Inégalités de Carleman

Nicolas Lerner

Sorbonne Université

Colloquium Lorrain de Mathématiques
Institut Élie Cartan de Lorraine,
mardi 17 décembre, 16:30 – 17:30

12 décembre 2019, 18:05

1. Torsten Carleman

Eléments biographiques

Torsten CARLEMAN (1892–1949) est un mathématicien suédois, diplômé de l'université d'Uppsala dans laquelle il a obtenu une thèse sous la direction d'Erik HOLMGREN.

1. Torsten Carleman

Eléments biographiques

Torsten CARLEMAN (1892–1949) est un mathématicien suédois, diplômé de l'université d'Uppsala dans laquelle il a obtenu une thèse sous la direction d'Erik HOLMGREN.

Il devient professeur à Lund en 1923, puis à Stockholm en 1924, et en 1927 est nommé directeur de l'Institut Mittag-Leffler et le restera jusqu'à son décès en 1949.

La méthode de Carleman, un exemple

Carleman a produit des contributions très variées en analyse mathématique et en physique mathématique, de l'analyse complexe à l'équation de Boltzmann. Il est notamment connu pour l'inégalité suivante, qui porte son nom :

Pour $(a_j)_{j\geq 0}$ des réels positifs ou nuls, on a, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_1\dots a_n)^{1/n}\leq e\sum_{n=1}^{+\infty}a_n.$

La méthode de Carleman, un exemple

Carleman a produit des contributions très variées en analyse mathématique et en physique mathématique, de l'analyse complexe à l'équation de Boltzmann. Il est notamment connu pour l'inégalité suivante, qui porte son nom :

Pour $(a_j)_{j\ge0}$ des réels positifs ou nuls, on a, $$\sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_1\dots a_n\big)^{1/n}\le e\sum_{n=1}^{+\infty}a_n.$$

Dans cet exposé, nous nous intéresserons à d'autres inégalités, également désignées comme **Inégalités de Carleman**, qui sont des inégalités à poids pour des équations aux dérivées partielles. Avant d'examiner un exemple prototypique, il faut commencer par une question mathématique simple, posée par Carleman en 1938.

Considérons le laplacien en dimension deux,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

et supposons que u soit une fonction C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telle que,

Considérons le laplacien en dimension deux,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

et supposons que u soit une fonction C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telle que,

---

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |(\Delta u)(x,y)| \leq |u(x,y)|, \\ \forall x < 0, \forall y \in \mathbb{R}, \quad u(x,y) = 0. \end{cases}$$

Considérons le laplacien en dimension deux,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

et supposons que u soit une fonction C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telle que,

---

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |(\Delta u)(x,y)| \leq |u(x,y)|, \\ \forall x < 0, \forall y \in \mathbb{R}, \quad u(x,y) = 0. \end{cases}$$

La question de Carleman : cela implique-t-il que u est identiquement nulle ?

Considérons le laplacien en dimension deux,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

et supposons que u soit une fonction C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telle que,

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & |(\Delta u)(x,y)| \le |u(x,y)|, \\ \forall x < 0, \forall y \in \mathbb{R}, & u(x,y) = 0. \end{cases}$$

La question de Carleman : cela implique-t-il que u est identiquement nulle ?

En 1938, cette question est complètement ouverte, ceci pour plusieurs raisons.

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |(\Delta u)(x,y)| \le |u(x,y)|, \\ \forall x < 0, \forall y \in \mathbb{R}, \quad u(x,y) = 0. \end{cases}$$

- Tout d'abord u ne vérifie pas une équation, mais une inégalité.

Si vous remplacez la première condition par l'équation $\Delta u = u$, alors il est très facile de conclure : en effet les solutions de cette équation sont des fonctions analytiques réelles (c'est ce que nous dit la théorie elliptique du laplacien) et par conséquent ces fonctions ne peuvent s'annuler sur un ouvert non vide (ici le demi-plan gauche) sans être identiquement nulles, fin de l'argument.

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |(\Delta u)(x,y)| \le |u(x,y)|, \\ \forall x < 0, \forall y \in \mathbb{R}, \quad u(x,y) = 0. \end{cases}$$

• Il y a plus grave : le problème de Cauchy pour le laplacien à partir de l'hypersurface d'équation $x = 0$ est mal posé.

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & |(\Delta u)(x,y)| \le |u(x,y)|, \\ \forall x < 0, \forall y \in \mathbb{R}, & u(x,y) = 0. \end{cases}$$

• Il y a plus grave : le problème de Cauchy pour le laplacien à partir de l'hypersurface d'équation $x = 0$ est mal posé. Cela signifie qu'il n'est pas possible de "contrôler" la solution de $\Delta u = 0$ dans $\{\alpha\} \times \mathbb{R}$ par la valeur de u en $\{0\} \times \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & |(\Delta u)(x,y)| \leq |u(x,y)|, \\ \forall x < 0, \forall y \in \mathbb{R}, & u(x,y) = 0. \end{cases}$$

• Il y a plus grave : le problème de Cauchy pour le laplacien à partir de l'hypersurface d'équation $x = 0$ est mal posé. Cela signifie qu'il n'est pas possible de "contrôler" la solution de $\Delta u = 0$ dans $\{\alpha\} \times \mathbb{R}$ par la valeur de u en $\{0\} \times \mathbb{R}$. Considérons par exemple pour $\lambda > 0$,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{e}^{\lambda \mathbf{x}} \cos(\lambda \mathbf{y}) = \mathrm{Re}\big(\mathbf{e}^{\lambda(\mathbf{x}+i\mathbf{y})}\big).$$

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & |(\Delta u)(x,y)| \le |u(x,y)|, \\ \forall x < 0, \forall y \in \mathbb{R}, & u(x,y) = 0. \end{cases}$$

• Il y a plus grave : le problème de Cauchy pour le laplacien à partir de l'hypersurface d'équation $x = 0$ est mal posé. Cela signifie qu'il n'est pas possible de "contrôler" la solution de $\Delta u = 0$ dans $\{\alpha\} \times \mathbb{R}$ par la valeur de u en $\{0\} \times \mathbb{R}$. Considérons par exemple pour $\lambda > 0$,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{e}^{\lambda \mathbf{x}} \cos(\lambda \mathbf{y}) = \mathrm{Re}\big(\mathbf{e}^{\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{i}\mathbf{y})}\big).$$

Comme u est la partie réelle d'une fonction holomorphe, on a $\Delta u = 0$.

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & |(\Delta u)(x,y)| \le |u(x,y)|, \\ \forall x < 0, \forall y \in \mathbb{R}, & u(x,y) = 0. \end{cases}$$

• Il y a plus grave : le problème de Cauchy pour le laplacien à partir de l'hypersurface d'équation $x = 0$ est mal posé. Cela signifie qu'il n'est pas possible de "contrôler" la solution de $\Delta u = 0$ dans $\{\alpha\} \times \mathbb{R}$ par la valeur de u en $\{0\} \times \mathbb{R}$. Considérons par exemple pour $\lambda > 0$,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{e}^{\lambda \mathbf{x}} \cos(\lambda \mathbf{y}) = \mathrm{Re}\big(\mathbf{e}^{\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{i}\mathbf{y})}\big).$$

Comme u est la partie réelle d'une fonction holomorphe, on a $\Delta u = 0$. Néanmoins, on a

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |u(\alpha, y)| = e^{\lambda\alpha}, \quad \sup_{y \in \mathbb{R}} |u(0, y)| = 1,$$

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & |(\Delta u)(x,y)| \le |u(x,y)|, \\ \forall x < 0, \forall y \in \mathbb{R}, & u(x,y) = 0. \end{cases}$$

• Il y a plus grave : le problème de Cauchy pour le laplacien à partir de l'hypersurface d'équation $x = 0$ est mal posé. Cela signifie qu'il n'est pas possible de "contrôler" la solution de $\Delta u = 0$ dans $\{\alpha\} \times \mathbb{R}$ par la valeur de u en $\{0\} \times \mathbb{R}$. Considérons par exemple pour $\lambda > 0$,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{e}^{\lambda \mathbf{x}} \cos(\lambda \mathbf{y}) = \mathrm{Re}\big(\mathbf{e}^{\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{i}\mathbf{y})}\big).$$

Comme u est la partie réelle d'une fonction holomorphe, on a $\Delta u = 0$. Néanmoins, on a

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |u(\alpha, y)| = e^{\lambda\alpha}, \quad \sup_{y\in\mathbb{R}} |u(0, y)| = 1,$$

de sorte que l'on ne peut espérer pour un $\alpha > 0$,

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |u(\alpha, y)| \le C_0 \sup_{y\in\mathbb{R}} |u(0, y)|$$

qui impliquerait pour tout $\lambda > 0$, $e^{\lambda\alpha} \le C_0$ (absurde).

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & |(\Delta u)(x,y)| \le |u(x,y)|, \\ \forall x < 0, \forall y \in \mathbb{R}, & u(x,y) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |(\Delta u)(x,y)| \le |u(x,y)|, \\ \forall x < 0, \forall y \in \mathbb{R}, \quad u(x,y) = 0. \end{cases}$$

En d'autres termes, la question de Carleman porte sur l'unicité de Cauchy pour une inégalité différentielle reliée à un problème mal posé au sens de Hadamard, une situation non explorée en 1938.

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |(\Delta u)(x,y)| \le |u(x,y)|, \\ \forall x < 0, \forall y \in \mathbb{R}, \quad u(x,y) = 0. \end{cases}$$

En d'autres termes, la question de Carleman porte sur l'unicité de Cauchy pour une inégalité différentielle reliée à un problème mal posé au sens de Hadamard, une situation non explorée en 1938.

A l'époque deux résultats généraux sur les EDP étaient considérés comme les plus importants : le théorème de Cauchy-Kovalevskaya et le théorème d'Holmgren, qui tous deux requièrent une régularité analytique, soit pour les solutions, soit pour les données.

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |(\Delta u)(x,y)| \le |u(x,y)|, \\ \forall x < 0, \forall y \in \mathbb{R}, \quad u(x,y) = 0. \end{cases}$$

En d'autres termes, la question de Carleman porte sur l'unicité de Cauchy pour une inégalité différentielle reliée à un problème mal posé au sens de Hadamard, une situation non explorée en 1938.

A l'époque deux résultats généraux sur les EDP étaient considérés comme les plus importants : le théorème de Cauchy-Kovalevskaya et le théorème d'Holmgren, qui tous deux requièrent une régularité analytique, soit pour les solutions, soit pour les données.

Comment faire ? Carleman va démontrer une inégalité L^2 avec un grand paramètre qui lui permettra de circonvenir l'essentiel des difficultés mentionnées plus haut.

Simplifions un peu et considérons le $2\overline{\partial} = \partial_x + i\partial_y$.

Simplifions un peu et considérons le $2\overline{\partial} = \partial_x + i\partial_y$.
On veut démontrer pour $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\lambda \gg 1$,

$$C\|e^{-\lambda(x-x^2)}\overline{\partial} w\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \geq \lambda^{1/2}\|e^{-\lambda(x-x^2)} w\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Simplifions un peu et considérons le $2\bar\partial = \partial_x + i\partial_y$.
On veut démontrer pour $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\lambda \gg 1$,

$$C\|e^{-\lambda(x-x^2)}\bar\partial w\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \ge \lambda^{1/2}\|e^{-\lambda(x-x^2)}w\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

On pose $w = e^{\lambda(x-x^2)}v$ et cela revient à démontrer pour $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$C\|e^{-\lambda(x-x^2)}\bar\partial e^{\lambda(x-x^2)}v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \ge \lambda^{1/2}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

Simplifions un peu et considérons le $2\overline{\partial} = \partial_x + i\partial_y$.
On veut démontrer pour $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\lambda \gg 1$,

$$C\|e^{-\lambda(x-x^2)}\overline{\partial} w\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \ge \lambda^{1/2}\|e^{-\lambda(x-x^2)} w\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

On pose $w = e^{\lambda(x-x^2)}v$ et cela revient à démontrer pour $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$C\|e^{-\lambda(x-x^2)}\overline{\partial} e^{\lambda(x-x^2)} v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \ge \lambda^{1/2}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

soit

$$C\|\big(\partial_x + i\partial_y + \lambda - 2\lambda x\big)v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \ge \lambda^{1/2}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Simplifions un peu et considérons le $2\overline{\partial} = \partial_x + i\partial_y$.
On veut démontrer pour $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\lambda \gg 1$,

$$C\|e^{-\lambda(x-x^2)}\overline{\partial}w\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \geq \lambda^{1/2}\|e^{-\lambda(x-x^2)}w\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

On pose $w = e^{\lambda(x-x^2)}v$ et cela revient à démontrer pour $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$C\|e^{-\lambda(x-x^2)}\overline{\partial}e^{\lambda(x-x^2)}v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \geq \lambda^{1/2}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

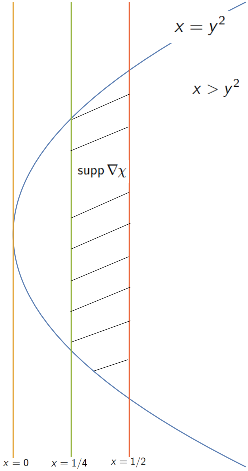
soit

$$C\|\big(\partial_x + i\partial_y + \lambda - 2\lambda x\big)v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \geq \lambda^{1/2}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Or on a

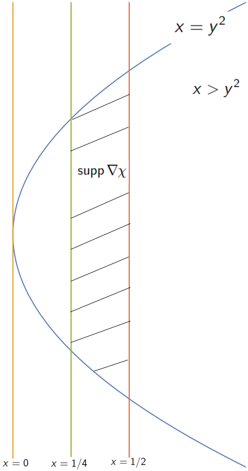
$$\|\big(\underbrace{\partial_x}_{K=-K^*} + \underbrace{i\partial_y + \lambda - 2\lambda x}_{J=J^*}\big)v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \geq \langle [J,K]v, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 2\lambda\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Utilisation des inégalités à poids



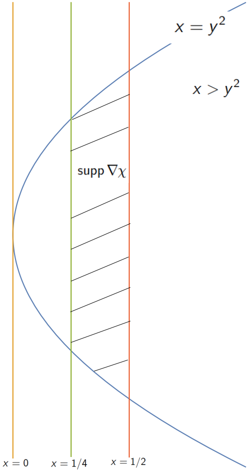
Utilisation des inégalités à poids

On suppose que $|\overline{\partial} u| \le |u|$, $\operatorname{supp} u \subset \{x \ge y^2\}$.



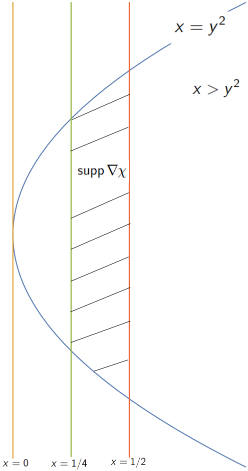
Utilisation des inégalités à poids

On suppose que $|\overline{\partial} u| \leq |u|$, $\operatorname{supp} u \subset \{x \geq y^2\}$. On applique notre inégalité à $w = \chi u$:



$$\lambda^{1/2} \| e^{-\lambda(x-x^2)} \chi u \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \| e^{-\lambda(x-x^2)} \overline{\partial} \chi u \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Utilisation des inégalités à poids



On suppose que $|\bar\partial u| \le |u|$, $\operatorname{supp} u \subset \{x \ge y^2\}$. On applique notre inégalité à $w = \chi u$:

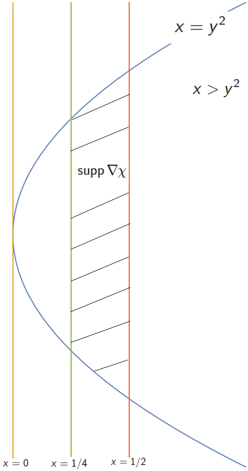
$$\lambda^{1/2}\|e^{-\lambda(x-x^2)}\chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \|e^{-\lambda(x-x^2)}\bar\partial\chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Cela implique

$$\lambda^{1/2}\|e^{-\lambda(x-x^2)}\chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \|e^{-\lambda(x-x^2)}\left[\bar\partial, \chi\right] u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|e^{-\lambda(x-x^2)}\chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

et par suite pour $\lambda \ge 4$,

Utilisation des inégalités à poids



On suppose que $|\overline{\partial} u| \le |u|$, supp $u \subset \{x \ge y^2\}$. On applique notre inégalité à $w = \chi u$:

$$\lambda^{1/2} \|e^{-\lambda(x-x^2)} \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \|e^{-\lambda(x-x^2)} \overline{\partial} \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

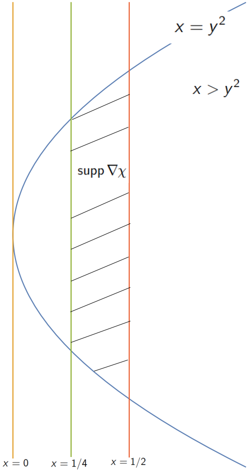
Cela implique

$$\lambda^{1/2} \|e^{-\lambda(x-x^2)} \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \|e^{-\lambda(x-x^2)} \left[\overline{\partial}, \chi\right] u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|e^{-\lambda(x-x^2)} \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

et par suite pour $\lambda \ge 4$,

$$\begin{aligned} \lambda^{1/2} \|e^{-\lambda(x-x^2)} \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\le 2\|e^{-\lambda(x-x^2)} \left[\overline{\partial}, \chi\right] u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\le 2e^{-3\lambda/16} \| \left[\overline{\partial}, \chi\right] u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

Utilisation des inégalités à poids



On suppose que $|\bar{\partial} u| \le |u|$, supp $u \subset \{x \ge y^2\}$. On applique notre inégalité à $w = \chi u$:

$$\lambda^{1/2} \|e^{-\lambda(x-x^2)} \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \|e^{-\lambda(x-x^2)} \bar{\partial} \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Cela implique

$$\lambda^{1/2} \|e^{-\lambda(x-x^2)} \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \|e^{-\lambda(x-x^2)} \left[\bar{\partial}, \chi\right] u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|e^{-\lambda(x-x^2)} \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

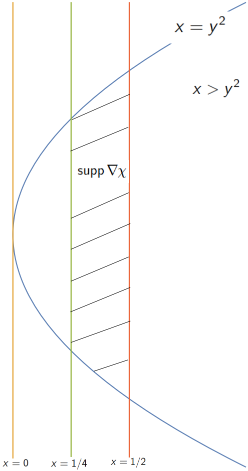
et par suite pour $\lambda \ge 4$,

$$\begin{aligned} \lambda^{1/2} \|e^{-\lambda(x-x^2)} \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\le 2\|e^{-\lambda(x-x^2)} \left[\bar{\partial}, \chi\right] u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\le 2 e^{-3\lambda/16} \| \left[\bar{\partial}, \chi\right] u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

car $x - x^2 = x(1-x) \ge \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{16}$ pour $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

Utilisation des inégalités à poids

On suppose que $|\overline{\partial} u| \leq |u|$, $\operatorname{supp} u \subset \{x \geq y^2\}$. On applique notre inégalité à $w = \chi u$:



$$\lambda^{1/2} \| e^{-\lambda(x-x^2)} \chi u \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \| e^{-\lambda(x-x^2)} \overline{\partial} \chi u \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Cela implique

$$\lambda^{1/2} \| e^{-\lambda(x-x^2)} \chi u \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \| e^{-\lambda(x-x^2)} \left[\overline{\partial}, \chi\right] u \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \| e^{-\lambda(x-x^2)} \chi u \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

et par suite pour $\lambda \geq 4$,

$$\begin{aligned} \lambda^{1/2} \| e^{-\lambda(x-x^2)} \chi u \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq 2 \| e^{-\lambda(x-x^2)} \left[\overline{\partial}, \chi\right] u \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq 2 e^{-3\lambda/16} \| \left[\overline{\partial}, \chi\right] u \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

car $x - x^2 = x(1-x) \geq \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{16}$ pour $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Il vient comme $x - x^2 \leq \frac{1}{8}(1 - \frac{1}{8}) = \frac{7}{64}$ pour $x \in [0, 1/8]$,

$$\begin{aligned} e^{-7\lambda/64} \lambda^{1/2} \| u \|_{L^2(\{0 \leq x \leq \frac{1}{8}\})} &\leq \lambda^{1/2} \| e^{-\lambda(x-x^2)} \chi u \|_{L^2(\{0 \leq x \leq \frac{1}{8}\})} \\ &\leq 2 e^{-12\lambda/64} \| \left[\overline{\partial}, \chi\right] u \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

2. Les résultats de Calderón et Hörmander

Les caractéristiques simples

2. Les résultats de Calderón et Hörmander

Les caractéristiques simples

Considérons ici et pour la suite un opérateur différentiel d'ordre deux sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$,

$$P = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D_x^\alpha,$$

2. Les résultats de Calderón et Hörmander

Les caractéristiques simples

Considérons ici et pour la suite un opérateur différentiel d'ordre deux sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$,

$$P = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D_x^\alpha,$$

où les coefficients a_α sont $C^2(\Omega)$ et réels si $|\alpha| = 2$, et seulement L^∞_{loc} et à valeurs complexes si $|\alpha| \leq 1$.

2. Les résultats de Calderón et Hörmander

Les caractéristiques simples

Considérons ici et pour la suite un opérateur différentiel d'ordre deux sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$,

$$P = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D_x^\alpha,$$

où les coefficients a_α sont $C^2(\Omega)$ et réels si $|\alpha| = 2$, et seulement L^∞_{loc} et à valeurs complexes si $|\alpha| \leq 1$. On se donne également une *hypersurface initiale* Σ (qui correspond à $t = 0$ lorsque t est une variable de temps dans une équation d'évolution).

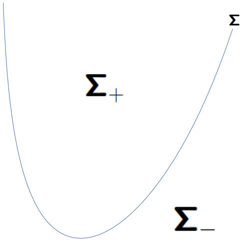
2. Les résultats de Calderón et Hörmander

Les caractéristiques simples

Considérons ici et pour la suite un opérateur différentiel d'ordre deux sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$,

$$P = \sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(x) D_x^\alpha,$$

où les coefficients a_α sont $C^2(\Omega)$ et réels si $|\alpha| = 2$, et seulement L^∞_{loc} et à valeurs complexes si $|\alpha| \le 1$. On se donne également une *hypersurface initiale* Σ (qui correspond à $t = 0$ lorsque t est une variable de temps dans une équation d'évolution).



Σ est l'hypersurface initiale,
Σ_+ est le futur, Σ_- est le passé,

On cherche une condition géométrique qui assure que

$$\left.\begin{array}{r} Pu = 0 \\ u_{\Sigma_-} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow u = 0$$

$$P = \sum_{|\alpha| \le 2} a_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad \Sigma \equiv \phi(x) = 0, \quad \Sigma_+ \equiv \phi(x) > 0, \quad \Sigma_- \equiv \phi(x) < 0$$

$$P = \sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad \Sigma \equiv \phi(x) = 0, \quad \Sigma_+ \equiv \phi(x) > 0, \quad \Sigma_- \equiv \phi(x) < 0$$

Le symbole principal de l'opérateur est

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \quad \xi^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} = \xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

$$P=\sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(x)D_x^\alpha,\quad \Sigma\equiv\phi(x)=0,\quad \Sigma_+\equiv\phi(x)>0,\quad \Sigma_-\equiv\phi(x)<0$$

Le symbole principal de l'opérateur est

$$p(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha,\quad \xi^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}=\xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_n^{\alpha_n},\quad |\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n.$$

Il s'agit d'un polynôme de n variables en ξ à coefficients C^2 en x. Le champ hamiltonien de p est un champ de vecteurs dans $T^*(\Omega)=\Omega_x\times\mathbb{R}^n_\xi$ défini par

$$H_p=\sum_{1\le j\le n}\left(\frac{\partial p}{\partial\xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right),$$

ses courbes intégrales s'appellent les courbes bicaractéristiques de p.

$$P = \sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad \Sigma \equiv \phi(x) = 0, \quad \Sigma_+ \equiv \phi(x) > 0, \quad \Sigma_- \equiv \phi(x) < 0$$

Le symbole principal de l'opérateur est

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \quad \xi^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} = \xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Il s'agit d'un polynôme de n variables en ξ à coefficients C^2 en x. Le champ hamiltonien de p est un champ de vecteurs dans $T^*(\Omega) = \Omega_x \times \mathbb{R}^n_\xi$ défini par

$$H_p = \sum_{1\le j\le n} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j} \right),$$

ses courbes intégrales s'appellent les courbes bicaractéristiques de p. Ce sont des courbes $t \mapsto (x(t),\xi(t))$ tracées dans $T^*(\Omega)$ définies par le système d'EDO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \frac{\partial p}{\partial \xi}(x(t),\xi(t)), \\ \dot{\xi}(t) &= -\frac{\partial p}{\partial x}(x(t),\xi(t)). \end{cases}$$

$$P = \sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad \Sigma \equiv \phi(x) = 0, \quad \Sigma_+ \equiv \phi(x) > 0, \quad \Sigma_- \equiv \phi(x) < 0$$

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \qquad H_p = \sum_{1\le j\le n} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j} \right),$$

$$P = \sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad \Sigma \equiv \phi(x) = 0, \quad \Sigma_+ \equiv \phi(x) > 0, \quad \Sigma_- \equiv \phi(x) < 0$$

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \qquad H_p = \sum_{1\le j\le n} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j} \right),$$

On supposera toujours que Σ est non caractéristique, i.e. $p(x, d\phi(x)) \neq 0$ pour $x \in \Sigma$.

$$P=\sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(x)D_x^\alpha,\quad \Sigma\equiv\phi(x)=0,\quad \Sigma_+\equiv\phi(x)>0,\quad \Sigma_-\equiv\phi(x)<0$$

$$p(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha,\qquad H_p=\sum_{1\le j\le n}\left(\frac{\partial p}{\partial\xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right),$$

On supposera toujours que Σ est non caractéristique, i.e. $p(x,d\phi(x))\neq 0$ pour $x\in\Sigma$.

Théorème (Alberto Calderón, 1959)

Soient P,Σ comme ci-dessus. On suppose que les courbes bicaractéristiques nulles de P sont transverses à Σ. Alors

$$\left.\begin{aligned} Pu&=0\\ u_{\Sigma_-}&=0\end{aligned}\right\}\Longrightarrow u=0.$$

$$P=\sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(x)D_x^\alpha, \quad \Sigma\equiv\phi(x)=0, \quad \Sigma_+\equiv\phi(x)>0, \quad \Sigma_-\equiv\phi(x)<0$$

$$p(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \qquad H_p=\sum_{1\le j\le n}\left(\frac{\partial p}{\partial\xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right),$$

On supposera toujours que Σ est non caractéristique, i.e. $p(x,d\phi(x))\neq 0$ pour $x\in\Sigma$.

Théorème (Alberto Calderón, 1959)

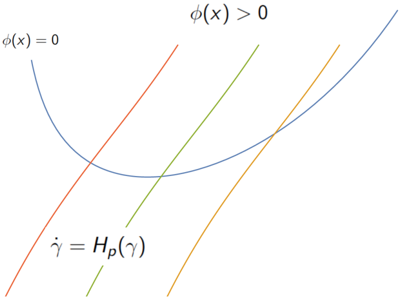
Soient P,Σ comme ci-dessus. On suppose que les courbes bicaractéristiques nulles de P sont transverses à Σ. Alors

$$\left.\begin{aligned} Pu&=0\\ u_{\Sigma_-}&=0\end{aligned}\right\}\Longrightarrow u=0.$$

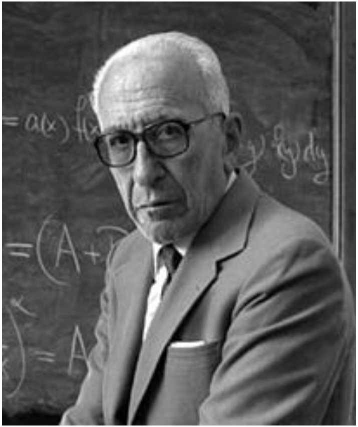
L'hypothèse s'écrit

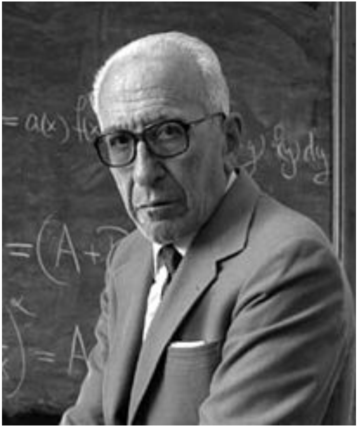
$$\phi(x)=p(x,\xi)=0,\xi\neq 0\Longrightarrow H_p(\phi)(x,\xi)\neq 0.$$

et se dessine comme

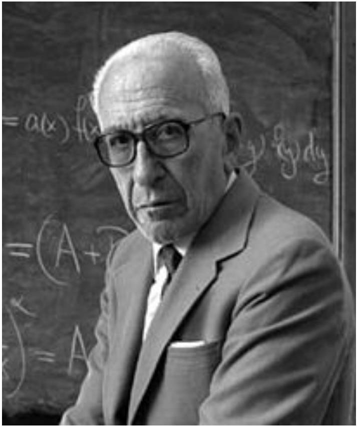


Les courbes bicaractéristiques nulles sont transverses à l'hypersurface initiale.


$=a(x)f(x)$
$=(A+$
$=A$



Alberto Calderón (1920-1998), fondateur avec A. Zygmund de la théorie des intégrales singulières a obtenu un résultat d'analyse locale (d'unicité de Cauchy) très général en utilisant la méthode de Carleman et des outils pseudo-différentiels.



Alberto Calderón (1920-1998), fondateur avec A. Zygmund de la théorie des intégrales singulières a obtenu un résultat d'analyse locale (d'unicité de Cauchy) très général en utilisant la méthode de Carleman et des outils pseudo-différentiels.

Son théorème permet en particulier de traiter les cas des opérateurs elliptiques du second ordre, des opérateurs strictement hyperboliques. Un théorème d'énoncé très simple avec un champ d'applications très vaste.

La pseudo-convexité d'Hörmander

Restons dans le cadre précédent :

La pseudo-convexité d'Hörmander

Restons dans le cadre précédent :

$$P = \sum_{|\alpha| \le 2} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

est un opérateur différentiel d'ordre deux sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, $a_\alpha \in C^2(\Omega)$ à valeurs réelles pour $|\alpha| = 2$, $a_\alpha \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{C})$ pour $|\alpha| \le 1$.

La pseudo-convexité d'Hörmander

Restons dans le cadre précédent :

$$P = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

est un opérateur différentiel d'ordre deux sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, $a_\alpha \in C^2(\Omega)$ à valeurs réelles pour $|\alpha| = 2$, $a_\alpha \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{C})$ pour $|\alpha| \leq 1$. On se donne une hypersurface orientée

$$\Sigma \equiv \phi(x) = 0, \quad p(x, d\phi(x)) \neq 0 \quad \text{non caractéristique pour } P.$$

Le théorème de Calderón fournit un résultat d'unicité de Cauchy par rapport à Σ sous une condition géométrique de caractéristiques simples.

La pseudo-convexité d'Hörmander

Restons dans le cadre précédent :

$$P = \sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

est un opérateur différentiel d'ordre deux sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, $a_\alpha \in C^2(\Omega)$ à valeurs réelles pour $|\alpha| = 2$, $a_\alpha \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{C})$ pour $|\alpha| \le 1$. On se donne une hypersurface orientée

$$\Sigma \equiv \phi(x) = 0, \quad p(x, d\phi(x)) \neq 0 \quad \text{non caractéristique pour } P.$$

Le théorème de Calderón fournit un résultat d'unicité de Cauchy par rapport à Σ sous une condition géométrique de caractéristiques simples.

Le théorème de pseudo-convexité d'Hörmander nous dit que l'on peut accepter des bicaractéristiques tangentes à Σ pourvu qu'elles aient un contact d'ordre 2 avec Σ et soient tournées vers Σ_-.

La pseudo-convexité d'Hörmander

Restons dans le cadre précédent :

$$P = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

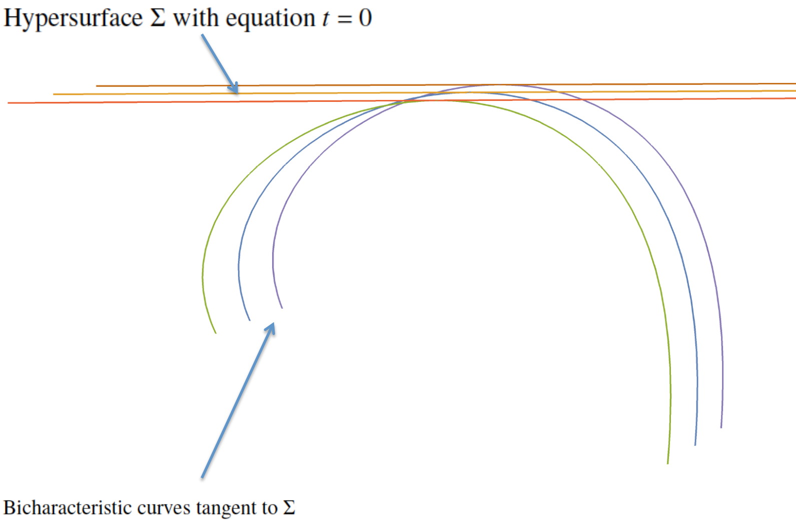
est un opérateur différentiel d'ordre deux sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, $a_\alpha \in C^2(\Omega)$ à valeurs réelles pour $|\alpha| = 2$, $a_\alpha \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{C})$ pour $|\alpha| \leq 1$. On se donne une hypersurface orientée

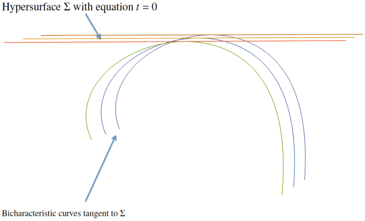
$$\Sigma \equiv \phi(x) = 0, \quad p(x, d\phi(x)) \neq 0 \quad \text{non caractéristique pour } P.$$

Le théorème de Calderón fournit un résultat d'unicité de Cauchy par rapport à Σ sous une condition géométrique de caractéristiques simples.

Le théorème de pseudo-convexité d'Hörmander nous dit que l'on peut accepter des bicaractéristiques tangentes à Σ pourvu qu'elles aient un contact d'ordre 2 avec Σ et soient tournées vers Σ_-.

Commençons par un dessin.


Hypersurface Σ with equation $t = 0$
Bicharacteristic curves tangent to Σ



L'hypothèse de pseudo-convexité s'écrit pour $\xi \neq 0$,

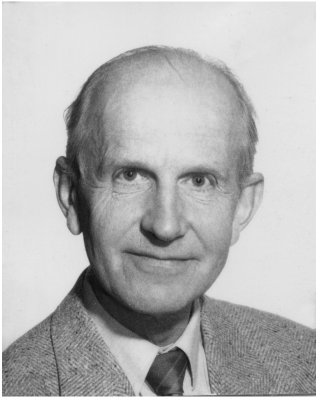
$$\phi(x) = p(x, \xi) = H_p(\phi)(x, \xi) = 0$$

$$\Longrightarrow H_p^2(\phi)(x, \xi) < 0.$$

Théorème (Lars Hörmander, 1959)

Soient P, Σ comme ci-dessus. On suppose que l'hypersurface orientée Σ est strictement pseudo-convexe par rapport à P. Alors

$$\left.\begin{aligned} Pu &= 0 \\ u_{\Sigma_-} &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow u = 0.$$



Lars Hörmander (1931–2012), mathématicien suédois, lauréat de la médaille Fields en 1962, a introduit la notion d'hypersurface pseudo-convexe par rapport à un opérateur, fournissant une extension significative du théorème d'unicité d'A. Calderón.

Un des plus grands mathématiciens du vingtième siècle, il est notamment l'auteur d'un traité monumental en quatre volumes, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, publié en 1983-85.

Méthodes de démonstration

Il s'agit de démontrer, disons pour un opérateur d'ordre 2 satisfaisant aux hypothèses précédentes, et pour $w \in C_c^\infty(\Omega)$, une estimation de Carleman

Méthodes de démonstration

Il s'agit de démontrer, disons pour un opérateur d'ordre 2 satisfaisant aux hypothèses précédentes, et pour $w \in C_c^\infty(\Omega)$, une estimation de Carleman

$$(\sharp) \qquad C\|e^{-\lambda\phi}Pw\|_{L^2} \ge \lambda^{1/2}\|e^{-\lambda\phi}\nabla w\|_{L^2} + \lambda^{3/2}\|e^{-\lambda\phi}w\|_{L^2}, \quad \lambda \gg 1.$$

Méthodes de démonstration

Il s'agit de démontrer, disons pour un opérateur d'ordre 2 satisfaisant aux hypothèses précédentes, et pour $w \in C_c^\infty(\Omega)$, une estimation de Carleman

$$(\sharp) \qquad C\|e^{-\lambda\phi}Pw\|_{L^2} \geq \lambda^{1/2}\|e^{-\lambda\phi}\nabla w\|_{L^2} + \lambda^{3/2}\|e^{-\lambda\phi}w\|_{L^2}, \quad \lambda \gg 1.$$

On pose $w = e^{\lambda\phi}v$, on remarque que

$$e^{-\lambda\phi}Pw = P\big(x, D_x - i\lambda d\phi(x)\big)v,$$

et l'estimation $(\sharp)$ découle essentiellement de propriétés de sous-ellipticité de l'opérateur pseudo-différentiel de symbole

Méthodes de démonstration

Il s'agit de démontrer, disons pour un opérateur d'ordre 2 satisfaisant aux hypothèses précédentes, et pour $w \in C_c^\infty(\Omega)$, une estimation de Carleman

$$(\sharp) \qquad C\|e^{-\lambda\phi}Pw\|_{L^2} \geq \lambda^{1/2}\|e^{-\lambda\phi}\nabla w\|_{L^2} + \lambda^{3/2}\|e^{-\lambda\phi}w\|_{L^2}, \quad \lambda \gg 1.$$

On pose $w = e^{\lambda\phi}v$, on remarque que

$$e^{-\lambda\phi}Pw = P\big(x, D_x - i\lambda d\phi(x)\big)v,$$

et l'estimation $(\sharp)$ découle essentiellement de propriétés de sous-ellipticité de l'opérateur pseudo-différentiel de symbole

$$a(x,\xi,\eta) = p\big(x, \xi - i\eta d\phi(x)\big), \quad x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n, \eta > 0.$$

Méthodes de démonstration

Il s'agit de démontrer, disons pour un opérateur d'ordre 2 satisfaisant aux hypothèses précédentes, et pour $w \in C_c^\infty(\Omega)$, une estimation de Carleman

$$(\sharp) \qquad C\|e^{-\lambda\phi}Pw\|_{L^2} \geq \lambda^{1/2}\|e^{-\lambda\phi}\nabla w\|_{L^2} + \lambda^{3/2}\|e^{-\lambda\phi}w\|_{L^2}, \quad \lambda \gg 1.$$

On pose $w = e^{\lambda\phi}v$, on remarque que

$$e^{-\lambda\phi}Pw = P\big(x, D_x - i\lambda d\phi(x)\big)v,$$

et l'estimation $(\sharp)$ découle essentiellement de propriétés de sous-ellipticité de l'opérateur pseudo-différentiel de symbole

$$a(x,\xi,\eta) = p\big(x, \xi - i\eta d\phi(x)\big), \quad x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n, \eta > 0.$$

Il s'agit en fait d'examiner les propriétés du crochet de Poisson

$$\{\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a\} \qquad \text{en } a = 0.$$

3. Quelques développements plus récents

Continuation unique

3. Quelques développements plus récents

Continuation unique

Théorème (D. Jerison & C. Kenig, 1985)

Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ et $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, $p = \frac{2n}{n+2}$ tels que pour $V \in L^{n/2}_{loc}(\Omega)$ on ait

$$|\Delta u| \leq |Vu| \qquad \textit{(inégalité différentielle)},$$

$$\forall N \in \mathbb{N}, \int_{|x-x_0|\leq\rho} |u(x)|^p dx = O(\rho^N) \text{ pour } \rho \to 0_+ \text{ (}u\text{ plate en }x_0\text{)}.$$

Alors u s'annule sur Ω.

3. Quelques développements plus récents

Continuation unique

Théorème (D. Jerison & C. Kenig, 1985)

Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ et $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, $p = \frac{2n}{n+2}$ tels que pour $V \in L^{n/2}_{loc}(\Omega)$ on ait

$$|\Delta u| \leq |Vu| \qquad \textit{(inégalité différentielle)},$$

$$\forall N \in \mathbb{N}, \int_{|x-x_0|\leq\rho} |u(x)|^p dx = O(\rho^N) \text{ pour } \rho \to 0_+ \ (u \text{ plate en } x_0).$$

Alors u s'annule sur Ω.

• En d'autres termes, pour obtenir l'annulation d'une solution u de l'inégalité différentielle elliptique ci-dessus, il suffit de supposer que u est plate en un point.

3. Quelques développements plus récents

Continuation unique

Théorème (D. Jerison & C. Kenig, 1985)

Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ et $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, $p = \frac{2n}{n+2}$ tels que pour $V \in L^{n/2}_{loc}(\Omega)$ on ait

$$|\Delta u| \leq |Vu| \qquad \textit{(inégalité différentielle)},$$

$$\forall N \in \mathbb{N}, \int_{|x-x_0|\leq\rho} |u(x)|^p dx = O(\rho^N) \text{ pour } \rho \to 0_+ \ (u \text{ plate en } x_0).$$

Alors u s'annule sur Ω.

• En d'autres termes, pour obtenir l'annulation d'une solution u de l'inégalité différentielle elliptique ci-dessus, il suffit de supposer que u est plate en un point.

• Le potentiel V est singulier et l'indice $n/2$ est optimal (ici $n \geq 3$) : le résultat est faux pour $V \in L^{\frac{n}{2}-\varepsilon}$.

Le théorème précédent est une conséquence de l'inégalité de Carleman suivante.

Le théorème précédent est une conséquence de l'inégalité de Carleman suivante.

Théorème

Pour $n \geq 3$, il existe c_n telle que pour $\lambda \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}^*$, $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$

$$\||x|^{-\lambda} v\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n, \frac{dx}{|x|^n})} \leq c_n \||x|^{2-\lambda} \Delta v\|_{L^p(\mathbb{R}^n, \frac{dx}{|x|^n})},$$

avec $p = \frac{2n}{n+2}$, $p' = \frac{2n}{n-2}$.

Le théorème précédent est une conséquence de l'inégalité de Carleman suivante.

Théorème

Pour $n \geq 3$, il existe c_n telle que pour $\lambda \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}^*$, $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$

$$\| |x|^{-\lambda} v \|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n, \frac{dx}{|x|^n})} \leq c_n \| |x|^{2-\lambda} \Delta v \|_{L^p(\mathbb{R}^n, \frac{dx}{|x|^n})},$$

avec $p = \frac{2n}{n+2}, p' = \frac{2n}{n-2}$.

- Estimation optimale : $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{n+2-(n-2)}{2n} = \frac{2}{n} = \frac{\text{deux dérivées}}{\text{dimension}}$.

Le théorème précédent est une conséquence de l'inégalité de Carleman suivante.

Théorème

Pour $n \geq 3$, il existe c_n telle que pour $\lambda \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}^*$, $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$

$$\| |x|^{-\lambda} v \|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n, \frac{dx}{|x|^n})} \leq c_n \| |x|^{2-\lambda} \Delta v \|_{L^p(\mathbb{R}^n, \frac{dx}{|x|^n})},$$

avec $p = \frac{2n}{n+2}, p' = \frac{2n}{n-2}$.

- Estimation optimale : $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{n+2-(n-2)}{2n} = \frac{2}{n} = \frac{\text{deux dérivées}}{\text{dimension}}$.
- Le grand paramètre λ tend vers $+\infty$ dans un ensemble discret.

Le théorème précédent est une conséquence de l'inégalité de Carleman suivante.

Théorème

Pour $n \geq 3$, il existe c_n telle que pour $\lambda \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}^*$, $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$

$$\| |x|^{-\lambda} v \|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n, \frac{dx}{|x|^n})} \leq c_n \| |x|^{2-\lambda} \Delta v \|_{L^p(\mathbb{R}^n, \frac{dx}{|x|^n})},$$

avec $p = \frac{2n}{n+2}, p' = \frac{2n}{n-2}$.

- Estimation optimale : $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{n+2-(n-2)}{2n} = \frac{2}{n} = \frac{\text{deux dérivées}}{\text{dimension}}$.
- Le grand paramètre λ tend vers $+\infty$ dans un ensemble discret.
- Il s'agit d'une inégalité $L^p - L^{p'}$, inaccessible par les méthodes hilbertiennes rapidement décrites plus haut.

La démonstration de l'estimation précédente est un grand exploit mathématique de D. Jerison & C. Kenig ; leur argument initial était basé sur une analyse précise des normes L^p sur la sphère des fonctions de Bessel sphériques.

La démonstration de l'estimation précédente est un grand exploit mathématique de D. Jerison & C. Kenig ; leur argument initial était basé sur une analyse précise des normes L^p sur la sphère des fonctions de Bessel sphériques.

Un argument plus général et plus conceptuel a été donné par C. Sogge en 1990 :

La démonstration de l'estimation précédente est un grand exploit mathématique de D. Jerison & C. Kenig ; leur argument initial était basé sur une analyse précise des normes L^p sur la sphère des fonctions de Bessel sphériques.

Un argument plus général et plus conceptuel a été donné par C. Sogge en 1990 :

Théorème (C. Sogge, 1990)

Soit $n \geq 3$. Il existe c_n tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $w \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$,

$$\|\mathbb{P}_k w\|_{L^{p'}(\mathbb{S}^{n-1})} \leq c_n \|w\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} k^{1-\frac{2}{n}}, \qquad p = \frac{2n}{n+2}, p' = \frac{2n}{n-2},$$

où $\mathbb{P}_k$ est la projection orthogonale dans $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ sur l'espace des harmoniques sphériques de degré k.

Estimations de Brenner-Strichartz et inégalités de Carleman.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$), P un opérateur différentiel d'ordre 2 sur Ω et $\Sigma \equiv \phi(x) = 0$ une hypersurface non caractéristique pour P tels que l'hypothèse de caractéristiques simples soit vérifiée : les courbes bicaractéristiques nulles sont transverses à Σ. On se donne un point $x_0 \in \Sigma$.

Le théorème de Calderón parmet par des méthodes L^2 de démontrer un résultat d'unicité, par exemple pour $P(x, D_x) + V(x)$ avec $V \in L^\infty_{\text{loc}}$. Que se passe-t-il pour un potentiel singulier, e.g. $V \in L^{n/2}_{\text{loc}}$?

On introduit une **hypothèse de courbure** : la courbure de Gauss homogène de

$$S_{x_0} = \{(\xi, \eta) \in T^*(\Omega) \times [0, +\infty), p(x_0, \xi - i\eta\nu_0) = 0\}$$

ne s'annule pas. Alors on peut démontrer une inégalité de Carleman

$$C\|e^{-\lambda\phi} Pw\|_{L^{2n/(n+2)}(\mathbb{R}^n)} \geq \|e^{-\lambda\phi} w\|_{L^{2n/(n-2)}(\mathbb{R}^n)},$$

pour $w \in C_c^\infty(V_0)$, où V_0 est un voisinage de x_0.

Théorème

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, P un opérateur différentiel d'ordre 2 sur Ω et Σ une hypersurface non caractéristique pour P tels que l'hypothèse de caractéristiques simples soit vérifiée, $x_0 \in \Omega$. On suppose que la courbure de Gauss homogène de

$$S_{x_0} = \{(\xi, \eta) \in T^*(\Omega) \times [0, +\infty), p(x_0, \xi - i\eta\nu_0) = 0\}$$

ne s'annule pas. Soit $u \in W^{2n/(n+2)}_{loc}(\Omega)$ vérifiant l'inégalité

$$|Pu| \leq |Vu|, \quad V \in L^{n/2}_{loc}(\Omega), \qquad \operatorname{supp} u \subset \Sigma_+.$$

Alors u est nulle au voisinage de x_0.

Ce type de résultat et plusieurs généralisations aux cas pseudo-convexes au sens de Hörmander ont été traités dans des articles de D. Tataru (1996), D. Dos Santos Ferreira (2004),(2005), H. Koch & D. Tataru (2005).

Théorie spectrale.

Théorème

Soit V une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^n$ telle que $|V(x)| \leq C|x|^{-1}$ et soit u une solution de

$$-\Delta u + Vu = Eu, \quad E > 0.$$

Si $(1+|x|)^N \partial_x^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout N et $|\alpha| \leq 1$, alors $u = 0$.

En d'autres termes, pour l'opérateur autoadjoint $-\Delta + V$, il n'y a pas de valeurs propres plongées dans le spectre continu.

Si $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifie $|V(x)| \le C|x|^{-1}$, pour l'opérateur autoadjoint $-\Delta + V$, il n'y a pas de valeurs propres plongées dans le spectre continu. Ce résultat est une conséquence presque immédiate de l'inégalité de Carleman suivante.

Pour $\lambda > 0, E > 0, u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$,

$$2\sqrt{E\lambda}\||x|^\lambda u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \||x|^{\lambda+1}(\Delta + E)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Ce résultat de théorie spectrale, tel qu'énoncé plus haut, est dû à L. Hörmander et a été étendu par plusieurs auteurs, notamment par A. Ionescu & D. Jerison en 2003.

Quelques références bibliographiques.

Lars Hörmander, Linear partial differential operators,
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 116, Springer Verlag, **1963.**
`Chapter VIII, Differential operators with simple characteristics`

Quelques références bibliographiques.

Lars Hörmander, **Linear partial differential operators,**
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 116, Springer Verlag, **1963.**
`Chapter VIII, Differential operators with simple characteristics`

——————, **The analysis of linear partial differential operators. II. Differential Operators with Constant Coefficients,** Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 274, Springer Verlag, **1985.**
`Chapter XIV, Scattering theory`

Quelques références bibliographiques.

Lars Hörmander, Linear partial differential operators,
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 116, Springer Verlag, **1963.**
`Chapter VIII, Differential operators with simple characteristics`

———————, **The analysis of linear partial differential operators. II. Differential Operators with Constant Coefficients,** Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 274, Springer Verlag, **1985.**
`Chapter XIV, Scattering theory`

———————, **The analysis of linear partial differential operators. III. Pseudo-differential operators,**
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 274, Springer Verlag, **1985.**
`Chapter XVII, Second order elliptic operators`

Quelques références bibliographiques.

Lars Hörmander, Linear partial differential operators,
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 116, Springer Verlag, **1963.**
`Chapter VIII, Differential operators with simple characteristics`

————————, **The analysis of linear partial differential operators. II. Differential Operators with Constant Coefficients,** Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 274, Springer Verlag, **1985.**
`Chapter XIV, Scattering theory`

————————, **The analysis of linear partial differential operators. III. Pseudo-differential operators,**
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 274, Springer Verlag, **1985.**
`Chapter XVII, Second order elliptic operators`

————————, **The analysis of linear partial differential operators. IV. Fourier Integral Operators**,
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 275, Springer Verlag, **1985.**
`Chapter XXVIII, Uniqueness for the Cauchy problem`

Quelques références bibliographiques.

Lars Hörmander, Linear partial differential operators,
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 116, Springer Verlag, **1963.**
`Chapter VIII, Differential operators with simple characteristics`

————————, **The analysis of linear partial differential operators. II. Differential Operators with Constant Coefficients,** Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 274, Springer Verlag, **1985.**
`Chapter XIV, Scattering theory`

————————, **The analysis of linear partial differential operators. III. Pseudo-differential operators,**
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 274, Springer Verlag, **1985.**
`Chapter XVII, Second order elliptic operators`

————————, **The analysis of linear partial differential operators. IV. Fourier Integral Operators**,
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 275, Springer Verlag, **1985.**
`Chapter XXVIII, Uniqueness for the Cauchy problem`

Mourad Bellassoued & Masahiro Yamamoto, Carleman estimates and applications to inverse problems for hyperbolic systems, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, **2017.**

Quelques références bibliographiques.

Lars Hörmander, **Linear partial differential operators,**
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 116, Springer Verlag, **1963.**
`Chapter VIII, Differential operators with simple characteristics`

——————, **The analysis of linear partial differential operators. II. Differential Operators with Constant Coefficients,** Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 274, Springer Verlag, **1985.**
`Chapter XIV, Scattering theory`

——————, **The analysis of linear partial differential operators. III. Pseudo-differential operators,**
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 274, Springer Verlag, **1985.**
`Chapter XVII, Second order elliptic operators`

——————, **The analysis of linear partial differential operators. IV. Fourier Integral Operators**,
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 275, Springer Verlag, **1985.**
`Chapter XXVIII, Uniqueness for the Cauchy problem`

Mourad Bellassoued & Masahiro Yamamoto, **Carleman estimates and applications to inverse problems for hyperbolic systems**, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, **2017.**

Nicolas Lerner, **Carleman Inequalities : an Introduction and More,**
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 353, Springer Verlag, **2019.**

Quelques références bibliographiques.

Lars Hörmander, Linear partial differential operators,
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 116, Springer Verlag, **1963.**
`Chapter VIII, Differential operators with simple characteristics`

————————, **The analysis of linear partial differential operators. II. Differential Operators with Constant Coefficients,** Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 274, Springer Verlag, **1985.**
`Chapter XIV, Scattering theory`

————————, **The analysis of linear partial differential operators. III. Pseudo-differential operators,**
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 274, Springer Verlag, **1985.**
`Chapter XVII, Second order elliptic operators`

————————, **The analysis of linear partial differential operators. IV. Fourier Integral Operators**,
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 275, Springer Verlag, **1985.**
`Chapter XXVIII, Uniqueness for the Cauchy problem`

Mourad Bellassoued & Masahiro Yamamoto, Carleman estimates and applications to inverse problems for hyperbolic systems, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, **2017.**

Nicolas Lerner, Carleman Inequalities : an Introduction and More,
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften # 353, Springer Verlag, **2019.**

Merci pour votre attention.

Démontrons l'inégalité de Carleman : pour $(a_j)_{j\ge 1}$ réels positifs ou nuls, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_1\dots a_n)^{1/n}\le e\sum_{n=1}^{+\infty}a_n. \tag{1}$$

On pose pour $k\ge 1$, $c_k=(k+1)^k k^{-k+1}$ et on remarque que

$$\prod_{1\le k\le n}c_k=\Big(\prod_{2\le j\le n+1}j^{j-1}\Big)\Big(\prod_{1\le k\le n}k^{k-1}\Big)^{-1}=(n+1)^n,$$

et par conséquent, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_1\dots a_n)^{1/n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\prod_{1\le k\le n}(a_kc_k)^{1/n}\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{n}(a_kc_k)$$

$$=\sum_{k\ge 1}a_k\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k k\sum_{n\ge k}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{k\ge 1}a_k\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k.$$

On a également, grâce à la stricte concavité du logarithme, $\operatorname{Log}(1+x)<x$ pour $x>0$ et donc pour $k\ge 1$, $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<e$, ce qui implique (1). Par ailleurs l'inégalité (1) est stricte sauf si tous les a_j sont nuls. Supposons que cela soit le cas ; alors, on a

$$\sum_{k\ge 1}a_k\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k=\sum_{k\ge 1,a_k>0}a_k\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k<\sum_{k\ge 1}a_ke,\quad\text{ce qui donne le résultat.}$$

On peut démontrer également que e est la meilleure constante possible dans (1). En effet choisissons $N \geq 1$ et $a_n = 1/n$ pour $1 \leq n \leq N$, $a_n = 0$ sinon. Il vient avec $\lim_n \varepsilon_n = 0$,

$$Q_N = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} (a_1 \ldots a_n)^{1/n}}{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n} = \frac{\sum_{n=1}^{N} (n!)^{-1/n}}{\sum_{n=1}^{N} 1/n} = e\frac{\sum_{n=1}^{N} (1/n)(1+\varepsilon_n)}{\sum_{n=1}^{N} 1/n}.$$

Soit $\sigma \in (0,1)$ tel que $\varepsilon_n \geq -\sigma$ pour $n \geq N_\sigma$. On a pour $N \geq N_\sigma$,

$$e \geq Q_N \geq e(1-\sigma)\frac{\sum_{N_\sigma \leq n \leq N} 1/n}{\sum_{1 \leq n \leq N} 1/n} \Longrightarrow \liminf_N Q_N \geq e(1-\sigma) = e(1-\sigma) \lim_{N \to +\infty} \frac{\sum_{N_\sigma \leq n \leq N} 1/n}{\sum_{1 \leq n \leq N} 1/n},$$

et donc pour tout $\sigma \in (0,1)$,

$$e(1-\sigma) \leq \liminf_N Q_N \leq \limsup_N Q_N \leq e,$$

ce qui implique $\lim_N Q_N = e$ et prouve l'optimalité de la constante e dans (1).