.

Ecoutons D. Coxeter : Turning from physics to mathematics, he gives an extraordinarily concise epitome of Galois theory, leading up to the statement of his guiding principle : "Whenever you have to do with a structure-endowed entity, try to determine its group of automorphisms".

Quantification de Weyl

Soit $a(x, \xi)$ une fonction (un hamiltonien) définie sur l'espace des phases $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On veut associer un opérateur à cette fonction, i.e. quantifier ce hamiltonien.

Quantification de Weyl

Soit $a(x, \xi)$ une fonction (un hamiltonien) définie sur l'espace des phases $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On veut associer un opérateur à cette fonction, i.e. quantifier ce hamiltonien. Par exemple en dimension un, nous avons les formules habituelles de quantification,

$$\begin{aligned} &\xi \rightsquigarrow D_x = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}, \\ &x \rightsquigarrow \text{multiplication by } x \\ &x\xi \rightsquigarrow xD_x. \end{aligned}$$

Quantification de Weyl

Soit $a(x, \xi)$ une fonction (un hamiltonien) définie sur l'espace des phases $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On veut associer un opérateur à cette fonction, i.e. quantifier ce hamiltonien. Par exemple en dimension un, nous avons les formules habituelles de quantification,

$$\xi \rightsquigarrow D_x = \frac{1}{i}\frac{d}{dx},$$
$$x \rightsquigarrow \text{multiplication by } x$$
$$x\xi \rightsquigarrow xD_x.$$

La dernière formule n'est pas satisfaisante, car nous voudrions quantifier des fonctions à valeurs réelles en opérateurs formellement autoadjoints, et l'on préfère

$$x\xi \rightsquigarrow \frac{1}{2}(xD_x + D_x x) \qquad \ldots \qquad \textit{(auto-adjoint)}.$$

Quantification de Weyl

Soit $a(x, \xi)$ une fonction (un hamiltonien) définie sur l'espace des phases $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On veut associer un opérateur à cette fonction, i.e. quantifier ce hamiltonien. Par exemple en dimension un, nous avons les formules habituelles de quantification,

$$\begin{aligned} &\xi \rightsquigarrow D_x = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}, \\ &x \rightsquigarrow \text{multiplication by } x \\ &x\xi \rightsquigarrow xD_x. \end{aligned}$$

La dernière formule n'est pas satisfaisante, car nous voudrions quantifier des fonctions à valeurs réelles en opérateurs formellement autoadjoints, et l'on préfère

$$x\xi \rightsquigarrow \frac{1}{2}(xD_x + D_x x) \qquad \dots \qquad \textit{(auto-adjoint).}$$

On veut utiliser la formule

$$(a^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}}u)(x) = \iint e^{2i\pi(x-y)\cdot\xi} a\Big(\frac{x+y}{2}, \xi\Big)u(y)dyd\xi,$$

Quantification de Weyl

Soit $a(x,\xi)$ une fonction (un hamiltonien) définie sur l'espace des phases $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On veut associer un opérateur à cette fonction, i.e. quantifier ce hamiltonien. Par exemple en dimension un, nous avons les formules habituelles de quantification,

$$\begin{aligned}
&\xi \rightsquigarrow D_x = \frac{1}{i}\frac{d}{dx},\\
&x \rightsquigarrow \text{multiplication by } x\\
&x\xi \rightsquigarrow xD_x.
\end{aligned}$$

La dernière formule n'est pas satisfaisante, car nous voudrions quantifier des fonctions à valeurs réelles en opérateurs formellement autoadjoints, et l'on préfère

$$x\xi \rightsquigarrow \frac{1}{2}(xD_x + D_x x) \qquad \dots \qquad \textit{(auto-adjoint)}.$$

On veut utiliser la formule

$$(a^{\mathrm{WEYL}}u)(x) = \iint e^{2i\pi(x-y)\cdot\xi} a(\frac{x+y}{2},\xi)u(y)dyd\xi,$$

en lieu et place de

$$(\mathrm{Op}(a)u)(x) = \iint e^{2i\pi(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi)u(y)dyd\xi = \int e^{2i\pi x\cdot\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi.$$

Soit a une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; on veut donner un sens à l'intégrale

$$(a^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} u)(x) = \iint e^{2i\pi(x-y)\cdot\xi} a(\frac{x+y}{2}, \xi) u(y) dy d\xi,$$

Soit a une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; on veut donner un sens à l'intégrale

$$(a^{\mathrm{W\scriptsize EYL}} u)(x) = \iint e^{2i\pi(x-y)\cdot\xi} a(\frac{x+y}{2}, \xi) u(y) dy d\xi,$$

où $a^{\mathrm{W\scriptsize EYL}}$ désigne la quantification de Weyl de la "fonction" $a(x, \xi)$. Supposons que $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, et, pour un bref instant seulement, que $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$. On trouve que

Soit a une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; on veut donner un sens à l'intégrale

$$(a^{\mathrm{WEYL}} u)(x) = \iint e^{2i\pi(x-y)\cdot\xi} a(\frac{x+y}{2}, \xi) u(y) dy d\xi,$$

où a^{WEYL} désigne la quantification de Weyl de la "fonction" $a(x,\xi)$. Supposons que $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, et, pour un bref instant seulement, que $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$. On trouve que

$$\begin{aligned}
\langle a^{\mathrm{WEYL}} u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \iiint e^{2i\pi \overbrace{(x-y)}^{-z}\cdot\xi} a(\overbrace{\frac{x+y}{2}}^{x'}, \xi) u(y) \bar{v}(x) dy d\xi dx \\
&= \iint a(x', \xi) \Big[\int e^{-2i\pi z\xi} u(x' + \frac{z}{2}) \bar{v}(x' - \frac{z}{2}) dz\Big] dx' d\xi \\
&= \langle a, \underbrace{\boxed{\mathcal{W}(u,v)}}_{\text{c'est la fonction de Wigner}} \rangle_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n}), \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})},
\end{aligned}$$

Soit a une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; on veut donner un sens à l'intégrale

$$(a^{\mathrm{WEYL}} u)(x) = \iint e^{2i\pi(x-y)\cdot\xi} a(\frac{x+y}{2}, \xi) u(y) dy d\xi,$$

où a^{WEYL} désigne la quantification de Weyl de la "fonction" $a(x,\xi)$. Supposons que $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, et, pour un bref instant seulement, que $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$. On trouve que

$$\begin{aligned}
\langle a^{\mathrm{WEYL}} u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \iiint e^{2i\pi \overbrace{(x-y)}^{-z}\cdot\xi} a(\overbrace{\frac{x+y}{2}}^{x'}, \xi) u(y) \bar{v}(x) dy d\xi dx \\
&= \iint a(x', \xi) \Big[\int e^{-2i\pi z\xi} u(x' + \frac{z}{2}) \bar{v}(x' - \frac{z}{2}) dz\Big] dx' d\xi \\
&= \langle a, \underbrace{\boxed{\mathcal{W}(u,v)}}_{\text{c'est la fonction de Wigner}} \rangle_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n}), \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})},
\end{aligned}$$

ce qui donne un sens à l'opérateur a^{WEYL} pour $a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n})$, comme opérateur de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, avec

Soit a une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; on veut donner un sens à l'intégrale

$$(a^{\mathrm{WEYL}} u)(x) = \iint e^{2i\pi(x-y)\cdot\xi} a(\frac{x+y}{2}, \xi) u(y) dy d\xi,$$

où a^{WEYL} désigne la quantification de Weyl de la "fonction" $a(x, \xi)$. Supposons que $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, et, pour un bref instant seulement, que $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$. On trouve que

$$\begin{aligned}
\langle a^{\mathrm{WEYL}} u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \iiint e^{2i\pi \overbrace{(x-y)}^{-z}\cdot\xi} a(\overbrace{\frac{x+y}{2}}^{x'}, \xi) u(y) \bar{v}(x) dy d\xi dx \\
&= \iint a(x', \xi) \Big[\int e^{-2i\pi z\xi} u(x' + \frac{z}{2}) \bar{v}(x' - \frac{z}{2}) dz\Big] dx' d\xi \\
&= \langle a, \boxed{\mathcal{W}(u, v)} \rangle_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n}), \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})},
\end{aligned}$$

c'est la fonction de Wigner

ce qui donne un sens à l'opérateur a^{WEYL} pour $a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n})$, comme opérateur de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, avec

$$\langle a^{\mathrm{WEYL}} u, \bar{v}\rangle_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)} = \langle a, \mathcal{W}(u, v)\rangle_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n}), \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})}.$$

Voici une condition suffisante pour que l'opérateur $a^{\mathrm{W{\small EYL}}}$ soit borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$: on a

$$\|a^{\mathrm{W{\small EYL}}}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \min\left(2^n \|a\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}, \|\hat{a}\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}\right). \tag{3}$$

Voici une condition suffisante pour que l'opérateur $a^{\mathrm{W\scriptsize{EYL}}}$ soit borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$: on a

$$\|a^{\mathrm{W\scriptsize{EYL}}}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))} \le \min\left(2^n \|a\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}, \|\hat{a}\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}\right). \tag{3}$$

En fait pour $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, on trouve

$$\langle a^{\mathrm{W\scriptsize{EYL}}} u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \iiint a(x,\xi) u(2x-y)\bar{v}(y) e^{-4i\pi(x-y)\cdot\xi} 2^n dy dx d\xi,$$

Voici une condition suffisante pour que l'opérateur a^{WEYL} soit borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$: on a

$$\|a^{\mathrm{WEYL}}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))} \le \min\left(2^n\|a\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}, \|\hat{a}\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}\right). \tag{3}$$

En fait pour $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, on trouve

$$\langle a^{\mathrm{WEYL}} u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \iiint a(x,\xi)u(2x-y)\bar{v}(y)e^{-4i\pi(x-y)\cdot\xi}2^n dydxd\xi,$$

de sorte qu'en définissant pour $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ l'opérateur de symétrie de phase $\sigma_{x,\xi}$ par

$$(\sigma_{x,\xi}u)(y) = u(2x-y)e^{-4i\pi(x-y)\cdot\xi},$$

il vient

Voici une condition suffisante pour que l'opérateur $a^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}}$ soit borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$: on a

$$\|a^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))} \le \min\left(2^n\|a\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}, \|\hat{a}\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}\right). \tag{3}$$

En fait pour $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, on trouve

$$\langle a^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \iiint a(x,\xi)u(2x-y)\bar{v}(y)e^{-4i\pi(x-y)\cdot\xi}2^n dydxd\xi,$$

de sorte qu'en définissant pour $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ l'opérateur de symétrie de phase $\sigma_{x,\xi}$ par

$$(\sigma_{x,\xi}u)(y) = u(2x-y)e^{-4i\pi(x-y)\cdot\xi},$$

il vient que $\sigma_{x,\xi}$ est unitaire et auto-adjoint ainsi que

$$a^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} = 2^n \iint a(x,\xi)\sigma_{x,\xi}dxd\xi = \iint \widehat{a}(\eta,y)e^{2i\pi(\eta\cdot x+y\cdot D_x)}dyd\eta, \tag{4}$$

Voici une condition suffisante pour que l'opérateur a^{Weyl} soit borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$: on a

$$\|a^{\mathrm{Weyl}}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))} \le \min\bigl(2^n\|a\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}, \|\hat{a}\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}\bigr). \tag{3}$$

En fait pour $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, on trouve

$$\langle a^{\mathrm{Weyl}} u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \iiint a(x,\xi)u(2x-y)\bar{v}(y)e^{-4i\pi(x-y)\cdot\xi}2^n dydxd\xi,$$

de sorte qu'en définissant pour $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$ l'opérateur de symétrie de phase $\sigma_{x,\xi}$ par

$$(\sigma_{x,\xi}u)(y) = u(2x-y)e^{-4i\pi(x-y)\cdot\xi},$$

il vient que $\sigma_{x,\xi}$ est unitaire et auto-adjoint ainsi que

$$a^{\mathrm{Weyl}} = 2^n\iint a(x,\xi)\sigma_{x,\xi}dxd\xi = \iint \widehat{a}(\eta,y)e^{2i\pi(\eta\cdot x+y\cdot D_x)}dyd\eta, \tag{4}$$

ce qui démontre (3).

Voici une condition suffisante pour que l'opérateur a^{Weyl} soit borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$: on a

$$\|a^{\mathrm{Weyl}}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))} \le \min\left(2^n\|a\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}, \|\hat{a}\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}\right). \tag{3}$$

En fait pour $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, on trouve

$$\langle a^{\mathrm{Weyl}}u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \iiint a(x,\xi)u(2x-y)\bar{v}(y)e^{-4i\pi(x-y)\cdot\xi}2^n dydxd\xi,$$

de sorte qu'en définissant pour $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ l'opérateur de symétrie de phase $\sigma_{x,\xi}$ par

$$(\sigma_{x,\xi}u)(y) = u(2x-y)e^{-4i\pi(x-y)\cdot\xi},$$

il vient que $\sigma_{x,\xi}$ est unitaire et auto-adjoint ainsi que

$$a^{\mathrm{Weyl}} = 2^n \iint a(x,\xi)\sigma_{x,\xi}dxd\xi = \iint \widehat{a}(\eta,y)e^{2i\pi(\eta\cdot x+y\cdot D_x)}dyd\eta, \tag{4}$$

ce qui démontre (3). Les formules (4) démontrent également que

$$\left(a^{\mathrm{Weyl}}\right)^* = (\bar{a})^{\mathrm{Weyl}},$$ et donc si a est à valeurs réelles, on obtient $(a^{\mathrm{Weyl}})^* = a^{\mathrm{Weyl}}$.

Une autre propriété importante de la quantification de Weyl est la **covariance symplectique.**

Une autre propriété importante de la quantification de Weyl est la **covariance symplectique.** Le groupe symplectique $Sp(n, \mathbb{R})$ est le sous-groupe des $S \in Sl(2n, \mathbb{R})$ tels que

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad [SX, SY] = [X, Y], \qquad \text{i.e.} \quad S^*\sigma S = \sigma,$$

Une autre propriété importante de la quantification de Weyl est la **covariance symplectique.** Le groupe symplectique $Sp(n, \mathbb{R})$ est le sous-groupe des $S \in Sl(2n, \mathbb{R})$ tels que

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad [SX, SY] = [X, Y], \qquad \text{i.e.} \quad S^* \sigma S = \sigma,$$

avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Une autre propriété importante de la quantification de Weyl est la **covariance symplectique.** Le groupe symplectique $Sp(n, \mathbb{R})$ est le sous-groupe des $S \in Sl(2n, \mathbb{R})$ tels que

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad [SX, SY] = [X, Y], \qquad \text{i.e.} \quad S^* \sigma S = \sigma,$$

avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $S \in Sp(n, \mathbb{R})$, l'opérateur

$$(a \circ S)^{\mathrm{Weyl}} = \mathcal{M}^* a^{\mathrm{Weyl}} \mathcal{M},$$

Une autre propriété importante de la quantification de Weyl est la **covariance symplectique.** Le groupe symplectique $Sp(n, \mathbb{R})$ est le sous-groupe des $S \in Sl(2n, \mathbb{R})$ tels que

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad [SX, SY] = [X, Y], \qquad \text{i.e.} \quad S^* \sigma S = \sigma,$$

avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $S \in Sp(n, \mathbb{R})$, l'opérateur

$$(a \circ S)^{\mathrm{Weyl}} = \mathcal{M}^* a^{\mathrm{Weyl}} \mathcal{M},$$

où $\mathcal{M}$ appartient au groupe métaplectique, qui est un groupe de transformations unitaires de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Une autre propriété importante de la quantification de Weyl est la **covariance symplectique.** Le groupe symplectique $Sp(n, \mathbb{R})$ est le sous-groupe des $S \in Sl(2n, \mathbb{R})$ tels que

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad [SX, SY] = [X, Y], \qquad \text{i.e.} \quad S^* \sigma S = \sigma,$$

avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $S \in Sp(n, \mathbb{R})$, l'opérateur

$$(a \circ S)^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} = \mathcal{M}^* a^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} \mathcal{M},$$

où $\mathcal{M}$ appartient au groupe métaplectique, qui est un groupe de transformations unitaires de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Cela se traduit pour la fonction de Wigner par l'identité

$$\mathcal{W}(\mathcal{M}u, \mathcal{M}v) = \mathcal{W}(u, v) \circ S^{-1}. \tag{5}$$

Une autre propriété importante de la quantification de Weyl est la **covariance symplectique.** Le groupe symplectique $Sp(n, \mathbb{R})$ est le sous-groupe des $S \in Sl(2n, \mathbb{R})$ tels que

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad [SX, SY] = [X, Y], \qquad \text{i.e.} \quad S^* \sigma S = \sigma,$$

avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $S \in Sp(n, \mathbb{R})$, l'opérateur

$$(a \circ S)^{\mathrm{Weyl}} = \mathcal{M}^* a^{\mathrm{Weyl}} \mathcal{M},$$

où $\mathcal{M}$ appartient au groupe métaplectique, qui est un groupe de transformations unitaires de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Cela se traduit pour la fonction de Wigner par l'identité

$$\mathcal{W}(\mathcal{M}u, \mathcal{M}v) = \mathcal{W}(u, v) \circ S^{-1}. \tag{5}$$

Par exemple, pour $T \in Gl(n, \mathbb{R})$, on a pour A, C, matrices $n \times n$ réelles,

$$\big(a(T^{-1}x, {}^tT\xi)\big)^{\mathrm{Weyl}} = \mathcal{M}_T^* a^{\mathrm{Weyl}} \mathcal{M}_T, \quad \text{avec} \quad (\mathcal{M}_T u)(x) = (\det T)^{1/2} u(Tx),$$

Une autre propriété importante de la quantification de Weyl est la **covariance symplectique.** Le groupe symplectique $Sp(n,\mathbb{R})$ est le sous-groupe des $S \in Sl(2n,\mathbb{R})$ tels que

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad [SX, SY] = [X, Y], \qquad \text{i.e.} \quad S^*\sigma S = \sigma,$$

avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $S \in Sp(n,\mathbb{R})$, l'opérateur

$$(a \circ S)^{\mathrm{W\scriptstyle EYL}} = \mathcal{M}^* a^{\mathrm{W\scriptstyle EYL}} \mathcal{M},$$

où $\mathcal{M}$ appartient au groupe métaplectique, qui est un groupe de transformations unitaires de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Cela se traduit pour la fonction de Wigner par l'identité

$$\mathcal{W}(\mathcal{M}u, \mathcal{M}v) = \mathcal{W}(u,v) \circ S^{-1}. \tag{5}$$

Par exemple, pour $T \in Gl(n,\mathbb{R})$, on a pour A, C, matrices $n \times n$ réelles,

$$\big(a(T^{-1}x, {}^tT\xi)\big)^{\mathrm{W\scriptstyle EYL}} = \mathcal{M}_T^* a^{\mathrm{W\scriptstyle EYL}} \mathcal{M}_T, \quad \text{avec} \quad (\mathcal{M}_T u)(x) = (\det T)^{1/2} u(Tx),$$

$$\big(a(\xi, -x)\big)^{\mathrm{W\scriptstyle EYL}} = \mathcal{F}^* a^{\mathrm{W\scriptstyle EYL}} \mathcal{F}, \qquad \text{où} \quad \mathcal{F} \text{ est la transformation de Fourier,}$$

Une autre propriété importante de la quantification de Weyl est la **covariance symplectique.** Le groupe symplectique $Sp(n, \mathbb{R})$ est le sous-groupe des $S \in Sl(2n, \mathbb{R})$ tels que

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad [SX, SY] = [X, Y], \qquad \text{i.e.} \quad S^* \sigma S = \sigma,$$

avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $S \in Sp(n, \mathbb{R})$, l'opérateur

$$(a \circ S)^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} = \mathcal{M}^* a^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} \mathcal{M},$$

où $\mathcal{M}$ appartient au groupe métaplectique, qui est un groupe de transformations unitaires de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Cela se traduit pour la fonction de Wigner par l'identité

$$\mathcal{W}\left(\mathcal{M}u, \mathcal{M}v\right) = \mathcal{W}(u, v) \circ S^{-1}. \tag{5}$$

Par exemple, pour $T \in Gl(n, \mathbb{R})$, on a pour A, C, matrices $n \times n$ réelles,

$$\begin{aligned}
\big(a(T^{-1}x, {}^tT\xi)\big)^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} &= \mathcal{M}_T^* a^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} \mathcal{M}_T, \quad \text{avec} \quad (\mathcal{M}_T u)(x) = (\det T)^{1/2} u(Tx), \\
\big(a(\xi, -x)\big)^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} &= \mathcal{F}^* a^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} \mathcal{F}, \qquad \text{où} \quad \mathcal{F} \text{ est la transformation de Fourier}, \\
\big(a(x, \xi + Ax)\big)^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} &= \mathcal{L}_A^*\, a^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} \mathcal{L}_A, \quad \text{où} \quad (\mathcal{L}_A v)(x) = e^{i\pi\langle Ax, x\rangle} v(x), \quad {}^tA = A,
\end{aligned}$$

Une autre propriété importante de la quantification de Weyl est la **covariance symplectique.** Le groupe symplectique $Sp(n,\mathbb{R})$ est le sous-groupe des $S \in Sl(2n,\mathbb{R})$ tels que

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad [SX, SY] = [X, Y], \qquad \text{i.e.} \quad S^*\sigma S = \sigma,$$

avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $S \in Sp(n,\mathbb{R})$, l'opérateur

$$(a \circ S)^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} = \mathcal{M}^* a^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} \mathcal{M},$$

où $\mathcal{M}$ appartient au groupe métaplectique, qui est un groupe de transformations unitaires de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Cela se traduit pour la fonction de Wigner par l'identité

$$\mathcal{W}(\mathcal{M}u, \mathcal{M}v) = \mathcal{W}(u,v) \circ S^{-1}. \tag{5}$$

Par exemple, pour $T \in Gl(n,\mathbb{R})$, on a pour A, C, matrices $n \times n$ réelles,

$$\begin{aligned}
\big(a(T^{-1}x, {}^tT\xi)\big)^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} &= \mathcal{M}_T^* a^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} \mathcal{M}_T, \quad \text{avec} \quad (\mathcal{M}_T u)(x) = (\det T)^{1/2} u(Tx), \\
\big(a(\xi, -x)\big)^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} &= \mathcal{F}^* a^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} \mathcal{F}, \qquad \text{où} \quad \mathcal{F} \text{ est la transformation de Fourier}, \\
\big(a(x, \xi + Ax)\big)^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} &= \mathcal{L}_A^*\, a^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} \mathcal{L}_A, \quad \text{où} \quad (\mathcal{L}_A v)(x) = e^{i\pi\langle Ax, x\rangle} v(x), \quad {}^tA = A, \\
\big(a(x - C\xi, \xi)\big)^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} &= \mathcal{R}_C^*\, a^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}} \mathcal{R}_C, \quad \text{où} \quad (\mathcal{R}_C v)(x) = \big(e^{i\pi\langle CD, D\rangle} v\big)(x), \quad {}^tC = C.
\end{aligned}$$

Intégrales de la fonction de Wigner

• Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^{2n}$ de mesure de Lebesgue finie et soit $\mathbf{1}_E$ la fonction indicatrice de l'ensemble E. Alors l'opérateur de symbole de Weyl $\mathbf{1}_E$ est borné (cf. (3)) auto-adjoint (cf. (4)) sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \mathbf{1}_E^{\mathrm{W\scriptsize{EYL}}} u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \iint_E \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)\, dx d\xi. \tag{6}$$

Intégrales de la fonction de Wigner

• Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^{2n}$ de mesure de Lebesgue finie et soit $\mathbf{1}_E$ la fonction indicatrice de l'ensemble E. Alors l'opérateur de symbole de Weyl $\mathbf{1}_E$ est borné (cf. (3)) auto-adjoint (cf. (4)) sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \mathbf{1}_E^{\mathrm{W\scriptsize EYL}} u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \iint_E \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)\, dx d\xi. \tag{6}$$

• Cette formule démontre l'équivalence suivante :

Intégrales de la fonction de Wigner

• Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^{2n}$ de mesure de Lebesgue finie et soit $\mathbf{1}_E$ la fonction indicatrice de l'ensemble E. Alors l'opérateur de symbole de Weyl $\mathbf{1}_E$ est borné (cf. (3)) auto-adjoint (cf. (4)) sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \mathbf{1}_E^{\mathrm{Weyl}} u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \iint_E \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)\,dx d\xi. \tag{6}$$

• Cette formule démontre l'équivalence suivante :

$$\left\{ \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n), \iint_E \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)\,dx d\xi \le \lambda \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right\} \Longleftrightarrow \mathbf{1}_E^{\mathrm{Weyl}} \le \lambda.$$

Intégrales de la fonction de Wigner

• Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^{2n}$ de mesure de Lebesgue finie et soit $\mathbf{1}_E$ la fonction indicatrice de l'ensemble E. Alors l'opérateur de symbole de Weyl $\mathbf{1}_E$ est borné (cf. (3)) auto-adjoint (cf. (4)) sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \mathbf{1}_E^{\mathrm{Weyl}} u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \iint_E \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)\, dx d\xi. \tag{6}$$

• Cette formule démontre l'équivalence suivante :

$$\left\{ \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n), \iint_E \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)\, dx d\xi \le \lambda \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right\} \Longleftrightarrow \mathbf{1}_E^{\mathrm{Weyl}} \le \lambda.$$

• **Notre question principale :** est-il possible de déterminer

$$\boxed{\lambda_+(E) = \sup\{\texttt{spectrum } \mathbf{1}_E^{\mathrm{Weyl}}\}}$$

pour un ensemble E donné ou bien pour une classe d'ensembles vérifiant certaines propriétés géométriques ?

Intégrales de la fonction de Wigner

• Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^{2n}$ de mesure de Lebesgue finie et soit $\mathbf{1}_E$ la fonction indicatrice de l'ensemble E. Alors l'opérateur de symbole de Weyl $\mathbf{1}_E$ est borné (cf. (3)) auto-adjoint (cf. (4)) sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \mathbf{1}_E^{\text{Weyl}} u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \iint_E \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi. \tag{6}$$

• Cette formule démontre l'équivalence suivante :

$$\left\{ \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n), \iint_E \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi \le \lambda \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right\} \Longleftrightarrow \mathbf{1}_E^{\text{Weyl}} \le \lambda.$$

• **Notre question principale :** est-il possible de déterminer

$$\boxed{\lambda_+(E) = \sup\{\texttt{spectrum } \mathbf{1}_E^{\text{Weyl}}\}}$$

pour un ensemble E donné ou bien pour une classe d'ensembles vérifiant certaines propriétés géométriques ? On peut bien entendu formuler la même question pour

$$\boxed{\lambda_-(E) = \inf\{\texttt{spectrum } \mathbf{1}_E^{\text{Weyl}}\}}$$

2. Résultats positifs, exemples et contre-exemples

Résultats positifs

Un exemple trivial.

2. Résultats positifs, exemples et contre-exemples

Résultats positifs

Un exemple trivial. Si E est le demi-espace $E = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, L(x, \xi) \geq 0\}$,

2. Résultats positifs, exemples et contre-exemples

Résultats positifs

Un exemple trivial. Si E est le demi-espace $E = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, L(x, \xi) \geq 0\}$, où L est une forme linéaire, on peut trouver (si $L \neq 0$) un opérateur unitaire $\mathcal{M}$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que, avec $H = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$,

2. Résultats positifs, exemples et contre-exemples

Résultats positifs

Un exemple trivial. Si E est le demi-espace $E = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, L(x,\xi) \geq 0\}$, où L est une forme linéaire, on peut trouver (si $L \neq 0$) un opérateur unitaire $\mathcal{M}$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que, avec $H = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$,

$$\mathbf{1}_E^{\mathrm{Weyl}} = \big(H(L)\big)^{\mathrm{Weyl}} = \mathcal{M}^* H_1 \mathcal{M},$$

2. Résultats positifs, exemples et contre-exemples

Résultats positifs

Un exemple trivial. Si E est le demi-espace $E = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, L(x,\xi) \geq 0\}$, où L est une forme linéaire, on peut trouver (si $L \neq 0$) un opérateur unitaire $\mathcal{M}$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que, avec $H = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$,

$$\mathbf{1}_E^{\textrm{Weyl}} = \big(H(L)\big)^{\textrm{Weyl}} = \mathcal{M}^* H_1 \mathcal{M},$$

où H_1 est l'opérateur de multiplication par $H(y_1)$, qui est une projection orthogonale (donc est de norme 1) : c'est une conséquence de la propriété de covariance symplectique donnée plus haut (cf. (5)).

2. Résultats positifs, exemples et contre-exemples

Résultats positifs

Un exemple trivial. Si E est le demi-espace $E = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, L(x,\xi) \geq 0\}$, où L est une forme linéaire, on peut trouver (si $L \neq 0$) un opérateur unitaire $\mathcal{M}$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que, avec $H = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$,

$$\mathbf{1}_E^{\text{Weyl}} = \big(H(L)\big)^{\text{Weyl}} = \mathcal{M}^* H_1 \mathcal{M},$$

où H_1 est l'opérateur de multiplication par $H(y_1)$, qui est une projection orthogonale (donc est de norme 1) : c'est une conséquence de la propriété de covariance symplectique donnée plus haut (cf. (5)). Nous avons

$$\mathbf{1}_E{}^{\text{Weyl}} \leq 1 \quad \text{et en fait} \quad \lambda_+(E) = \sup\{\texttt{spectrum } \mathbf{1}_E^{\text{Weyl}}\} = 1.$$

Deux exemples non triviaux.

Deux exemples non triviaux. L'inégalité $\lambda_+(E) \le 1$ est valide pour des disques E de $\mathbb{R}^2$ et provient d'une étude précise de P. Flandrin :

Deux exemples non triviaux. L'inégalité $\lambda_+(E) \le 1$ est valide pour des disques E de $\mathbb{R}^2$ et provient d'une étude précise de P. Flandrin : pour $a \in \mathbb{R}_+$, on définit

$$D_a = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, |x|^2 + |\xi|^2 \le \frac{a}{2\pi}\},$$

et l'on a pour $n = 1$,

Deux exemples non triviaux. L'inégalité $\lambda_+(E) \le 1$ est valide pour des disques E de $\mathbb{R}^2$ et provient d'une étude précise de P. Flandrin : pour $a \in \mathbb{R}_+$, on définit

$$D_a = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, |x|^2 + |\xi|^2 \le \frac{a}{2\pi}\},$$

et l'on a pour $n = 1$,

$$\iint_{D_a} W(u,u)(x,\xi)dxd\xi \le (1 - e^{-a})\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{7}$$

pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$.

Deux exemples non triviaux. L'inégalité $\lambda_+(E) \le 1$ est valide pour des disques E de $\mathbb{R}^2$ et provient d'une étude précise de P. FLANDRIN : pour $a \in \mathbb{R}_+$, on définit

$$D_a = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, |x|^2 + |\xi|^2 \le \frac{a}{2\pi}\},$$

et l'on a pour $n = 1$,

$$\iint_{D_a} W(u,u)(x,\xi)dxd\xi \le (1 - e^{-a})\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{7}$$

pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$. On a

$$\boxed{\mathbf{1}_{D_a}^{\mathrm{WEYL}} \le 1 - e^{-a} \quad \text{et même} \quad \lambda_+(D_a) = 1 - e^{-a}.}$$

Deux exemples non triviaux. L'inégalité $\lambda_+(E) \le 1$ est valide pour des disques E de $\mathbb{R}^2$ et provient d'une étude précise de P. Flandrin : pour $a \in \mathbb{R}_+$, on définit

$$D_a = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, |x|^2 + |\xi|^2 \le \frac{a}{2\pi}\},$$

et l'on a pour $n = 1$,

$$\iint_{D_a} W(u,u)(x,\xi)dxd\xi \le (1 - e^{-a})\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{7}$$

pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$. On a

$$\boxed{\mathbf{1}_{D_a}^{\mathrm{Weyl}} \le 1 - e^{-a} \quad \text{et même} \quad \lambda_+(D_a) = 1 - e^{-a}.}$$

Les résultats pour le disque en dimension deux se prolongent immédiatement à des polydisques par tensorisation.

En revanche il n'est pas évident d'étendre ce type de résultat à des boules euclidiennes de $\mathbb{R}^{2n}$. Ce travail a été fait par E. Lieb et Y. Ostrover.

En revanche il n'est pas évident d'étendre ce type de résultat à des boules euclidiennes de $\mathbb{R}^{2n}$. Ce travail a été fait par E. Lieb et Y. Ostrover. Comme pour le cas $n = 1$, une inégalité raffinée sur les polynômes de Laguerre permet d'obtenir le résultat suivant.

En revanche il n'est pas évident d'étendre ce type de résultat à des boules euclidiennes de $\mathbb{R}^{2n}$. Ce travail a été fait par E. Lieb et Y. Ostrover. Comme pour le cas $n = 1$, une inégalité raffinée sur les polynômes de Laguerre permet d'obtenir le résultat suivant.

$$\iint_{D_a} W(u,u)(x,\xi)dxd\xi \le \Bigl(1 - \frac{1}{(n-1)!}\int_a^{+\infty} e^{-t}t^{n-1}dt\Bigr)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{8}$$

pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et l'on a

$$\boxed{\sup\bigl(\texttt{spectrum } \mathbf{1}_{D_a}^{\mathrm{Weyl}}\bigr) = \lambda_+(D_a) = 1 - \frac{\Gamma(n,a)}{\Gamma(n)} = 1 - \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^{+\infty} e^{-t}t^{n-1}dt}$$

En revanche il n'est pas évident d'étendre ce type de résultat à des boules euclidiennes de $\mathbb{R}^{2n}$. Ce travail a été fait par E. Lieb et Y. Ostrover. Comme pour le cas $n = 1$, une inégalité raffinée sur les polynômes de Laguerre permet d'obtenir le résultat suivant.

$$\iint_{D_a} W(u,u)(x,\xi)dxd\xi \le \Big(1 - \frac{1}{(n-1)!}\int_a^{+\infty} e^{-t}t^{n-1}dt\Big)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{8}$$

pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et l'on a

$$\boxed{\sup\big(\texttt{spectrum } \mathbf{1}_{D_a}^{\mathrm{Weyl}}\big) = \lambda_+(D_a) = 1 - \frac{\Gamma(n,a)}{\Gamma(n)} = 1 - \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^{+\infty} e^{-t}t^{n-1}dt}$$

Avec ψ_k désignant la fonction d'Hermite d'ordre k en dimension 1, on a

$$\mathcal{W}(\psi_k,\psi_k)(x,\xi) = (-1)^k 2e^{-2\pi(x^2+\xi^2)}L_k\big(4\pi(x^2+\xi^2)\big), \quad \text{où } L_k \text{ est le polynôme de Laguerre.}$$

Les polynômes de Laguerre $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont définis par

$$L_k(x) = e^x\frac{1}{k!}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^k\{x^k e^{-x}\} = \Big(\frac{d}{dx} - 1\Big)^k\{\frac{x^k}{k!}\}.$$

Un résultat dû à E. Feldheim en 1940 indique que

$$\boxed{\forall \mathbf{k} \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{x} \ge \mathbf{0}, \quad \sum_{\mathbf{0}\le \mathbf{l}\le \mathbf{k}} (-\mathbf{1})^{\mathbf{l}}\mathbf{L}_{\mathbf{l}}(\mathbf{x}) \ge \mathbf{0}.}$$

Ensembles convexes. Les exemples qui précèdent étaient des cas (très particuliers) d'ensembles convexes de $\mathbb{R}^{2n}$ (demi-espaces, disques, boules euclidiennes).

Ensembles convexes. Les exemples qui précèdent étaient des cas (très particuliers) d'ensembles convexes de $\mathbb{R}^{2n}$ (demi-espaces, disques, boules euclidiennes). Il est assez naturel de chercher à comprendre maintenant les intégrales de la fonction de Wigner sur des ensembles convexes plus généraux.

Ensembles convexes. Les exemples qui précèdent étaient des cas (très particuliers) d'ensembles convexes de $\mathbb{R}^{2n}$ (demi-espaces, disques, boules euclidiennes). Il est assez naturel de chercher à comprendre maintenant les intégrales de la fonction de Wigner sur des ensembles convexes plus généraux. Soit C un convexe borné de $\mathbb{R}^{2n}$ et soit $\mathbf{1}_C$ la fonction indicatrice de C. On a

Ensembles convexes. Les exemples qui précèdent étaient des cas (très particuliers) d'ensembles convexes de $\mathbb{R}^{2n}$ (demi-espaces, disques, boules euclidiennes). Il est assez naturel de chercher à comprendre maintenant les intégrales de la fonction de Wigner sur des ensembles convexes plus généraux. Soit C un convexe borné de $\mathbb{R}^{2n}$ et soit $\mathbf{1}_C$ la fonction indicatrice de C. On a

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \iint_C \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi \leq \lambda_+(C)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Ensembles convexes. Les exemples qui précèdent étaient des cas (très particuliers) d'ensembles convexes de $\mathbb{R}^{2n}$ (demi-espaces, disques, boules euclidiennes). Il est assez naturel de chercher à comprendre maintenant les intégrales de la fonction de Wigner sur des ensembles convexes plus généraux. Soit C un convexe borné de $\mathbb{R}^{2n}$ et soit $\mathbf{1}_C$ la fonction indicatrice de C. On a

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \iint_C \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi \leq \lambda_+(C)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

À la page 2178 de son article *Maximum signal energy concentration in a time-frequency domain* (Proc. IEEE), publié en 1988, P. Flandrin écrit

Ensembles convexes. Les exemples qui précèdent étaient des cas (très particuliers) d'ensembles convexes de $\mathbb{R}^{2n}$ (demi-espaces, disques, boules euclidiennes). Il est assez naturel de chercher à comprendre maintenant les intégrales de la fonction de Wigner sur des ensembles convexes plus généraux. Soit C un convexe borné de $\mathbb{R}^{2n}$ et soit $\mathbf{1}_C$ la fonction indicatrice de C. On a

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \iint_C \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi \leq \lambda_+(C)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

À la page 2178 de son article *Maximum signal energy concentration in a time-frequency domain* (Proc. IEEE), publié en 1988, P. Flandrin écrit

"it is conjectured that the inequality

$$\lambda_+(C) \leq 1 \quad \textit{is true for any convex domain } C\text{''}, \tag{9}$$

Ensembles convexes. Les exemples qui précèdent étaient des cas (très particuliers) d'ensembles convexes de $\mathbb{R}^{2n}$ (demi-espaces, disques, boules euclidiennes). Il est assez naturel de chercher à comprendre maintenant les intégrales de la fonction de Wigner sur des ensembles convexes plus généraux. Soit C un convexe borné de $\mathbb{R}^{2n}$ et soit $\mathbf{1}_C$ la fonction indicatrice de C. On a

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \iint_C \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi \leq \lambda_+(C)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

À la page 2178 de son article *Maximum signal energy concentration in a time-frequency domain* (Proc. IEEE), publié en 1988, P. Flandrin écrit

"it is conjectured that the inequality

$$\lambda_+(C) \leq 1 \quad \textit{is true for any convex domain } C\text{''}, \tag{9}$$

un engagement à la tonalité assez modérée en faveur de la validité de (9). Malgré tout, cette affirmation est devenue au fil du temps la *conjecture de Flandrin* dans la littérature de théorie du signal.

Lemme

Si la conjecture de Flandrin était valide, on aurait pour C convexe de $\mathbb{R}^{2n}$ (pas nécessairement de mesure finie) et pour tout $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\iint_C \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi \leq \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{10}$$

Lemme

Si la conjecture de Flandrin était valide, on aurait pour C convexe de $\mathbb{R}^{2n}$ (pas nécessairement de mesure finie) et pour tout $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\iint_C \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi \le \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{10}$$

Démonstration. En effet, pour C convexe avec mesure de Lebesgue infinie, on trouve que pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (ce qui implique $\mathcal{W}(u,u) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$),

Lemme

Si la conjecture de Flandrin était valide, on aurait pour C convexe de $\mathbb{R}^{2n}$ (pas nécessairement de mesure finie) et pour tout $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\iint_C \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi \le \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{10}$$

`Démonstration.` En effet, pour C convexe avec mesure de Lebesgue infinie, on trouve que pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (ce qui implique $\mathcal{W}(u,u) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$), grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\iint_C \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi = \lim_{\lambda \to +\infty} \iint_{C \cap \{(x,\xi), \max(|x|,|\xi|) \le \lambda\}} \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi,$$

$\uparrow$
convexe borné

Lemme

Si la conjecture de Flandrin était valide, on aurait pour C convexe de $\mathbb{R}^{2n}$ (pas nécessairement de mesure finie) et pour tout $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\iint_C \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi \le \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{10}$$

Démonstration. En effet, pour C convexe avec mesure de Lebesgue infinie, on trouve que pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (ce qui implique $\mathcal{W}(u,u) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$), grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\iint_C \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi = \lim_{\lambda\to+\infty} \iint_{\underbrace{C\cap\{(x,\xi),\max(|x|,|\xi|)\le\lambda\}}_{\text{convexe borné}}} \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi,$$

et supposant valide la conjecture de Flandrin, $\iint_C W(u,u)(x,\xi)dxd\xi \le \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. $\square$

Lemme

Si la conjecture de Flandrin était valide, on aurait pour C convexe de $\mathbb{R}^{2n}$ (pas nécessairement de mesure finie) et pour tout $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\iint_C \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi \le \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{10}$$

Démonstration. En effet, pour C convexe avec mesure de Lebesgue infinie, on trouve que pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (ce qui implique $\mathcal{W}(u,u) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$), grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\iint_C \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi = \lim_{\lambda\to+\infty} \iint_{\underset{\text{convexe borné}}{\underbrace{C\cap\{(x,\xi),\max(|x|,|\xi|)\le\lambda\}}}} \mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi,$$

et supposant valide la conjecture de Flandrin, $\iint_C W(u,u)(x,\xi)dxd\xi \le \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. □

N.B. Réciproquement, on peut aussi appliquer (10) à C convexe borné et retrouver la conjecture de Flandrin pour C via le fait que $\mathbf{1}_C^{\mathrm{Weyl}}$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Le quart de plan

Nous allons maintenant concentrer notre attention sur un cas apparemment très simple, celui du “quart de plan” $C_0 = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0, \xi \geq 0\}$.

Le quart de plan

Nous allons maintenant concentrer notre attention sur un cas apparemment très simple, celui du “quart de plan” $C_0 = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0, \xi \geq 0\}$. Nous voulons donc étudier l'opérateur

$$\boxed{A_0 = \big(H(x)H(\xi)\big)^{\mathrm{Weyl}} = \big(\mathbf{1}_{C_0}\big)^{\mathrm{Weyl}}}$$

Le quart de plan

Nous allons maintenant concentrer notre attention sur un cas apparemment très simple, celui du "quart de plan" $C_0 = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0, \xi \geq 0\}$. Nous voulons donc étudier l'opérateur

$$\boxed{A_0 = \big(H(x)H(\xi)\big)^{\textsc{Weyl}} = \big(\mathbf{1}_{C_0}\big)^{\textsc{Weyl}}}$$

où $H = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$, soit la quantification de Weyl de la fonction indicatrice du quart de plan.

Théorème

Soit A_0 l'opérateur de symbole de Weyl $H(x)H(\xi)$, où H est la fonction d'Heaviside. Alors A_0 est un opérateur auto-adjoint borné sur $L^2(\mathbb{R})$ tel que

$$\inf\big(\mathrm{spectrum}(A_0)\big) < 0 < 1 < \sup\big(\mathrm{spectrum}(A_0)\big). \tag{11}$$

Le quart de plan

Nous allons maintenant concentrer notre attention sur un cas apparemment très simple, celui du "quart de plan" $C_0 = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0, \xi \geq 0\}$. Nous voulons donc étudier l'opérateur

$$\boxed{A_0 = \big(H(x)H(\xi)\big)^{\text{Weyl}} = \big(\mathbf{1}_{C_0}\big)^{\text{Weyl}}}$$

où $H = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$, soit la quantification de Weyl de la fonction indicatrice du quart de plan.

Théorème

Soit A_0 l'opérateur de symbole de Weyl $H(x)H(\xi)$, où H est la fonction d'Heaviside. Alors A_0 est un opérateur auto-adjoint borné sur $L^2(\mathbb{R})$ tel que

$$\inf\big(\mathrm{spectrum}(A_0)\big) < 0 < 1 < \sup\big(\mathrm{spectrum}(A_0)\big). \tag{11}$$

Ce théorème est prouvé dans l'article *On integrals over a convex set of the Wigner distribution,* par B. Delourme, T. Duyckaerts and N.L., publié dans le `Journal of Fourier Analysis and Applications`, volume 26, February 2020.

Corollaire (Un contre-exemple à la conjecture de Flandrin)

Il existe une fonction $\phi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, de norme $L^2(\mathbb{R})$ égale à 1 telle que

$$\iint_{x\geq 0, \xi \geq 0} \mathcal{W}(\phi_0, \phi_0)(x, \xi) dx d\xi > 1. \tag{12}$$

Il existe $a > 0$ tel que $\iint_{0\leq x\leq a, 0\leq \xi \leq a} \mathcal{W}(\phi_0, \phi_0)(x, \xi) dx d\xi > 1$.

Corollaire (Un contre-exemple à la conjecture de Flandrin)

Il existe une fonction $\phi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, de norme $L^2(\mathbb{R})$ égale à 1 telle que

$$\iint_{x\geq 0, \xi\geq 0} \mathcal{W}(\phi_0, \phi_0)(x, \xi) dx d\xi > 1. \tag{12}$$

Il existe $a > 0$ tel que $\iint_{0\leq x\leq a, 0\leq \xi\leq a} \mathcal{W}(\phi_0, \phi_0)(x, \xi) dx d\xi > 1$.

Par conséquent, il existe $a > 0$ tel que

$$\lambda_+\big([0, a] \times [0, a]\big) > 1,$$

montrant que la conjecture de Flandrin est fausse.

3. Commentaires et démonstrations

Revisitons le problème

On a vu l'exemple simple du demi-plan

$$E = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, L(x, \xi) \geq \alpha\}, \quad \text{où } L \text{ est une forme linéaire, } \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. Commentaires et démonstrations

Revisitons le problème

On a vu l'exemple simple du demi-plan

$$E = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, L(x,\xi) \geq \alpha\}, \quad \text{où } L \text{ est une forme linéaire, } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas (si $L \neq 0$), on peut trouver des coordonnées symplectiques affines (y,η) sur $\mathbb{R}^{2n}$ telles que $L(x,\xi) - \alpha = y_1$,

3. Commentaires et démonstrations

Revisitons le problème

On a vu l'exemple simple du demi-plan

$$E = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, L(x,\xi) \ge \alpha\}, \quad \text{où } L \text{ est une forme linéaire, } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas (si $L \neq 0$), on peut trouver des coordonnées symplectiques affines (y,η) sur $\mathbb{R}^{2n}$ telles que $L(x,\xi) - \alpha = y_1$, ce qui implique avec la propriété de covariance symplectique du calcul de Weyl que $\mathbf{1}_E^{\mathrm{Weyl}}$ est unitairement équivalent à une projection orthogonale

3. Commentaires et démonstrations

Revisitons le problème

On a vu l'exemple simple du demi-plan

$$E = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, L(x,\xi) \ge \alpha\}, \quad \text{où } L \text{ est une forme linéaire, } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas (si $L \neq 0$), on peut trouver des coordonnées symplectiques affines (y,η) sur $\mathbb{R}^{2n}$ telles que $L(x,\xi) - \alpha = y_1$, ce qui implique avec la propriété de covariance symplectique du calcul de Weyl que $\mathbf{1}_E^{\textrm{Weyl}}$ est unitairement équivalent à une projection orthogonale

$$u \mapsto u(y)H(y_1).$$

3. Commentaires et démonstrations

Revisitons le problème

On a vu l'exemple simple du demi-plan

$$E = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, L(x, \xi) \geq \alpha\}, \quad \text{où } L \text{ est une forme linéaire, } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas (si $L \neq 0$), on peut trouver des coordonnées symplectiques affines (y, η) sur $\mathbb{R}^{2n}$ telles que $L(x, \xi) - \alpha = y_1$, ce qui implique avec la propriété de covariance symplectique du calcul de Weyl que $\mathbf{1}_E^{\mathrm{Weyl}}$ est unitairement équivalent à une projection orthogonale

$$u \mapsto u(y) H(y_1).$$

Ce cas est trop simple pour être réellement significatif

Dans bien des cas, la quantification de Weyl du hamiltonien $\mathbf{1}_E(x,\xi)$ peut être très différente d'une projection et peut avoir un spectre assez compliqué

Dans bien des cas, la quantification de Weyl du hamiltonien $\mathbf{1}_E(x,\xi)$ peut être très différente d'une projection et peut avoir un spectre assez compliqué avec un supremum > 1 et un infimum < 0

Dans bien des cas, la quantification de Weyl du hamiltonien $\mathbf{1}_E(x,\xi)$ peut être très différente d'une projection et peut avoir un spectre assez compliqué avec un supremum >1 et un infimum <0

Finalement, bien que nous ayons l'identité triviale

$$\mathbf{1}_E(x,\xi)^2 = \mathbf{1}_E(x,\xi),$$

nous verrons que le processus de quantification peut complètement détruire cette propriété. La fonction de Wigner n'est pas une densité de probabilité, bien qu'elle prenne des valeurs réelles et soit d'intégrale 1 (pour des u normalisés dans $L^2(\mathbb{R}^n)$). Cette fonction peut en effet prendre des valeurs strictement négatives de sorte que

$$\iint \mathbf{1}_E(x,\xi)\mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi \quad \text{n'appartient pas nécessairement à } [0,1].$$

La terminologie "quasi-probabilité" est effroyablement impropre.

Dans bien des cas, la quantification de Weyl du hamiltonien $\mathbf{1}_E(x,\xi)$ peut être très différente d'une projection et peut avoir un spectre assez compliqué avec un supremum > 1 et un infimum < 0

Finalement, bien que nous ayons l'identité triviale

$$\mathbf{1}_E(x,\xi)^2 = \mathbf{1}_E(x,\xi),$$

nous verrons que le processus de quantification peut complètement détruire cette propriété. La fonction de Wigner n'est pas une densité de probabilité, bien qu'elle prenne des valeurs réelles et soit d'intégrale 1 (pour des u normalisés dans $L^2(\mathbb{R}^n)$). Cette fonction peut en effet prendre des valeurs strictement négatives de sorte que

$$\iint \mathbf{1}_E(x,\xi)\mathcal{W}(u,u)(x,\xi)dxd\xi \quad \text{n'appartient pas nécessairement à } [0,1].$$

La terminologie "quasi-probabilité" est effroyablement impropre.

La compréhension des intégrales de la fonction de Wigner sur un ensemble E de l'espace des phases nous force à considérer la quantification de Weyl des fonctions $\mathbf{1}_E(x,\xi)$. Le principe d'incertitude d'Heisenberg nous montre que les propriétés de non-commutation des opérateurs dépendant de variables conjuguées (disons x_1, ξ_1) régissent l'algèbre des opérateurs et créent une distorsion considérable des propriétés des hamiltoniens classiques, d'autant plus que ceux que nous considérons sont singuliers.

On peut remarquer en effet que nous ne disposons pas d'une version semi-classique qui pourrait créer un lien entre les propriétés classiques et les propriétés quantiques, comme c'est le cas pour des symboles lisses dépendant d'un petit paramètre h.

On peut remarquer en effet que nous ne disposons pas d'une version semi-classique qui pourrait créer un lien entre les propriétés classiques et les propriétés quantiques, comme c'est le cas pour des symboles lisses dépendant d'un petit paramètre h.

En particulier pour un symbole a tel que $a(x, \xi, h) = a_1(x, h\xi)$, $a_1 \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, on a le résultat suivant : si pour tous les $(x, \xi, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0, 1]$ on a $a(x, \xi, h) \leq 1$, alors il existe une semi-norme C du symbole a telle que

On peut remarquer en effet que nous ne disposons pas d'une version semi-classique qui pourrait créer un lien entre les propriétés classiques et les propriétés quantiques, comme c'est le cas pour des symboles lisses dépendant d'un petit paramètre h.

En particulier pour un symbole a tel que $a(x, \xi, h) = a_1(x, h\xi)$, $a_1 \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, on a le résultat suivant : si pour tous les $(x, \xi, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0, 1]$ on a $a(x, \xi, h) \leq 1$, alors il existe une semi-norme C du symbole a telle que

$$\mathrm{Id} - a^{\mathrm{Weyl}} + Ch^2 \geq 0 \qquad \text{i.e.} \quad a^{\mathrm{Weyl}} \leq \mathrm{Id} + Ch^2, \tag{13}$$

une conséquence d'une inégalité due à C.L. Fefferman & D.H. Phong qui implique également le théorème suivant.

Théorème (Un corollaire de l'inégalité de Fefferman-Phong)

Soit a un symbole semi-classique d'ordre 0, e.g. $a(x,\xi,h) = a_1(x,h\xi)$, $a_1 \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, *tel que pour tout* $(x,\xi,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0,1]$ *on ait*

$$0 \le a(x,\xi,h) \le 1.$$

Alors il existe une semi-norme C du symbole a telle que

$$-Ch^2 \le a^{\mathrm{Weyl}} \le \mathrm{Id} + Ch^2.$$

Le traitement du quart de plan. Nous cherchons une décomposition spectrale explicite de l'opérateur

$$A_0 = \big(H(x)H(\xi)\big)^{\mathrm{W{\scriptsize EYL}}}.$$

Le noyau de A_0 est

$$k_0(x,y) = H(x+y)\hat{H}(y-x) = H(x+y)\frac{1}{2}\Big(\delta_0(y-x) + \frac{1}{i\pi}\mathrm{pv}\frac{1}{y-x}\Big).$$

Première étape : utiliser des coordonnées logarithmiques sur chaque demi-droite $\mathbb{R}^{\pm}$. L'application Ψ définie par

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^2) \\ & u & \mapsto & \Big(\phi_1(t) = u(e^t)e^{t/2}, \phi_2(t) = u(-e^t)e^{t/2}\Big) \end{array}$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Hilbert.

Nous avons, au moins formellement, les identités suivantes pour un opérateur K de noyau $k(x, y)$. Si H est la fonction d'Heaviside, il vient

Nous avons, au moins formellement, les identités suivantes pour un opérateur K de noyau $k(x,y)$. Si H est la fonction d'Heaviside, il vient

$$\langle KHu, Hv\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \iint k(x,y)H(y)u(y)H(x)\bar{v}(x)dydx$$

Nous avons, au moins formellement, les identités suivantes pour un opérateur K de noyau $k(x, y)$. Si H est la fonction d'Heaviside, il vient

$$\begin{aligned}\langle KHu, Hv\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \iint k(x, y)H(y)u(y)H(x)\bar{v}(x)dydx \\ &= \iint k(e^s, e^t)u(e^t)\bar{v}(e^s)e^{s+t}dsdt\end{aligned}$$

Nous avons, au moins formellement, les identités suivantes pour un opérateur K de noyau $k(x,y)$. Si H est la fonction d'Heaviside, il vient

$$\begin{aligned}
\langle KHu, Hv\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \iint k(x,y)H(y)u(y)H(x)\bar{v}(x)dydx \\
&= \iint k(e^s,e^t)u(e^t)\bar{v}(e^s)e^{s+t}dsdt \\
&= \iint \underbrace{k(e^s,e^t)e^{\frac{s+t}{2}}}_{\tilde{k}(s,t)}\underbrace{u(e^t)e^{\frac{t}{2}}}_{\phi_1(t)}\underbrace{\bar{v}(e^s)e^{\frac{s}{2}}}_{\overline{\psi_1}(s)}dsdt,
\end{aligned}$$

Nous avons, au moins formellement, les identités suivantes pour un opérateur K de noyau $k(x,y)$. Si H est la fonction d'Heaviside, il vient

$$\begin{aligned}
\langle KHu, Hv\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \iint k(x,y)H(y)u(y)H(x)\bar{v}(x)dydx \\
&= \iint k(e^s,e^t)u(e^t)\bar{v}(e^s)e^{s+t}dsdt \\
&= \iint \underbrace{k(e^s,e^t)e^{\frac{s+t}{2}}}_{\tilde{k}(s,t)} \underbrace{u(e^t)e^{\frac{t}{2}}}_{\phi_1(t)} \underbrace{\bar{v}(e^s)e^{\frac{s}{2}}}_{\overline{\psi_1}(s)} dsdt,
\end{aligned}$$

de sorte que le noyau de l'opérateur HKH en coordonnées logarithmiques est $\tilde{k}(s,t)$.

On examine tout d'abord les termes "diagonaux",

On examine tout d'abord les termes "diagonaux",

$$H(x)H(y)H(x+y)\frac{1}{2}\left(\delta_0(y-x)+\frac{1}{i\pi}\mathrm{pv}\frac{1}{y-x}\right)$$

On examine tout d'abord les termes "diagonaux",

$$H(x)H(y)H(x+y)\frac{1}{2}\Bigl(\delta_0(y-x)+\frac{1}{i\pi}\operatorname{pv}\frac{1}{y-x}\Bigr)$$
$$=H(x)H(y)\frac{1}{2}\delta_0(y-x)+\frac{1}{2i\pi}\operatorname{pv}\frac{H(x)H(y)}{y-x}$$

On examine tout d'abord les termes "diagonaux",

$$\begin{aligned}
&H(x)H(y)H(x+y)\frac{1}{2}\Big(\delta_0(y-x)+\frac{1}{i\pi}\mathrm{pv}\frac{1}{y-x}\Big)\\
&\quad= H(x)H(y)\frac{1}{2}\delta_0(y-x)+\frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{H(x)H(y)}{y-x}\\
&\quad\equiv \frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{e^{t/2}e^{s/2}}{e^t-e^s}
\end{aligned}$$

On examine tout d'abord les termes "diagonaux",

$$
\begin{aligned}
&H(x)H(y)H(x+y)\frac{1}{2}\Big(\delta_0(y-x)+\frac{1}{i\pi}\operatorname{pv}\frac{1}{y-x}\Big)\\
&\quad = H(x)H(y)\frac{1}{2}\delta_0(y-x)+\frac{1}{2i\pi}\operatorname{pv}\frac{H(x)H(y)}{y-x}\\
&\quad \equiv \frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\operatorname{pv}\frac{e^{t/2}e^{s/2}}{e^t-e^s}\\
&\quad = \frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\operatorname{pv}\frac{1}{e^{\frac{t-s}{2}}-e^{\frac{s-t}{2}}}
\end{aligned}
$$

(c'est une convolution en coordonnées logarithmiques)

On examine tout d'abord les termes "diagonaux",

$$
\begin{aligned}
&H(x)H(y)H(x+y)\frac{1}{2}\Big(\delta_0(y-x)+\frac{1}{i\pi}\mathrm{pv}\frac{1}{y-x}\Big)\\
&\quad= H(x)H(y)\frac{1}{2}\delta_0(y-x)+\frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{H(x)H(y)}{y-x}\\
&\quad\equiv \frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{e^{t/2}e^{s/2}}{e^t-e^s}\\
&\quad= \frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{1}{e^{\frac{t-s}{2}}-e^{\frac{s-t}{2}}} \qquad \text{(c'est une convolution en coordonnées logarithmiques)}\\
&\quad= \frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{1}{2\sinh(\frac{t-s}{2})} \qquad \text{(très explicite)}
\end{aligned}
$$

On examine tout d'abord les termes "diagonaux",

$$
\begin{aligned}
&H(x)H(y)H(x+y)\frac{1}{2}\Big(\delta_0(y-x)+\frac{1}{i\pi}\operatorname{pv}\frac{1}{y-x}\Big)\\
&\quad = H(x)H(y)\frac{1}{2}\delta_0(y-x)+\frac{1}{2i\pi}\operatorname{pv}\frac{H(x)H(y)}{y-x}\\
&\quad \equiv \frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\operatorname{pv}\frac{e^{t/2}e^{s/2}}{e^t-e^s}\\
&\quad = \frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\operatorname{pv}\frac{1}{e^{\frac{t-s}{2}}-e^{\frac{s-t}{2}}} \qquad \text{(c'est une convolution en coordonnées logarithmiques)}\\
&\quad = \frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\operatorname{pv}\frac{1}{2\sinh(\frac{t-s}{2})} \qquad \text{(très explicite)}
\end{aligned}
$$

Pour les termes hors de la diagonale : on trouve avec $\check{H}(t)=H(-t)$,

On examine tout d'abord les termes "diagonaux",

$$
\begin{aligned}
&H(x)H(y)H(x+y)\frac{1}{2}\Big(\delta_0(y-x)+\frac{1}{i\pi}\operatorname{pv}\frac{1}{y-x}\Big)\\
&\quad= H(x)H(y)\frac{1}{2}\delta_0(y-x)+\frac{1}{2i\pi}\operatorname{pv}\frac{H(x)H(y)}{y-x}\\
&\quad\equiv \frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\operatorname{pv}\frac{e^{t/2}e^{s/2}}{e^t-e^s}\\
&\quad= \frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\operatorname{pv}\frac{1}{e^{\frac{t-s}{2}}-e^{\frac{s-t}{2}}} \qquad \text{(c'est une convolution en coordonnées logarithmiques)}\\
&\quad= \frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\operatorname{pv}\frac{1}{2\sinh(\frac{t-s}{2})} \qquad \text{(très explicite)}
\end{aligned}
$$

Pour les termes hors de la diagonale : on trouve avec $\check{H}(t)=H(-t)$,

$$
\Big(H(x)\check{H}(y)+\check{H}(x)H(y)\Big)H(x+y)\frac{1}{2}\Big(\delta_0(y-x)+\frac{1}{i\pi}\operatorname{pv}\frac{1}{y-x}\Big)
$$

On examine tout d'abord les termes "diagonaux",

$$
\begin{aligned}
&H(x)H(y)H(x+y)\frac{1}{2}\Big(\delta_0(y-x)+\frac{1}{i\pi}\mathrm{pv}\frac{1}{y-x}\Big)\\
&\quad= H(x)H(y)\frac{1}{2}\delta_0(y-x)+\frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{H(x)H(y)}{y-x}\\
&\quad\equiv \frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{e^{t/2}e^{s/2}}{e^t-e^s}\\
&\quad= \frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{1}{e^{\frac{t-s}{2}}-e^{\frac{s-t}{2}}} \qquad \textbf{(c'est une convolution en coordonnées logarithmiques)}\\
&\quad= \frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{1}{2\sinh(\frac{t-s}{2})} \qquad \textbf{(très explicite)}
\end{aligned}
$$

Pour les termes hors de la diagonale : on trouve avec $\check{H}(t)=H(-t)$,

$$
\Big(H(x)\check{H}(y)+\check{H}(x)H(y)\Big)H(x+y)\frac{1}{2}\Big(\delta_0(y-x)+\frac{1}{i\pi}\mathrm{pv}\frac{1}{y-x}\Big)
$$

$$
\equiv \frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{e^{\frac{t+s}{2}}\,\mathrm{sign}(t-s)}{e^t+e^s}=\frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{\mathrm{sign}(t-s)}{2\cosh(\frac{t-s}{2})},
$$

On examine tout d'abord les termes "diagonaux",

$$\begin{aligned}
&H(x)H(y)H(x+y)\frac{1}{2}\Big(\delta_0(y-x)+\frac{1}{i\pi}\mathrm{pv}\frac{1}{y-x}\Big)\\
&\quad=H(x)H(y)\frac{1}{2}\delta_0(y-x)+\frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{H(x)H(y)}{y-x}\\
&\quad\equiv\frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{e^{t/2}e^{s/2}}{e^t-e^s}\\
&\quad=\frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{1}{e^{\frac{t-s}{2}}-e^{\frac{s-t}{2}}} \quad \textbf{(c'est une convolution en coordonnées logarithmiques)}\\
&\quad=\frac{1}{2}\delta_0(t-s)+\frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{1}{2\sinh(\frac{t-s}{2})} \quad \textbf{(très explicite)}
\end{aligned}$$

Pour les termes hors de la diagonale : on trouve avec $\check{H}(t)=H(-t)$,

$$\Big(H(x)\check{H}(y)+\check{H}(x)H(y)\Big)H(x+y)\frac{1}{2}\Big(\delta_0(y-x)+\frac{1}{i\pi}\mathrm{pv}\frac{1}{y-x}\Big)$$

$$\equiv\frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{e^{\frac{t+s}{2}}\,\mathrm{sign}(t-s)}{e^t+e^s}=\frac{1}{2i\pi}\mathrm{pv}\frac{\mathrm{sign}(t-s)}{2\cosh(\frac{t-s}{2})},$$

qui est une autre convolution.

Deuxième étape : étudier la matrice 2×2 multiplicateur de Fourier. On travaille sur $L^2(\mathbb{R}_t; \mathbb{C}^2)$, une dimension d'espace (la variable t) mais agissant sur des vecteurs de $\mathbb{C}^2$. On a

$$\mathcal{N}(\tau) = \begin{pmatrix} a_{11}(\tau) & a_{12}(\tau) \\ \overline{a_{12}(\tau)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Deuxième étape : étudier la matrice 2×2 multiplicateur de Fourier. On travaille sur $L^2(\mathbb{R}_t; \mathbb{C}^2)$, une dimension d'espace (la variable t) mais agissant sur des vecteurs de $\mathbb{C}^2$. On a

$$\mathcal{N}(\tau) = \begin{pmatrix} a_{11}(\tau) & a_{12}(\tau) \\ \overline{a_{12}(\tau)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres $\lambda_- \leq \lambda_+$ de $\mathcal{N}(\tau)$ sont telles que

Deuxième étape : étudier la matrice 2×2 multiplicateur de Fourier. On travaille sur $L^2(\mathbb{R}_t; \mathbb{C}^2)$, une dimension d'espace (la variable t) mais agissant sur des vecteurs de $\mathbb{C}^2$. On a

$$\mathcal{N}(\tau) = \begin{pmatrix} a_{11}(\tau) & a_{12}(\tau) \\ \overline{a_{12}(\tau)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres $\lambda_- \leq \lambda_+$ de $\mathcal{N}(\tau)$ sont telles que

$$\lambda_-(\tau) < 0 < 1 < \lambda_+(\tau), \tag{14}$$

Deuxième étape : étudier la matrice 2×2 multiplicateur de Fourier. On travaille sur $L^2(\mathbb{R}_t; \mathbb{C}^2)$, une dimension d'espace (la variable t) mais agissant sur des vecteurs de $\mathbb{C}^2$. On a

$$\mathcal{N}(\tau) = \begin{pmatrix} a_{11}(\tau) & a_{12}(\tau) \\ \overline{a_{12}(\tau)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres $\lambda_- \le \lambda_+$ de $\mathcal{N}(\tau)$ sont telles que

$$\lambda_-(\tau) < 0 < 1 < \lambda_+(\tau), \tag{14}$$

si et seulement si

$$a_{12}(\tau) \neq 0 \quad \text{et} \quad |a_{12}(\tau)|^2 > 1 - a_{11}(\tau). \tag{15}$$

Deuxième étape : étudier la matrice 2×2 multiplicateur de Fourier. On travaille sur $L^2(\mathbb{R}_t; \mathbb{C}^2)$, une dimension d'espace (la variable t) mais agissant sur des vecteurs de $\mathbb{C}^2$. On a

$$\mathcal{N}(\tau) = \begin{pmatrix} a_{11}(\tau) & a_{12}(\tau) \\ \overline{a_{12}(\tau)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres $\lambda_- \leq \lambda_+$ de $\mathcal{N}(\tau)$ sont telles que

$$\lambda_-(\tau) < 0 < 1 < \lambda_+(\tau), \tag{14}$$

si et seulement si

$$a_{12}(\tau) \neq 0 \quad \text{et} \quad |a_{12}(\tau)|^2 > 1 - a_{11}(\tau). \tag{15}$$

Il est possible de traduire cette propriété spectrale en terme de singularité de la fonction g_0 (qui permet de définir le symbole) définie par

Deuxième étape : étudier la matrice 2×2 multiplicateur de Fourier. On travaille sur $L^2(\mathbb{R}_t; \mathbb{C}^2)$, une dimension d'espace (la variable t) mais agissant sur des vecteurs de $\mathbb{C}^2$. On a

$$\mathcal{N}(\tau) = \begin{pmatrix} a_{11}(\tau) & a_{12}(\tau) \\ \overline{a_{12}(\tau)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres $\lambda_- \leq \lambda_+$ de $\mathcal{N}(\tau)$ sont telles que

$$\lambda_-(\tau) < 0 < 1 < \lambda_+(\tau), \tag{14}$$

si et seulement si

$$a_{12}(\tau) \neq 0 \quad \text{et} \quad |a_{12}(\tau)|^2 > 1 - a_{11}(\tau). \tag{15}$$

Il est possible de traduire cette propriété spectrale en terme de singularité de la fonction g_0 (qui permet de définir le symbole) définie par

$$g_0(t) = \frac{H(t)}{\cosh t}.$$

Deuxième étape : étudier la matrice 2×2 multiplicateur de Fourier. On travaille sur $L^2(\mathbb{R}_t; \mathbb{C}^2)$, une dimension d'espace (la variable t) mais agissant sur des vecteurs de $\mathbb{C}^2$. On a

$$\mathcal{N}(\tau) = \begin{pmatrix} a_{11}(\tau) & a_{12}(\tau) \\ \overline{a_{12}(\tau)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres $\lambda_- \leq \lambda_+$ de $\mathcal{N}(\tau)$ sont telles que

$$\lambda_-(\tau) < 0 < 1 < \lambda_+(\tau), \tag{14}$$

si et seulement si

$$a_{12}(\tau) \neq 0 \quad \text{et} \quad |a_{12}(\tau)|^2 > 1 - a_{11}(\tau). \tag{15}$$

Il est possible de traduire cette propriété spectrale en terme de singularité de la fonction g_0 (qui permet de définir le symbole) définie par

$$g_0(t) = \frac{H(t)}{\cosh t}.$$

La fonction g_0 est singulière en $t = 0$ de sorte que sa transformée de Fourier $a_{12}(\tau)$ ne peut pas tendre vers 0 rapidement lorsque $\tau \to +\infty$.

Deuxième étape : étudier la matrice 2×2 multiplicateur de Fourier. On travaille sur $L^2(\mathbb{R}_t; \mathbb{C}^2)$, une dimension d'espace (la variable t) mais agissant sur des vecteurs de $\mathbb{C}^2$. On a

$$\mathcal{N}(\tau) = \begin{pmatrix} a_{11}(\tau) & a_{12}(\tau) \\ \overline{a_{12}(\tau)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres $\lambda_- \leq \lambda_+$ de $\mathcal{N}(\tau)$ sont telles que

$$\lambda_-(\tau) < 0 < 1 < \lambda_+(\tau), \tag{14}$$

si et seulement si

$$a_{12}(\tau) \neq 0 \quad \text{et} \quad |a_{12}(\tau)|^2 > 1 - a_{11}(\tau). \tag{15}$$

Il est possible de traduire cette propriété spectrale en terme de singularité de la fonction g_0 (qui permet de définir le symbole) définie par

$$g_0(t) = \frac{H(t)}{\cosh t}.$$

La fonction g_0 est singulière en $t = 0$ de sorte que sa transformée de Fourier $a_{12}(\tau)$ ne peut pas tendre vers 0 rapidement lorsque $\tau \to +\infty$. Par ailleurs $1 - a_{11}(\tau)$ appartient à l'espace de Schwartz et décroît rapidement lorsque $\tau \to +\infty$. L'inégalité (15) est donc vérifiée pour τ assez grand.

Commentaires, questions

L'étude de $\mathbf{1}_E^{\mathrm{Weyl}}$ pour un ensemble E inclus dans l'espace des phases est corrélée avec E via des fonctions spéciales.

Commentaires, questions

L'étude de $\mathbf{1}_E^{\mathrm{W\scriptstyle EYL}}$ pour un ensemble E inclus dans l'espace des phases est corrélée avec E via des fonctions spéciales.

- Fonctions d'Hermite et polynômes de Laguerre pour des ellipses,

Commentaires, questions

L'étude de $\mathbf{1}_E^{\textsc{Weyl}}$ pour un ensemble E inclus dans l'espace des phases est corrélée avec E via des fonctions spéciales.

- Fonctions d'Hermite et polynômes de Laguerre pour des ellipses,
- Fonctions d'Airy pour des paraboles,

Commentaires, questions

L'étude de $\mathbf{1}_E^{\mathrm{Weyl}}$ pour un ensemble E inclus dans l'espace des phases est corrélée avec E via des fonctions spéciales.

- Fonctions d'Hermite et polynômes de Laguerre pour des ellipses,
- Fonctions d'Airy pour des paraboles,
- Distributions homogènes pour des hyperboles

Commentaires, questions

L'étude de $\mathbf{1}_E^{\mathrm{Weyl}}$ pour un ensemble E inclus dans l'espace des phases est corrélée avec E via des fonctions spéciales.

- Fonctions d'Hermite et polynômes de Laguerre pour des ellipses,
- Fonctions d'Airy pour des paraboles,
- Distributions homogènes pour des hyperboles et ainsi de suite.

Commentaires, questions

L'étude de $\mathbf{1}_E^{\mathrm{WEYL}}$ pour un ensemble E inclus dans l'espace des phases est corrélée avec E via des fonctions spéciales.

- Fonctions d'Hermite et polynômes de Laguerre pour des ellipses,
- Fonctions d'Airy pour des paraboles,
- Distributions homogènes pour des hyperboles et ainsi de suite.

Il semble que la "forme" de E doive déterminer le type de fonctions spéciales à étudier pour obtenir une diagonalisation de l'opérateur $\mathbf{1}_E^{\mathrm{WEYL}}$.

Quelques questions :

Quelques questions :

• Pour un polygone convexe du plan P_N avec N sommets, il est possible de prouver que

$$\mathbf{1}_{P_N}^{\textrm{Weyl}} \le \sigma_N,$$

où σ_N ne dépend pas de l'aire du polygone mais seulement de N. Est-il vrai que $\sup_N \sigma_N < +\infty$?

Quelques questions :

• Pour un polygone convexe du plan P_N avec N sommets, il est possible de prouver que

$$\mathbf{1}_{P_N}^{\textsc{Weyl}} \le \sigma_N,$$

où σ_N ne dépend pas de l'aire du polygone mais seulement de N. Est-il vrai que $\sup_N \sigma_N < +\infty$?

• Existe-t-il $\sigma > 1$ tel que pour tous les convexes compacts K du plan $\mathbf{1}_{K}^{\textsc{Weyl}} \le \sigma$?

- En dimension $2n$, on définit l'ellipsoïde

$$E(a_1,\dots,a_n)=\{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, 2\pi\sum_{1\le j\le n}\frac{x_j^2+\xi_j^2}{a_j}\le 1\}.$$

Peut-on déterminer

$$\sup \textsc{spectrum}(\mathbf{1}_{E(a_1,\dots,a_n)})^{\textsc{Weyl}} ?$$

C'est fait par E. Lieb & Y. Ostrover pour $a_1=\dots=a_n$, mais en dimension $2n$ avec $n\ge 2$, les ellipsoïdes ne sont pas en général symplectiquement équivalents à la boule euclidienne.

Maximum signal energy concentration in a time-frequency domain

`P. Flandrin,`

Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics 4 (1988), no. 1.

Maximum signal energy concentration in a time-frequency domain
P. Flandrin,
Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics 4 (1988), no. 1.

Bounds on integrals of the Wigner function : the hyperbolic case
J.G. Wood, A.J. Bracken,
Journal of Mathematical Physics, 46, 4, (2005).

Maximum signal energy concentration in a time-frequency domain
P. Flandrin,
Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics 4 (1988), no. 1.

Bounds on integrals of the Wigner function : the hyperbolic case
J.G. Wood, A.J. Bracken,
Journal of Mathematical Physics, 46, 4, (2005).

On Integrals over a Convex Set of the Wigner Distribution
B. Delourme, T. Duyckaerts, N.L.,
Journal of Fourier Analysis and Applications, 26, (2020), 1.

Maximum signal energy concentration in a time-frequency domain
P. Flandrin,
Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics 4 (1988), no. 1.

Bounds on integrals of the Wigner function : the hyperbolic case
J.G. Wood, A.J. Bracken,
Journal of Mathematical Physics, 46, 4, (2005).

On Integrals over a Convex Set of the Wigner Distribution
B. Delourme, T. Duyckaerts, N.L.,
Journal of Fourier Analysis and Applications, 26, (2020), 1.

Integrating the Wigner Distribution on subsets of the phase space, a Survey
N.L.,
https://arxiv.org/abs/2102.08090

Maximum signal energy concentration in a time-frequency domain
P. Flandrin,
Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics 4 (1988), no. 1.

Bounds on integrals of the Wigner function : the hyperbolic case
J.G. Wood, A.J. Bracken,
Journal of Mathematical Physics, 46, 4, (2005).

On Integrals over a Convex Set of the Wigner Distribution
B. Delourme, T. Duyckaerts, N.L.,
Journal of Fourier Analysis and Applications, 26, (2020), 1.

Integrating the Wigner Distribution on subsets of the phase space, a Survey
N.L.,
https://arxiv.org/abs/2102.08090

Merci pour votre attention