Forte instabilité des solutions kovalevskiennes de systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Nicolas Lerner
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Colloquium de mathématiques
Université de Versailles
mardi 1er octobre, 15:30 – 16:30

1. Le théorème de Cauchy-Kovalevskaya

1. Le théorème de Cauchy-Kovalevskaya

Un énoncé. On considère le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$ (t est le temps et x est la variable d'espace)

$$\begin{cases} \partial_t^m u = F\big(t, x, (\partial_t^k \partial_x^\alpha u)_{|\alpha|+k\leq m, k<m}\big), \\ (\partial_t^j u)(0,x) = v_j(x), \quad 0 \leq j < m. \end{cases} \tag{CK}$$

1. Le théorème de Cauchy-Kovalevskaya

Un énoncé. On considère le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$ (t est le temps et x est la variable d'espace)

$$\begin{cases} \partial_t^m u = F\big(t, x, (\partial_t^k \partial_x^\alpha u)_{|\alpha|+k \leq m, k<m}\big), \\ (\partial_t^j u)(0,x) = v_j(x), \quad 0 \leq j < m. \end{cases} \tag{CK}$$

Théorème. Soit F une fonction analytique dans un voisinage de $(0, x_0, y_0) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}^N$ avec $y_0 = \big((\partial_x^\alpha v_k)(x_0)\big)_{|\alpha|+k\leq m, k<m}$ et soient $(v_j)_{0\leq j<m}$ des fonctions analytiques au voisinage de x_0. Alors il existe un voisinage de $(0, x_0)$ sur lequel le problème (CK) possède une unique solution analytique.

1. Le théorème de Cauchy-Kovalevskaya

Un énoncé. On considère le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$ (t est le temps et x est la variable d'espace)

$$\begin{cases} \partial_t^m u = F\big(t, x, (\partial_t^k \partial_x^\alpha u)_{|\alpha|+k \le m, k<m}\big), \\ (\partial_t^j u)(0,x) = v_j(x), \quad 0 \le j < m. \end{cases} \tag{CK}$$

Théorème. Soit F une fonction analytique dans un voisinage de $(0, x_0, y_0) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}^N$ avec $y_0 = \big((\partial_x^\alpha v_k)(x_0)\big)_{|\alpha|+k \le m, k<m}$ et soient $(v_j)_{0 \le j < m}$ des fonctions analytiques au voisinage de x_0. Alors il existe un voisinage de $(0, x_0)$ sur lequel le problème (CK) possède une unique solution analytique.

exercice : $N = C_{d+m+1}^{d+1} - 1$.

Sofia Kovalevskaya

1850 – 1891

Sofia Kovalevskaya
1850 – 1891

Existence et unicité d'une solution analytique pour

$$\begin{cases} \partial_t^m u = F\big(t, x, (\partial_t^k \partial_x^\alpha u)_{|\alpha|+k\leq m, k<m}\big), \\ (\partial_t^j u)(0,x) = v_j(x), \quad 0 \leq j < m. \end{cases}$$

Sofia Kovalevskaya

1850 – 1891

Existence et unicité d'une solution analytique pour

$$\begin{cases} \partial_t^m u = F\big(t, x, (\partial_t^k \partial_x^\alpha u)_{|\alpha|+k\leq m, k<m}\big), \\ (\partial_t^j u)(0,x) = v_j(x), \quad 0 \leq j < m. \end{cases}$$

Un résultat extraordinairement général : EDP scalaire ou bien système d'EDP, linéaire ou non linéaire.

Pour une équation linéaire

$$\begin{cases} \partial_t^m u = \sum_{|\alpha|+k\leq m, k<m} a_{\alpha,k}(t,x)\partial_t^k \partial_x^\alpha u, \\ (\partial_t^j u)(0,x) = v_j(x), \quad 0 \leq j < m. \end{cases}$$

avec des coefficients $a_{\alpha,k}$ et des v_j analytiques, il y a unicité parmi toutes les solutions distributions.

Pour une équation linéaire

$$\begin{cases} \partial_t^m u = \sum_{|\alpha|+k\leq m, k<m} a_{\alpha,k}(t,x)\partial_t^k \partial_x^\alpha u, \\ (\partial_t^j u)(0,x) = v_j(x), \quad 0 \leq j < m. \end{cases}$$

avec des coefficients $a_{\alpha,k}$ et des v_j analytiques, il y a unicité parmi toutes les solutions distributions. C'est le théorème d'Holmgren, démontré dans un cas particulier par Erik Holmgren en 1901 et dans cette généralité par Fritz John en 1949 pour les solutions classiques. CK fournit donc l'unique solution dans ce cas.

Pour une équation linéaire

$$\begin{cases} \partial_t^m u = \sum_{|\alpha|+k\leq m, k<m} a_{\alpha,k}(t,x)\partial_t^k \partial_x^\alpha u, \\ (\partial_t^j u)(0,x) = v_j(x), \quad 0 \leq j < m. \end{cases}$$

avec des coefficients $a_{\alpha,k}$ et des v_j analytiques, il y a unicité parmi toutes les solutions distributions. C'est le théorème d'Holmgren, démontré dans un cas particulier par Erik Holmgren en 1901 et dans cette généralité par Fritz John en 1949 pour les solutions classiques. CK fournit donc l'unique solution dans ce cas.

En revanche, un contre-exemple (1993) de Guy Métivier prouve que le théorème d'Holmgren n'est pas valide en général pour des équations quasi-linéaires.

L'exemple d'Hadamard.

Jacques Hadamard

1865 – 1963

L'exemple d'Hadamard.

Jacques Hadamard

1865 – 1963

Un mathématicien universel, selon les termes pertinents de V. Maz'ya & T. Shaposhnikova.

L'exemple d'Hadamard.

Jacques Hadamard

1865 – 1963

Un mathématicien universel, selon les termes pertinents de V. Maz'ya & T. Shaposhnikova. Il démontre en 1896 le théorème des nombres premiers, concomitamment et indépendamment de Charles de La Vallée Poussin

$$\operatorname{Card}\{p \text{ premier} \leq x\} = \pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}, \quad x \to +\infty$$

L'exemple d'Hadamard.

Jacques Hadamard
1865 – 1963

Un mathématicien universel, selon les termes pertinents de V. Maz'ya & T. Shaposhnikova. Il démontre en 1896 le théorème des nombres premiers, concomitamment et indépendamment de Charles de La Vallée Poussin

$$\mathrm{Card}\,\{p \text{ premier} \leq x\} = \pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}, \quad x \to +\infty$$

Il a aussi introduit la *notion de problème bien posé*, locution bien traduite par *well-posedness* pour des problèmes d'EDP. Hadamard affirme que les modèles mathématiques de phénomènes physiques doivent avoir les propriétés suivantes :

L'exemple d'Hadamard.

Jacques Hadamard
1865 – 1963

Un mathématicien universel, selon les termes pertinents de V. Maz'ya & T. Shaposhnikova. Il démontre en 1896 le théorème des nombres premiers, concomitamment et indépendamment de Charles de La Vallée Poussin

$$\mathrm{Card}\,\{p \text{ premier} \leq x\} = \pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}, \quad x \to +\infty$$

Il a aussi introduit la *notion de problème bien posé*, locution bien traduite par *well-posedness* pour des problèmes d'EDP. Hadamard affirme que les modèles mathématiques de phénomènes physiques doivent avoir les propriétés suivantes : La solution doit exister et être unique.

L'exemple d'Hadamard.

Jacques Hadamard

1865 – 1963

Un mathématicien universel, selon les termes pertinents de V. Maz'ya & T. Shaposhnikova. Il démontre en 1896 le théorème des nombres premiers, concomitamment et indépendamment de Charles de La Vallée Poussin

$$\mathrm{Card}\,\{p \text{ premier} \leq x\} = \pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}, \quad x \to +\infty$$

Il a aussi introduit la *notion de problème bien posé*, locution bien traduite par *well-posedness* pour des problèmes d'EDP. Hadamard affirme que les modèles mathématiques de phénomènes physiques doivent avoir les propriétés suivantes :
La solution doit exister et être unique.
La solution dépend de façon continue des données.

Après tout, les données du problème physique ne sont connues qu'approximativement

Après tout, les données du problème physique ne sont connues qu'approximativement et une légère erreur dans la mesure ou la connaissance de ces données ne doit pas déclencher d'erreur significative dans le comportement de la solution du problème.

Après tout, les données du problème physique ne sont connues qu'approximativement et une légère erreur dans la mesure ou la connaissance de ces données ne doit pas déclencher d'erreur significative dans le comportement de la solution du problème.

L'existence et l'unicité sont des propriétés certes cruciales, mais finalement le fait que la solution dépende de manière continue des données du problème constitue une propriété souvent plus forte et en tous cas plus importante.

Après tout, les données du problème physique ne sont connues qu'approximativement et une légère erreur dans la mesure ou la connaissance de ces données ne doit pas déclencher d'erreur significative dans le comportement de la solution du problème.

L'existence et l'unicité sont des propriétés certes cruciales, mais finalement le fait que la solution dépende de manière continue des données du problème constitue une propriété souvent plus forte et en tous cas plus importante.

Cette dépendance continue des données initiales s'exprime en général par des inégalités permettant de contrôler la taille de la solution par celle de la donnée initiale dans des espaces fonctionnels ad hoc.

Après tout, les données du problème physique ne sont connues qu'approximativement et une légère erreur dans la mesure ou la connaissance de ces données ne doit pas déclencher d'erreur significative dans le comportement de la solution du problème.

L'existence et l'unicité sont des propriétés certes cruciales, mais finalement le fait que la solution dépende de manière continue des données du problème constitue une propriété souvent plus forte et en tous cas plus importante.

Cette dépendance continue des données initiales s'exprime en général par des inégalités permettant de contrôler la taille de la solution par celle de la donnée initiale dans des espaces fonctionnels ad hoc.

Citons le mathématicien suédois Lars Gårding : “ *When a problem about partial differential operators has been fitted into the abstract theory, all that remains is usually to prove a suitable inequality and much of our knowledge is, in fact, essentially contained in such inequalities.*”

Voici une variation sur un exemple d'Hadamard. On considère le problème de Cauchy pour l'opérateur $\bar{\partial}$. Equation linéaire, dimension 1 d'espace :

$$\partial_t u + i\partial_x u = 0, \quad u(0,x) = e^{i\lambda x}, \qquad \lambda \gg 1,$$

possède l'unique solution $u(t,x) = e^{\lambda(t+ix)}$. La norme L^∞ de $u(0,x)$ est 1, tandis que la norme L^∞ de $u(T,x)$ est $e^{\lambda T}$. On ne peut espérer contrôler u au temps $T > 0$ par une inégalité du type $\|u(T)\|_{H^{-N}(K)} \leq C\|u(0)\|_{H^N(L)}$: cela impliquerait

$$e^{\lambda T}\lambda^{-N} \lesssim \|u(T)\|_{H^{-N}(K)} \leq C\|u(0)\|_{H^N(L)} \lesssim \lambda^N.$$

Le problème de Cauchy pour le $\bar{\partial}$ est mal posé : des oscillations de la donnée initiale créent une croissance exponentielle de la solution.

Voici une variation sur un exemple d'Hadamard. On considère le problème de Cauchy pour l'opérateur $\bar\partial$. Equation linéaire, dimension 1 d'espace :

$$\partial_t u + i\partial_x u = 0, \quad u(0,x) = e^{i\lambda x}, \qquad \lambda \gg 1,$$

possède l'unique solution $u(t,x) = e^{\lambda(t+ix)}$. La norme L^∞ de $u(0,x)$ est 1, tandis que la norme L^∞ de $u(T,x)$ est $e^{\lambda T}$. On ne peut espérer contrôler u au temps $T > 0$ par une inégalité du type $\|u(T)\|_{H^{-N}(K)} \leq C\|u(0)\|_{H^N(L)}$: cela impliquerait

$$e^{\lambda T}\lambda^{-N} \lesssim \|u(T)\|_{H^{-N}(K)} \leq C\|u(0)\|_{H^N(L)} \lesssim \lambda^N.$$

Le problème de Cauchy pour le $\bar\partial$ est mal posé : des oscillations de la donnée initiale créent une croissance exponentielle de la solution.

Voici une variation sur un exemple d'Hadamard. On considère le problème de Cauchy pour l'opérateur $\bar{\partial}$. Equation linéaire, dimension 1 d'espace :

$$\partial_t u + i\partial_x u = 0, \quad u(0,x) = e^{i\lambda x}, \qquad \lambda \gg 1,$$

possède l'unique solution $u(t,x) = e^{\lambda(t+ix)}$. La norme L^∞ de $u(0,x)$ est 1, tandis que la norme L^∞ de $u(T,x)$ est $e^{\lambda T}$.

On ne peut espérer contrôler u au temps $T > 0$ par une inégalité du type $\|u(T)\|_{H^{-N}(K)} \leq C\|u(0)\|_{H^N(L)}$: cela impliquerait

$$e^{\lambda T}\lambda^{-N} \lesssim \|u(T)\|_{H^{-N}(K)} \leq C\|u(0)\|_{H^N(L)} \lesssim \lambda^N.$$

Le problème de Cauchy pour le $\bar{\partial}$ est mal posé : des oscillations de la donnée initiale créent une croissance exponentielle de la solution.

Voici une variation sur un exemple d'Hadamard. On considère le problème de Cauchy pour l'opérateur $\bar{\partial}$. Equation linéaire, dimension 1 d'espace :

$$\partial_t u + i\partial_x u = 0, \quad u(0,x) = e^{i\lambda x}, \qquad \lambda \gg 1,$$

possède l'unique solution $u(t,x) = e^{\lambda(t+ix)}$. La norme L^∞ de $u(0,x)$ est 1, tandis que la norme L^∞ de $u(T,x)$ est $e^{\lambda T}$.
On ne peut espérer contrôler u au temps $T > 0$ par une inégalité du type $\|u(T)\|_{H^{-N}(K)} \leq C\|u(0)\|_{H^N(L)}$: cela impliquerait

$$e^{\lambda T}\lambda^{-N} \lesssim \|u(T)\|_{H^{-N}(K)} \leq C\|u(0)\|_{H^N(L)} \lesssim \lambda^N.$$

Le problème de Cauchy pour le $\bar{\partial}$ est mal posé : des oscillations de la donnée initiale créent une croissance exponentielle de la solution.

Voici une variation sur un exemple d'Hadamard. On considère le problème de Cauchy pour l'opérateur $\bar{\partial}$. Equation linéaire, dimension 1 d'espace :

$$\partial_t u + i\partial_x u = 0, \quad u(0,x) = e^{i\lambda x}, \qquad \lambda \gg 1,$$

possède l'unique solution $u(t,x) = e^{\lambda(t+ix)}$. La norme L^∞ de $u(0,x)$ est 1, tandis que la norme L^∞ de $u(T,x)$ est $e^{\lambda T}$.
On ne peut espérer contrôler u au temps $T > 0$ par une inégalité du type $\|u(T)\|_{H^{-N}(K)} \leq C\|u(0)\|_{H^N(L)}$: cela impliquerait

$$e^{\lambda T}\lambda^{-N} \lesssim \|u(T)\|_{H^{-N}(K)} \leq C\|u(0)\|_{H^N(L)} \lesssim \lambda^N.$$

Le problème de Cauchy pour le $\bar{\partial}$ est mal posé : des oscillations de la donnée initiale créent une croissance exponentielle de la solution.

Voici une variation sur un exemple d'Hadamard. On considère le problème de Cauchy pour l'opérateur $\bar{\partial}$. Equation linéaire, dimension 1 d'espace :

$$\partial_t u + i\partial_x u = 0, \quad u(0,x) = e^{i\lambda x}, \qquad \lambda \gg 1,$$

possède l'unique solution $u(t,x) = e^{\lambda(t+ix)}$. La norme L^∞ de $u(0,x)$ est 1, tandis que la norme L^∞ de $u(T,x)$ est $e^{\lambda T}$.
On ne peut espérer contrôler u au temps $T > 0$ par une inégalité du type $\|u(T)\|_{H^{-N}(K)} \leq C\|u(0)\|_{H^N(L)}$: cela impliquerait

$$e^{\lambda T}\lambda^{-N} \lesssim \|u(T)\|_{H^{-N}(K)} \leq C\|u(0)\|_{H^N(L)} \lesssim \lambda^N.$$

Le problème de Cauchy pour le $\bar{\partial}$ est mal posé : des oscillations de la donnée initiale créent une croissance exponentielle de la solution.

Voici une variation sur un exemple d'Hadamard. On considère le problème de Cauchy pour l'opérateur $\bar{\partial}$. Equation linéaire, dimension 1 d'espace :

$$\partial_t u + i\partial_x u = 0, \quad u(0,x) = e^{i\lambda x}, \qquad \lambda \gg 1,$$

possède l'unique solution $u(t,x) = e^{\lambda(t+ix)}$. La norme L^∞ de $u(0,x)$ est 1, tandis que la norme L^∞ de $u(T,x)$ est $e^{\lambda T}$. On ne peut espérer contrôler u au temps $T > 0$ par une inégalité du type $\|u(T)\|_{H^{-N}(K)} \leq C\|u(0)\|_{H^N(L)}$: cela impliquerait

$$e^{\lambda T}\lambda^{-N} \lesssim \|u(T)\|_{H^{-N}(K)} \leq C\|u(0)\|_{H^N(L)} \lesssim \lambda^N.$$

Le problème de Cauchy pour le $\bar{\partial}$ est mal posé : des oscillations de la donnée initiale créent une croissance exponentielle de la solution.

$$\partial_t u + i\partial_x u = u^2 \quad \text{sur } t > 0, \qquad u(0,x) = \omega(x),$$

où ω est continue près de $x_0 \in \mathbb{R}$ telle que $\omega(x_0) \neq 0$. En supposant que u est continue jusqu'à $t = 0$, on obtient que u ne s'annule pas près de $(0, x_0)$ et

$$(\partial_t + i\partial_x)(\frac{1}{u} + t) = 0 \quad \text{sur } t > 0,$$

de sorte qu'il existe une fonction holomorphe ϕ definie sur $\operatorname{Im} z < 0$ avec

$$u(t,x) = \frac{1}{\phi(x - it) - t}.$$

Si ω est à valeurs réelles, la fonction holomorphe $1/\phi$ est continue jusqu'à $\operatorname{Im} z = 0$ et à valeurs réelles sur l'axe réel : d'après le principe de réflexion de Schwarz, ϕ est holomorphe près de x_0 et donc ω est analytique.

Par conséquent si ω est à valeurs réelles, C^∞, $\omega(x_0) \neq 0$, ω non analytique : pas de solution C^0. En effet l'existence même d'une solution C^0 force la donnée initiale à être analytique.

$$\partial_t u + i\partial_x u = u^2 \quad \text{sur } t > 0, \qquad u(0,x) = \omega(x),$$

où ω est continue près de $x_0 \in \mathbb{R}$ telle que $\omega(x_0) \neq 0$. En supposant que u est continue jusqu'à $t = 0$, on obtient que u ne s'annule pas près de $(0, x_0)$ et

$$(\partial_t + i\partial_x)(\frac{1}{u} + t) = 0 \quad \text{sur } t > 0,$$

de sorte qu'il existe une fonction holomorphe ϕ definie sur $\operatorname{Im} z < 0$ avec

$$u(t,x) = \frac{1}{\phi(x - it) - t}.$$

Si ω est à valeurs réelles, la fonction holomorphe $1/\phi$ est continue jusqu'à $\operatorname{Im} z = 0$ et à valeurs réelles sur l'axe réel : d'après le principe de réflexion de Schwarz, ϕ est holomorphe près de x_0 et donc ω est analytique.

Par conséquent si ω est à valeurs réelles, C^∞, $\omega(x_0) \neq 0$, ω non analytique : pas de solution C^0. En effet l'existence même d'une solution C^0 force la donnée initiale à être analytique.

$$\partial_t u + i\partial_x u = u^2 \quad \text{sur } t > 0, \qquad u(0,x) = \omega(x),$$

où ω est continue près de $x_0 \in \mathbb{R}$ telle que $\omega(x_0) \neq 0$. En supposant que u est continue jusqu'à $t = 0$, on obtient que u ne s'annule pas près de $(0, x_0)$ et

$$(\partial_t + i\partial_x)(\frac{1}{u} + t) = 0 \quad \text{sur } t > 0,$$

de sorte qu'il existe une fonction holomorphe ϕ definie sur $\operatorname{Im} z < 0$ avec

$$u(t,x) = \frac{1}{\phi(x - it) - t}.$$

Si ω est à valeurs réelles, la fonction holomorphe $1/\phi$ est continue jusqu'à $\operatorname{Im} z = 0$ et à valeurs réelles sur l'axe réel : d'après le principe de réflexion de Schwarz, ϕ est holomorphe près de x_0 et donc ω est analytique.

Par conséquent si ω est à valeurs réelles, C^∞, $\omega(x_0) \neq 0$, ω non analytique : pas de solution C^0. En effet l'existence même d'une solution C^0 force la donnée initiale à être analytique.

$$\partial_t u + i\partial_x u = u^2 \quad \text{sur } t > 0, \qquad u(0,x) = \omega(x),$$

où ω est continue près de $x_0 \in \mathbb{R}$ telle que $\omega(x_0) \neq 0$. En supposant que u est continue jusqu'à $t = 0$, on obtient que u ne s'annule pas près de $(0, x_0)$ et

$$(\partial_t + i\partial_x)(\frac{1}{u} + t) = 0 \quad \text{sur } t > 0,$$

de sorte qu'il existe une fonction holomorphe ϕ definie sur $\operatorname{Im} z < 0$ avec

$$u(t,x) = \frac{1}{\phi(x - it) - t}.$$

Si ω est à valeurs réelles, la fonction holomorphe $1/\phi$ est continue jusqu'à $\operatorname{Im} z = 0$ et à valeurs réelles sur l'axe réel : d'après le principe de réflexion de Schwarz, ϕ est holomorphe près de x_0 et donc ω est analytique.

Par conséquent si ω est à valeurs réelles, C^∞, $\omega(x_0) \neq 0$, ω non analytique : pas de solution C^0. En effet l'existence même d'une solution C^0 force la donnée initiale à être analytique.

$$\partial_t u + i\partial_x u = u^2 \quad \text{sur } t > 0, \qquad u(0,x) = \omega(x),$$

où ω est continue près de $x_0 \in \mathbb{R}$ telle que $\omega(x_0) \neq 0$. En supposant que u est continue jusqu'à $t = 0$, on obtient que u ne s'annule pas près de $(0, x_0)$ et

$$(\partial_t + i\partial_x)(\frac{1}{u} + t) = 0 \quad \text{sur } t > 0,$$

de sorte qu'il existe une fonction holomorphe ϕ definie sur $\operatorname{Im} z < 0$ avec

$$u(t,x) = \frac{1}{\phi(x - it) - t}.$$

Si ω est à valeurs réelles, la fonction holomorphe $1/\phi$ est continue jusqu'à $\operatorname{Im} z = 0$ et à valeurs réelles sur l'axe réel : d'après le principe de réflexion de Schwarz, ϕ est holomorphe près de x_0 et donc ω est analytique.

Par conséquent si ω est à valeurs réelles, C^∞, $\omega(x_0) \neq 0$, ω non analytique : pas de solution C^0. En effet l'existence même d'une solution C^0 force la donnée initiale à être analytique.

$$\partial_t u + i\partial_x u = u^2 \quad \text{sur } t > 0, \qquad u(0,x) = \omega(x),$$

où ω est continue près de $x_0 \in \mathbb{R}$ telle que $\omega(x_0) \neq 0$. En supposant que u est continue jusqu'à $t = 0$, on obtient que u ne s'annule pas près de $(0, x_0)$ et

$$(\partial_t + i\partial_x)(\frac{1}{u} + t) = 0 \quad \text{sur } t > 0,$$

de sorte qu'il existe une fonction holomorphe ϕ definie sur $\operatorname{Im} z < 0$ avec

$$u(t,x) = \frac{1}{\phi(x - it) - t}.$$

Si ω est à valeurs réelles, la fonction holomorphe $1/\phi$ est continue jusqu'à $\operatorname{Im} z = 0$ et à valeurs réelles sur l'axe réel : d'après le principe de réflexion de Schwarz, ϕ est holomorphe près de x_0 et donc ω est analytique.

Par conséquent si ω est à valeurs réelles, C^∞, $\omega(x_0) \neq 0$, ω non analytique : pas de solution C^0. En effet l'existence même d'une solution C^0 force la donnée initiale à être analytique.

$$\partial_t u + i\partial_x u = u^2 \quad \text{sur } t > 0, \qquad u(0,x) = \omega(x),$$

où ω est continue près de $x_0 \in \mathbb{R}$ telle que $\omega(x_0) \neq 0$. En supposant que u est continue jusqu'à $t = 0$, on obtient que u ne s'annule pas près de $(0, x_0)$ et

$$(\partial_t + i\partial_x)(\frac{1}{u} + t) = 0 \quad \text{sur } t > 0,$$

de sorte qu'il existe une fonction holomorphe ϕ definie sur $\operatorname{Im} z < 0$ avec

$$u(t,x) = \frac{1}{\phi(x - it) - t}.$$

Si ω est à valeurs réelles, la fonction holomorphe $1/\phi$ est continue jusqu'à $\operatorname{Im} z = 0$ et à valeurs réelles sur l'axe réel : d'après le principe de réflexion de Schwarz, ϕ est holomorphe près de x_0 et donc ω est analytique.

Par conséquent si ω est à valeurs réelles, C^∞, $\omega(x_0) \neq 0$, ω non analytique : pas de solution C^0. En effet l'existence même d'une solution C^0 force la donnée initiale à être analytique.

$$\partial_t u + i\partial_x u = u^2 \quad \text{sur } t > 0, \qquad u(0,x) = \omega(x),$$

où ω est continue près de $x_0 \in \mathbb{R}$ telle que $\omega(x_0) \neq 0$. En supposant que u est continue jusqu'à $t = 0$, on obtient que u ne s'annule pas près de $(0, x_0)$ et

$$(\partial_t + i\partial_x)(\frac{1}{u} + t) = 0 \quad \text{sur } t > 0,$$

de sorte qu'il existe une fonction holomorphe ϕ definie sur $\operatorname{Im} z < 0$ avec

$$u(t,x) = \frac{1}{\phi(x - it) - t}.$$

Si ω est à valeurs réelles, la fonction holomorphe $1/\phi$ est continue jusqu'à $\operatorname{Im} z = 0$ et à valeurs réelles sur l'axe réel : d'après le principe de réflexion de Schwarz, ϕ est holomorphe près de x_0 et donc ω est analytique.

Par conséquent si ω est à valeurs réelles, C^∞, $\omega(x_0) \neq 0$, ω non analytique : pas de solution C^0. En effet l'existence même d'une solution C^0 force la donnée initiale à être analytique.

Reformulation. Pour le problème

$$(\sharp) \qquad \partial_t u + i\partial_x u = u^2 \quad \text{sur } t > 0, \qquad u(0,x) = \omega_0(x).$$

avec ω_0 analytique près de $x_0 \in \mathbb{R}$, le théorème CK fournit une unique solution u.

Reformulation. Pour le problème

$$(\sharp) \qquad \partial_t u + i\partial_x u = u^2 \quad \text{sur } t > 0, \qquad u(0,x) = \omega_0(x).$$

avec ω_0 analytique près de $x_0 \in \mathbb{R}$, le théorème CK fournit une unique solution u. Si l'on perturbe la donnée de Cauchy ω_0 en la remplaçant par une fonction C^∞ non analytique ω avec le même développement de Taylor que ω_0 en x_0,

Reformulation. Pour le problème

$$(\sharp) \qquad \partial_t u + i\partial_x u = u^2 \quad \text{sur } t > 0, \qquad u(0,x) = \omega_0(x).$$

avec ω_0 analytique près de $x_0 \in \mathbb{R}$, le théorème CK fournit une unique solution u. Si l'on perturbe la donnée de Cauchy ω_0 en la remplaçant par une fonction C^∞ non analytique ω avec le même développement de Taylor que ω_0 en x_0, l'argument précédent montre que, si $\omega_0(x_0) \neq 0$, il n'y a pas de solution continue pour $(\sharp)$, si ω_0 est remplacé par ω.

Reformulation. Pour le problème

$$(\sharp) \qquad \partial_t u + i\partial_x u = u^2 \quad \text{sur } t > 0, \qquad u(0,x) = \omega_0(x).$$

avec ω_0 analytique près de $x_0 \in \mathbb{R}$, le théorème CK fournit une unique solution u. Si l'on perturbe la donnée de Cauchy ω_0 en la remplaçant par une fonction C^∞ non analytique ω avec le même développement de Taylor que ω_0 en x_0, l'argument précédent montre que, si $\omega_0(x_0) \neq 0$, il n'y a pas de solution continue pour $(\sharp)$, si ω_0 est remplacé par ω.

En effet, on vient de voir que l'existence même d'une solution C^0 force la donnée initiale à être analytique. La non existence de solution est la forme la plus violente d'instabilité.

2. Systèmes quasi-linéaires

Le système réel 2×2

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1(u) & -a_2(u) \\ a_2(u) & a_1(u) \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(u) \\ b_2(u) \end{pmatrix},$$

peut s'écrire également comme une équation scalaire complexe

$$\partial_t u + a(u)\partial_x u = b(u), \quad u = u_1 + iu_2, a = a_1 + ia_2, b = b_1 + ib_2.$$

Si la partie imaginaire de $a(u)$ est non nulle à l'instant initial, on peut assez facilement reproduire le résultat d'instabilité de l'exemple d'Hadamard. L'equation linéarisée est $\partial_t + a(u_0)\partial_x$, et la forte instabilité du linéarisé va se transmettre à l'équation non linéaire. Comme précédemment, l'existence même d'une solution C^1 forcera la donnée initiale à être analytique.

2. Systèmes quasi-linéaires

Le système réel 2×2

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1(u) & -a_2(u) \\ a_2(u) & a_1(u) \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(u) \\ b_2(u) \end{pmatrix},$$

peut s'écrire également comme une équation scalaire complexe

$$\partial_t u + a(u)\partial_x u = b(u), \quad u = u_1 + iu_2, a = a_1 + ia_2, b = b_1 + ib_2.$$

Si la partie imaginaire de $a(u)$ est non nulle à l'instant initial, on peut assez facilement reproduire le résultat d'instabilité de l'exemple d'Hadamard. L'equation linéarisée est $\partial_t + a(u_0)\partial_x$, et la forte instabilité du linéarisé va se transmettre à l'équation non linéaire. Comme précédemment, l'existence même d'une solution C^1 forcera la donnée initiale à être analytique.

2. Systèmes quasi-linéaires

Le système réel 2×2

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1(u) & -a_2(u) \\ a_2(u) & a_1(u) \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(u) \\ b_2(u) \end{pmatrix},$$

peut s'écrire également comme une équation scalaire complexe

$$\partial_t u + a(u)\partial_x u = b(u), \quad u = u_1 + iu_2, a = a_1 + ia_2, b = b_1 + ib_2.$$

Si la partie imaginaire de $a(u)$ est non nulle à l'instant initial, on peut assez facilement reproduire le résultat d'instabilité de l'exemple d'Hadamard. L'equation linéarisée est $\partial_t + a(u_0)\partial_x$, et la forte instabilité du linéarisé va se transmettre à l'équation non linéaire. Comme précédemment, l'existence même d'une solution C^1 forcera la donnée initiale à être analytique.

2. Systèmes quasi-linéaires

Le système réel 2×2

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1(u) & -a_2(u) \\ a_2(u) & a_1(u) \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(u) \\ b_2(u) \end{pmatrix},$$

peut s'écrire également comme une équation scalaire complexe

$$\partial_t u + a(u)\partial_x u = b(u), \quad u = u_1 + iu_2, a = a_1 + ia_2, b = b_1 + ib_2.$$

Si la partie imaginaire de $a(u)$ est non nulle à l'instant initial, on peut assez facilement reproduire le résultat d'instabilité de l'exemple d'Hadamard. L'equation linéarisée est $\partial_t + a(u_0)\partial_x$, et la forte instabilité du linéarisé va se transmettre à l'équation non linéaire. Comme précédemment, l'existence même d'une solution C^1 forcera la donnée initiale à être analytique.

2. Systèmes quasi-linéaires

Le système réel 2×2

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1(u) & -a_2(u) \\ a_2(u) & a_1(u) \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(u) \\ b_2(u) \end{pmatrix},$$

peut s'écrire également comme une équation scalaire complexe

$$\partial_t u + a(u)\partial_x u = b(u), \quad u = u_1 + iu_2, a = a_1 + ia_2, b = b_1 + ib_2.$$

Si la partie imaginaire de $a(u)$ est non nulle à l'instant initial, on peut assez facilement reproduire le résultat d'instabilité de l'exemple d'Hadamard. L'equation linéarisée est $\partial_t + a(u_0)\partial_x$, et la forte instabilité du linéarisé va se transmettre à l'équation non linéaire. Comme précédemment, l'existence même d'une solution C^1 forcera la donnée initiale à être analytique.

2. Systèmes quasi-linéaires

Le système réel 2×2

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1(u) & -a_2(u) \\ a_2(u) & a_1(u) \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(u) \\ b_2(u) \end{pmatrix},$$

peut s'écrire également comme une équation scalaire complexe

$$\partial_t u + a(u)\partial_x u = b(u), \quad u = u_1 + iu_2, a = a_1 + ia_2, b = b_1 + ib_2.$$

Si la partie imaginaire de $a(u)$ est non nulle à l'instant initial, on peut assez facilement reproduire le résultat d'instabilité de l'exemple d'Hadamard. L'equation linéarisée est $\partial_t + a(u_0)\partial_x$, et la forte instabilité du linéarisé va se transmettre à l'équation non linéaire. Comme précédemment, l'existence même d'une solution C^1 forcera la donnée initiale à être analytique.

On considère maintenant un système de Burgers complexe

$$(*) \qquad \partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où u_1, u_2 sont à valeurs réelles, avec u_1, u_2 de classe C^2 jusqu'à $t = 0$, avec condition initiale

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{|t=0} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice ci-dessus sont $u_1 \pm i u_2$ et sont donc réelles en $t = 0$ car $u_2(0, x) \equiv 0$. Pas d'argumentaire elliptique, néanmoins ... on peut démontrer que ω_1 doit être analytique si le problème $(*)(**)$ a une solution C^2. Donc pour la plupart des données initiales, le problème de Cauchy n'a pas de solution.

On considère maintenant un système de Burgers complexe

$$(*) \qquad \partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où u_1, u_2 sont à valeurs réelles, avec u_1, u_2 de classe C^2 jusqu'à $t = 0$, avec condition initiale

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{|t=0} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice ci-dessus sont $u_1 \pm iu_2$ et sont donc réelles en $t = 0$ car $u_2(0, x) \equiv 0$. Pas d'argumentaire elliptique, néanmoins ... on peut démontrer que ω_1 doit être analytique si le problème $(*)(**)$ a une solution C^2. Donc pour la plupart des données initiales, le problème de Cauchy n'a pas de solution.

On considère maintenant un système de Burgers complexe

$$(*) \qquad \partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où u_1, u_2 sont à valeurs réelles, avec u_1, u_2 de classe C^2 jusqu'à $t = 0$, avec condition initiale

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{|t=0} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice ci-dessus sont $u_1 \pm i u_2$ et sont donc réelles en $t = 0$ car $u_2(0, x) \equiv 0$. Pas d'argumentaire elliptique, néanmoins ... on peut démontrer que ω_1 doit être analytique si le problème $(*)(**)$ a une solution C^2. Donc pour la plupart des données initiales, le problème de Cauchy n'a pas de solution.

On considère maintenant un système de Burgers complexe

$$(*) \qquad \partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où u_1, u_2 sont à valeurs réelles, avec u_1, u_2 de classe C^2 jusqu'à $t = 0$, avec condition initiale

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{|t=0} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice ci-dessus sont $u_1 \pm iu_2$ et sont donc réelles en $t = 0$ car $u_2(0,x) \equiv 0$. Pas d'argumentaire elliptique, néanmoins ... on peut démontrer que ω_1 doit être analytique si le problème $(*)(**)$ a une solution C^2. Donc pour la plupart des données initiales, le problème de Cauchy n'a pas de solution.

On considère maintenant un système de Burgers complexe

$$(*) \qquad \partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où u_1, u_2 sont à valeurs réelles, avec u_1, u_2 de classe C^2 jusqu'à $t = 0$, avec condition initiale

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{|t=0} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice ci-dessus sont $u_1 \pm iu_2$ et sont donc réelles en $t = 0$ car $u_2(0, x) \equiv 0$. Pas d'argumentaire elliptique, néanmoins ... on peut démontrer que ω_1 doit être analytique si le problème $(*)(**)$ a une solution C^2. Donc pour la plupart des données initiales, le problème de Cauchy n'a pas de solution.

On considère maintenant un système de Burgers complexe

$$(*) \qquad \partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où u_1, u_2 sont à valeurs réelles, avec u_1, u_2 de classe C^2 jusqu'à $t = 0$, avec condition initiale

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{|t=0} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice ci-dessus sont $u_1 \pm iu_2$ et sont donc réelles en $t = 0$ car $u_2(0, x) \equiv 0$. Pas d'argumentaire elliptique, néanmoins ... on peut démontrer que ω_1 doit être analytique si le problème $(*)(**)$ a une solution C^2. Donc pour la plupart des données initiales, le problème de Cauchy n'a pas de solution.

On considère maintenant un système de Burgers complexe

$$(*) \qquad \partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où u_1, u_2 sont à valeurs réelles, avec u_1, u_2 de classe C^2 jusqu'à $t = 0$, avec condition initiale

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{|t=0} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice ci-dessus sont $u_1 \pm iu_2$ et sont donc réelles en $t = 0$ car $u_2(0, x) \equiv 0$. Pas d'argumentaire elliptique, néanmoins ... on peut démontrer que ω_1 doit être analytique si le problème $(*)(**)$ a une solution C^2. Donc pour la plupart des données initiales, le problème de Cauchy n'a pas de solution.

Reformulation. Pour le système de Burgers complexe,

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{|t=0} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec ω_1 analytique, le théorème CK fournit une unique solution analytique. Remplaçant ω_1 par une fonction C^∞ non analytique avec le même développement de Taylor en un point x_0, on trouve que le système n'a pas de solution u (de classe C^2). Notons que cette équation s'écrit comme une équation scalaire complexe

$$\partial_t u + u\partial_x u = i, \quad u_{|t=0} = \omega_1.$$

Cette équation est hyperbolique au temps initial car u est réel en $t = 0$.

Reformulation. Pour le système de Burgers complexe,

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{|t=0} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec ω_1 analytique, le théorème CK fournit une unique solution analytique. Remplaçant ω_1 par une fonction C^∞ non analytique avec le même développement de Taylor en un point x_0, on trouve que le système n'a pas de solution u (de classe C^2). Notons que cette équation s'écrit comme une équation scalaire complexe

$$\partial_t u + u \partial_x u = i, \quad u_{|t=0} = \omega_1.$$

Cette équation est hyperbolique au temps initial car u est réel en $t = 0$.

Reformulation. Pour le système de Burgers complexe,

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{|t=0} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec ω_1 analytique, le théorème CK fournit une unique solution analytique. Remplaçant ω_1 par une fonction C^∞ non analytique avec le même développement de Taylor en un point x_0, on trouve que le système n'a pas de solution u (de classe C^2). Notons que cette équation s'écrit comme une équation scalaire complexe

$$\partial_t u + u \partial_x u = i, \quad u_{|t=0} = \omega_1.$$

Cette équation est hyperbolique au temps initial car u est réel en $t = 0$.

Un cadre plus général. Equation quasi-linéaire :

$$(1) \qquad \partial_t u + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,u)\partial_{x_j} u = b(t,x,u), \qquad u(0,x) = \omega(x).$$

$\mathcal{L} = \partial_t + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,v)\partial_{x_j} + b(t,x,v)\partial_v$, champ holomorphe,

$$\nu_0 = (a_1, \dots, a_d),$$
$$\nu_1 = (\mathcal{L}(a_1), \dots, \mathcal{L}(a_d)) = \mathcal{L}(\nu_0), \qquad \nu_k = \mathcal{L}(\nu_{k-1}) = \mathcal{L}^k(\nu_0).$$

Theorem A. *Si pour (x_0, v_0), il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que* $\operatorname{Im} \nu_k(0, x_0, v_0) \neq 0$, *alors pour toute fonction analytique ω_0 telle que $\omega_0(x_0) = v_0$, la solution CK solution du problème de Cauchy (1) avec donnée initiale ω_0 est fortement instable vis-à-vis d'une perturbation C^∞.*

Un cadre plus général. Equation quasi-linéaire :

$$(1) \qquad \partial_t u + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,u)\partial_{x_j} u = b(t,x,u), \qquad u(0,x) = \omega(x).$$

$\mathcal{L} = \partial_t + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,v)\partial_{x_j} + b(t,x,v)\partial_v$, champ holomorphe,

$$\nu_0 = (a_1, \dots, a_d),$$

$$\nu_1 = (\mathcal{L}(a_1), \dots, \mathcal{L}(a_d)) = \mathcal{L}(\nu_0), \qquad \nu_k = \mathcal{L}(\nu_{k-1}) = \mathcal{L}^k(\nu_0).$$

Theorem A. *Si pour (x_0, v_0), il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que* $\operatorname{Im} \nu_k(0, x_0, v_0) \neq 0$, *alors pour toute fonction analytique ω_0 telle que $\omega_0(x_0) = v_0$, la solution CK solution du problème de Cauchy (1) avec donnée initiale ω_0 est fortement instable vis-à-vis d'une perturbation C^∞.*

Un cadre plus général. Equation quasi-linéaire :

$$(1) \qquad \partial_t u + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,u)\partial_{x_j} u = b(t,x,u), \qquad u(0,x) = \omega(x).$$

$\mathcal{L} = \partial_t + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,v)\partial_{x_j} + b(t,x,v)\partial_v$, champ holomorphe,

$$\nu_0 = (a_1, \dots, a_d),$$
$$\nu_1 = \big(\mathcal{L}(a_1), \dots, \mathcal{L}(a_d)\big) = \mathcal{L}(\nu_0), \qquad \nu_k = \mathcal{L}(\nu_{k-1}) = \mathcal{L}^k(\nu_0).$$

Theorem A. *Si pour (x_0, v_0), il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Im} \nu_k(0, x_0, v_0) \neq 0$, alors pour toute fonction analytique ω_0 telle que $\omega_0(x_0) = v_0$, la solution CK solution du problème de Cauchy (1) avec donnée initiale ω_0 est fortement instable vis-à-vis d'une perturbation C^∞.*

Un cadre plus général. Equation quasi-linéaire :

$$(1) \qquad \partial_t u + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,u)\partial_{x_j} u = b(t,x,u), \qquad u(0,x) = \omega(x).$$

$\mathcal{L} = \partial_t + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,v)\partial_{x_j} + b(t,x,v)\partial_v$, champ holomorphe,

$$\nu_0 = (a_1, \dots, a_d),$$
$$\nu_1 = \big(\mathcal{L}(a_1), \dots, \mathcal{L}(a_d)\big) = \mathcal{L}(\nu_0), \qquad \nu_k = \mathcal{L}(\nu_{k-1}) = \mathcal{L}^k(\nu_0).$$

Theorem A. *Si pour (x_0, v_0), il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que* $\operatorname{Im} \nu_k(0, x_0, v_0) \neq 0$, *alors pour toute fonction analytique ω_0 telle que $\omega_0(x_0) = v_0$, la solution CK solution du problème de Cauchy (1) avec donnée initiale ω_0 est fortement instable vis-à-vis d'une perturbation C^∞.*

Un cadre plus général. Equation quasi-linéaire :

$$(1) \qquad \partial_t u + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,u)\partial_{x_j} u = b(t,x,u), \qquad u(0,x) = \omega(x).$$

$\mathcal{L} = \partial_t + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,v)\partial_{x_j} + b(t,x,v)\partial_v$, champ holomorphe,

$$\nu_0 = (a_1, \ldots, a_d),$$
$$\nu_1 = (\mathcal{L}(a_1), \ldots, \mathcal{L}(a_d)) = \mathcal{L}(\nu_0), \qquad \nu_k = \mathcal{L}(\nu_{k-1}) = \mathcal{L}^k(\nu_0).$$

Theorem A. *Si pour (x_0, v_0), il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Im} \nu_k(0, x_0, v_0) \neq 0$, alors pour toute fonction analytique ω_0 telle que $\omega_0(x_0) = v_0$, la solution CK solution du problème de Cauchy (1) avec donnée initiale ω_0 est fortement instable vis-à-vis d'une perturbation C^∞.*

$$\boxed{\partial_t u + a(t,x,u)\cdot\partial_x u = b(t,x,u), \quad u_{|t=0} = \omega(x).}$$

1. Ici, fortement instable signifie que pour tout voisinage W of x_0 et tout voisinage $\mathcal{W}$ de ω_0 dans $C^\infty(W)$, il existe $\omega \in \mathcal{W}$ tel que le problème de Cauchy avec donnée initiale ω n'a pas de solution C^{k+1}.
2. De plus pour toute fonction analytique ω_0 telle que $\omega_0(x_0) = v_0$, il existe une fonction $\omega \in C^\infty$ de même développement de Taylor en x_0 que ω_0 telle que le problème de Cauchy avec donnée initiale ω n'a pas de solution de classe C^{k+1}.

$$\boxed{\partial_t u + a(t,x,u)\cdot\partial_x u = b(t,x,u), \quad u_{|t=0} = \omega(x).}$$

1. Ici, fortement instable signifie que pour tout voisinage W of x_0 et tout voisinage $\mathcal{W}$ de ω_0 dans $C^\infty(W)$, il existe $\omega \in \mathcal{W}$ tel que le problème de Cauchy avec donnée initiale ω n'a pas de solution C^{k+1}.
2. De plus pour toute fonction analytique ω_0 telle que $\omega_0(x_0) = v_0$, il existe une fonction $\omega \in C^\infty$ de même développement de Taylor en x_0 que ω_0 telle que le problème de Cauchy avec donnée initiale ω n'a pas de solution de classe C^{k+1}.

$$\boxed{\partial_t u + a(t,x,u)\cdot\partial_x u = b(t,x,u), \quad u_{|t=0} = \omega(x).}$$

Revenons aux hypothèses.

- $k = 0, \quad \operatorname{Im} \nu_0(0, x_0, v_0) = \operatorname{Im} a(0, x_0, \omega(x_0)) \neq 0$ est une hypothèse d'ellipticité.
- $k = 1$, $\operatorname{Im} \nu_1 = \operatorname{Im} a'_t + \operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Im} a'_x + \operatorname{Im}(ba'_v)$, l'hypothèse suivante est

$$\operatorname{Im} \nu_0\big(0, x, \omega(x)\big) \equiv 0,$$
$$\operatorname{Im} \nu_1\big(0, x_0, \omega(x_0)\big) \neq 0.$$

- Ainsi de suite : avec $\nu_2 = \mathcal{L}\nu_1, \quad \nu_1 = \mathcal{L}\nu_0, \quad \nu_0 = a,$ $\mathcal{L} = \partial_t + a\cdot\partial_x + b\partial_v,$

$$\operatorname{Im} \nu_0\big(0, x, \omega(x)\big) \equiv 0,$$
$$\operatorname{Im} \nu_1\big(0, x, \omega(x)\big) \equiv 0,$$
$$\operatorname{Im} \nu_2\big(0, x_0, \omega(x_0)\big) \neq 0.$$

$$\boxed{\partial_t u + a(t,x,u)\cdot\partial_x u = b(t,x,u), \quad u_{|t=0} = \omega(x).}$$

Revenons aux hypothèses.

- $k=0$, $\quad \operatorname{Im}\nu_0(0,x_0,v_0) = \operatorname{Im} a(0,x_0,\omega(x_0)) \neq 0$ est une hypothèse d'ellipticité.
- $k=1$, $\operatorname{Im}\nu_1 = \operatorname{Im} a'_t + \operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Im} a'_x + \operatorname{Im}(ba'_v)$, l'hypothèse suivante est

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\nu_0\big(0,x,\omega(x)\big) &\equiv 0,\\ \operatorname{Im}\nu_1\big(0,x_0,\omega(x_0)\big) &\neq 0. \end{aligned}$$

- Ainsi de suite : avec $\nu_2 = \mathcal{L}\nu_1, \quad \nu_1 = \mathcal{L}\nu_0, \quad \nu_0 = a,$ $\mathcal{L} = \partial_t + a\cdot\partial_x + b\partial_v,$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\nu_0\big(0,x,\omega(x)\big) &\equiv 0,\\ \operatorname{Im}\nu_1\big(0,x,\omega(x)\big) &\equiv 0,\\ \operatorname{Im}\nu_2\big(0,x_0,\omega(x_0)\big) &\neq 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\partial_t u + a(t,x,u)\cdot\partial_x u = b(t,x,u), \quad u_{|t=0} = \omega(x).}$$

Revenons aux hypothèses.

- $k = 0, \quad \operatorname{Im} \nu_0(0, x_0, v_0) = \operatorname{Im} a(0, x_0, \omega(x_0)) \neq 0$ est une hypothèse d'ellipticité.
- $k = 1$, $\operatorname{Im} \nu_1 = \operatorname{Im} a'_t + \operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Im} a'_x + \operatorname{Im}(b a'_v)$, l'hypothèse suivante est

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \nu_0\big(0, x, \omega(x)\big) &\equiv 0, \\ \operatorname{Im} \nu_1\big(0, x_0, \omega(x_0)\big) &\neq 0. \end{aligned}$$

- Ainsi de suite : avec $\nu_2 = \mathcal{L}\nu_1, \quad \nu_1 = \mathcal{L}\nu_0, \quad \nu_0 = a$, $\mathcal{L} = \partial_t + a\cdot\partial_x + b\partial_v$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \nu_0\big(0, x, \omega(x)\big) &\equiv 0, \\ \operatorname{Im} \nu_1\big(0, x, \omega(x)\big) &\equiv 0, \\ \operatorname{Im} \nu_2\big(0, x_0, \omega(x_0)\big) &\neq 0. \end{aligned}$$

3. Une version précisée via le front d'onde

Theorem B. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Si le problème de Cauchy*

$$\partial_t u + a(t,x,u)\cdot\partial_x u = b(t,x,u), \quad u_{|t=0} = \omega(x).$$

possède une solution de classe C^{k+1} pour $t \geq 0$ près de $(0, x_0)$, et $\forall x \in \Omega$, $\forall j$ avec $0 \leq j < k$,

$$\operatorname{Im} \nu_j(0,x,\omega(x)) = 0, \ \operatorname{Im} \nu_k(0,x_0,\omega(x_0)) \neq 0,$$

alors, pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $\operatorname{Im} \nu_k(0,x_0,\omega(x_0)) \cdot \xi > 0$, le point $(x_0, \xi) \notin$ front d'onde analytique de ω.

La définition du front d'onde analytique $WF_A\omega$ suit. A minima, la conclusion est que ω doit posséder des propriétés d'analyticité. Ceci déclenche l'instabilité : si ω est analytique, CK fournit une solution analytique locale. Si l'on remplace ω par une fonction $\widetilde{\omega} \in C^\infty$ nulle part analytique (c'est possible), arbitrairement proche dans la topologie C^∞, il ne peut y avoir de solution, sinon $\widetilde{\omega}$ aurait des propriétés d'analyticité d'après le théorème, ce qui n'est pas d'après le choix de $\widetilde{\omega}$.

3. Une version précisée via le front d'onde

Theorem B. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Si le problème de Cauchy*

$$\partial_t u + a(t,x,u) \cdot \partial_x u = b(t,x,u), \quad u_{|t=0} = \omega(x).$$

possède une solution de classe C^{k+1} pour $t \geq 0$ près de $(0, x_0)$, et $\forall x \in \Omega$, $\forall j$ avec $0 \leq j < k$,

$$\operatorname{Im} \nu_j(0, x, \omega(x)) = 0, \ \operatorname{Im} \nu_k(0, x_0, \omega(x_0)) \neq 0,$$

alors, pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $\operatorname{Im} \nu_k(0, x_0, \omega(x_0)) \cdot \xi > 0$, le point $(x_0, \xi) \notin$ front d'onde analytique de ω.

La définition du front d'onde analytique $WF_A\omega$ suit. A minima, la conclusion est que ω doit posséder des propriétés d'analyticité. Ceci déclenche l'instabilité : si ω est analytique, CK fournit une solution analytique locale. Si l'on remplace ω par une fonction $\widetilde{\omega} \in C^\infty$ nulle part analytique (c'est possible), arbitrairement proche dans la topologie C^∞, il ne peut y avoir de solution, sinon $\widetilde{\omega}$ aurait des propriétés d'analyticité d'après le théorème, ce qui n'est pas d'après le choix de $\widetilde{\omega}$.

3. Une version précisée via le front d'onde

Theorem B. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Si le problème de Cauchy*

$$\partial_t u + a(t,x,u) \cdot \partial_x u = b(t,x,u), \quad u_{|t=0} = \omega(x).$$

possède une solution de classe C^{k+1} pour $t \geq 0$ près de $(0, x_0)$, et $\forall x \in \Omega$, $\forall j$ avec $0 \leq j < k$,

$$\operatorname{Im} \nu_j(0, x, \omega(x)) = 0, \ \operatorname{Im} \nu_k\big(0, x_0, \omega(x_0)\big) \neq 0,$$

alors, pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $\operatorname{Im} \nu_k(0, x_0, \omega(x_0)) \cdot \xi > 0$, le point $(x_0, \xi) \notin$ front d'onde analytique de ω.

La définition du front d'onde analytique $WF_A\omega$ suit. A minima, la conclusion est que ω doit posséder des propriétés d'analyticité. Ceci déclenche l'instabilité : si ω est analytique, CK fournit une solution analytique locale. Si l'on remplace ω par une fonction $\widetilde{\omega} \in C^\infty$ nulle part analytique (c'est possible), arbitrairement proche dans la topologie C^∞, il ne peut y avoir de solution, sinon $\widetilde{\omega}$ aurait des propriétés d'analyticité d'après le théorème, ce qui n'est pas d'après le choix de $\widetilde{\omega}$.

3. Une version précisée via le front d'onde

Theorem B. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Si le problème de Cauchy*

$$\partial_t u + a(t,x,u)\cdot\partial_x u = b(t,x,u), \quad u_{|t=0} = \omega(x).$$

possède une solution de classe C^{k+1} pour $t \geq 0$ près de $(0, x_0)$, et $\forall x \in \Omega$, $\forall j$ avec $0 \leq j < k$,

$$\operatorname{Im} \nu_j(0,x,\omega(x)) = 0, \ \operatorname{Im} \nu_k\big(0,x_0,\omega(x_0)\big) \neq 0,$$

alors, pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $\operatorname{Im}\nu_k(0,x_0,\omega(x_0))\cdot\xi > 0$, le point $(x_0,\xi) \notin$ front d'onde analytique de ω.

La définition du front d'onde analytique $WF_A\omega$ suit. A minima, la conclusion est que ω doit posséder des propriétés d'analyticité. Ceci déclenche l'instabilité : si ω est analytique, CK fournit une solution analytique locale. Si l'on remplace ω par une fonction $\widetilde{\omega} \in C^\infty$ nulle part analytique (c'est possible), arbitrairement proche dans la topologie C^∞, il ne peut y avoir de solution, sinon $\widetilde{\omega}$ aurait des propriétés d'analyticité d'après le théorème, ce qui n'est pas d'après le choix de $\widetilde{\omega}$.

3. Une version précisée via le front d'onde

Theorem B. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Si le problème de Cauchy*

$$\partial_t u + a(t,x,u) \cdot \partial_x u = b(t,x,u), \quad u_{|t=0} = \omega(x).$$

possède une solution de classe C^{k+1} pour $t \geq 0$ près de $(0, x_0)$, et $\forall x \in \Omega$, $\forall j$ avec $0 \leq j < k$,

$$\operatorname{Im} \nu_j(0, x, \omega(x)) = 0, \ \operatorname{Im} \nu_k\left(0, x_0, \omega(x_0)\right) \neq 0,$$

alors, pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $\operatorname{Im} \nu_k(0, x_0, \omega(x_0)) \cdot \xi > 0$, le point $(x_0, \xi) \notin$ front d'onde analytique de ω.

La définition du front d'onde analytique $WF_A\omega$ suit. A minima, la conclusion est que ω doit posséder des propriétés d'analyticité. Ceci déclenche l'instabilité : si ω est analytique, CK fournit une solution analytique locale. Si l'on remplace ω par une fonction $\widetilde{\omega} \in C^\infty$ nulle part analytique (c'est possible), arbitrairement proche dans la topologie C^∞, il ne peut y avoir de solution, sinon $\widetilde{\omega}$ aurait des propriétés d'analyticité d'après le théorème, ce qui n'est pas d'après le choix de $\widetilde{\omega}$.

3. Une version précisée via le front d'onde

Theorem B. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Si le problème de Cauchy*

$$\partial_t u + a(t,x,u) \cdot \partial_x u = b(t,x,u), \quad u_{|t=0} = \omega(x).$$

possède une solution de classe C^{k+1} pour $t \geq 0$ près de $(0, x_0)$, et $\forall x \in \Omega$, $\forall j$ avec $0 \leq j < k$,

$$\operatorname{Im} \nu_j(0,x,\omega(x)) = 0, \ \operatorname{Im} \nu_k\big(0,x_0,\omega(x_0)\big) \neq 0,$$

alors, pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $\operatorname{Im} \nu_k(0,x_0,\omega(x_0)) \cdot \xi > 0$, le point $(x_0,\xi) \notin$ front d'onde analytique de ω.

La définition du front d'onde analytique $WF_A\omega$ suit. A minima, la conclusion est que ω doit posséder des propriétés d'analyticité. Ceci déclenche l'instabilité : si ω est analytique, CK fournit une solution analytique locale. Si l'on remplace ω par une fonction $\widetilde{\omega} \in C^\infty$ nulle part analytique (c'est possible), arbitrairement proche dans la topologie C^∞, il ne peut y avoir de solution, sinon $\widetilde{\omega}$ aurait des propriétés d'analyticité d'après le théorème, ce qui n'est pas d'après le choix de $\widetilde{\omega}$.

3. Une version précisée via le front d'onde

Theorem B. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Si le problème de Cauchy*

$$\partial_t u + a(t,x,u) \cdot \partial_x u = b(t,x,u), \quad u_{|t=0} = \omega(x).$$

possède une solution de classe C^{k+1} pour $t \geq 0$ près de $(0, x_0)$, et $\forall x \in \Omega$, $\forall j$ avec $0 \leq j < k$,

$$\operatorname{Im} \nu_j(0, x, \omega(x)) = 0, \; \operatorname{Im} \nu_k \left(0, x_0, \omega(x_0)\right) \neq 0,$$

alors, pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $\operatorname{Im} \nu_k(0, x_0, \omega(x_0)) \cdot \xi > 0$, le point $(x_0, \xi) \notin$ front d'onde analytique de ω.

La définition du front d'onde analytique $WF_A\omega$ suit. A minima, la conclusion est que ω doit posséder des propriétés d'analyticité. Ceci déclenche l'instabilité : si ω est analytique, CK fournit une solution analytique locale. Si l'on remplace ω par une fonction $\widetilde{\omega} \in C^\infty$ nulle part analytique (c'est possible), arbitrairement proche dans la topologie C^∞, il ne peut y avoir de solution, sinon $\widetilde{\omega}$ aurait des propriétés d'analyticité d'après le théorème, ce qui n'est pas d'après le choix de $\widetilde{\omega}$.

3. Une version précisée via le front d'onde

Theorem B. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Si le problème de Cauchy*

$$\partial_t u + a(t,x,u) \cdot \partial_x u = b(t,x,u), \quad u_{|t=0} = \omega(x).$$

possède une solution de classe C^{k+1} pour $t \geq 0$ près de $(0,x_0)$, et $\forall x \in \Omega$, $\forall j$ avec $0 \leq j < k$,

$$\operatorname{Im} \nu_j(0,x,\omega(x)) = 0, \ \operatorname{Im} \nu_k\big(0,x_0,\omega(x_0)\big) \neq 0,$$

alors, pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $\operatorname{Im} \nu_k(0,x_0,\omega(x_0)) \cdot \xi > 0$, le point $(x_0,\xi) \notin$ front d'onde analytique de ω.

La définition du front d'onde analytique $WF_A\omega$ suit. A minima, la conclusion est que ω doit posséder des propriétés d'analyticité. Ceci déclenche l'instabilité : si ω est analytique, CK fournit une solution analytique locale. Si l'on remplace ω par une fonction $\widetilde{\omega} \in C^\infty$ nulle part analytique (c'est possible), arbitrairement proche dans la topologie C^∞, il ne peut y avoir de solution, sinon $\widetilde{\omega}$ aurait des propriétés d'analyticité d'après le théorème, ce qui n'est pas d'après le choix de $\widetilde{\omega}$.

3. Une version précisée via le front d'onde

Theorem B. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Si le problème de Cauchy*

$$\partial_t u + a(t,x,u)\cdot\partial_x u = b(t,x,u), \quad u_{|t=0} = \omega(x).$$

possède une solution de classe C^{k+1} pour $t \geq 0$ près de $(0, x_0)$, et $\forall x \in \Omega$, $\forall j$ avec $0 \leq j < k$,

$$\operatorname{Im}\nu_j(0,x,\omega(x)) = 0, \ \operatorname{Im}\nu_k\big(0,x_0,\omega(x_0)\big) \neq 0,$$

alors, pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $\operatorname{Im}\nu_k(0,x_0,\omega(x_0))\cdot\xi > 0$, le point $(x_0,\xi) \notin$ front d'onde analytique de ω.

La définition du front d'onde analytique $WF_A\omega$ suit. A minima, la conclusion est que ω doit posséder des propriétés d'analyticité. Ceci déclenche l'instabilité : si ω est analytique, CK fournit une solution analytique locale. Si l'on remplace ω par une fonction $\widetilde{\omega} \in C^\infty$ nulle part analytique (c'est possible), arbitrairement proche dans la topologie C^∞, il ne peut y avoir de solution, sinon $\widetilde{\omega}$ aurait des propriétés d'analyticité d'après le théorème, ce qui n'est pas d'après le choix de $\widetilde{\omega}$.

Le front d'onde. Commençons avec le support singulier C^∞. Soit u une distribution sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$: $x_0 \notin \operatorname{singsupp} u$ signifie qu'il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que $u_{|V} \in C^\infty(V)$. Le support singulier est un fermé.

Continuons avec le support singulier analytique : $x_0 \notin \operatorname{singsupp}_A u$ signifie qu'il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que $u_{|V} \in C^\omega(V)$. Le support singulier analytique est un fermé qui contient le support singulier C^∞,

$$\operatorname{singsupp} u \subset \operatorname{singsupp}_A u.$$

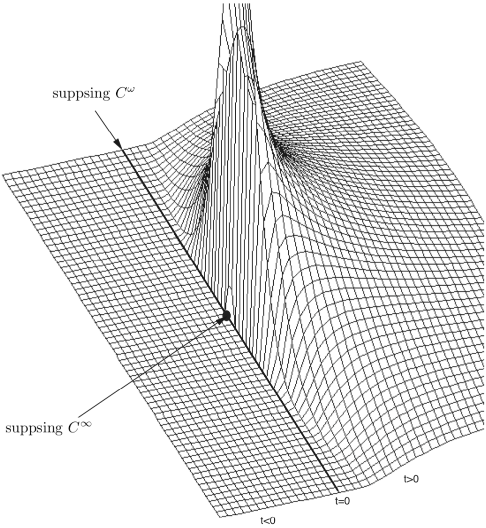
car si u est analytique au voisinage d'un point, elle est aussi C^∞.

Le front d'onde. Commençons avec le support singulier C^∞. Soit u une distribution sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$: $x_0 \notin \operatorname{singsupp} u$ signifie qu'il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que $u_{|V} \in C^\infty(V)$. Le support singulier est un fermé.

Continuons avec le support singulier analytique : $x_0 \notin \operatorname{singsupp}_A u$ signifie qu'il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que $u_{|V} \in C^\omega(V)$. Le support singulier analytique est un fermé qui contient le support singulier C^∞,

$$\operatorname{singsupp} u \subset \operatorname{singsupp}_A u.$$

car si u est analytique au voisinage d'un point, elle est aussi C^∞.



Solution fondamentale de l'équation de la chaleur $\partial_t - \Delta_x$, $\quad H(t)(4\pi t)^{-d/2}e^{-|x|^2/4t}$.

En dimension trois, 0 appartient au support singulier de $H(x_1)$ et de $\delta_0(x)$, mais les structures des singularités sont bien différentes. En particulier,

$$a_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial H}{\partial x_3} \quad \text{sont } C^\infty$$

de sorte que les champs tangents à l'hypersurface $\Sigma = \{x_1 = 0\}$ sont "lisses pour H" : le front d'onde est

$$\Big(\underbrace{0, x_2, x_3}_{\in\Sigma} ; \underbrace{(\text{champs lisses pour } H)^\perp}_{\text{covecteurs}(\xi_1,0,0)}\Big) = \text{conormal}(\Sigma).$$

Pour la masse de Dirac, pas de champ lisse en 0 : le front d'onde est $\{0\} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$.

En dimension trois, 0 appartient au support singulier de $H(x_1)$ et de $\delta_0(x)$, mais les structures des singularités sont bien différentes. En particulier,

$$a_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial H}{\partial x_3} \quad \text{sont } C^\infty$$

de sorte que les champs tangents à l'hypersurface $\Sigma = \{x_1 = 0\}$ sont "lisses pour H" : le front d'onde est

$$\Big(\underbrace{0, x_2, x_3}_{\in\Sigma}; \underbrace{(\text{champs lisses pour } H)^\perp}_{\text{covecteurs}(\xi_1,0,0)}\Big) = \text{conormal}(\Sigma).$$

Pour la masse de Dirac, pas de champ lisse en 0 : le front d'onde est $\{0\} \times (\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$.

En dimension trois, 0 appartient au support singulier de $H(x_1)$ et de $\delta_0(x)$, mais les structures des singularités sont bien différentes. En particulier,

$$a_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial H}{\partial x_3} \quad \text{sont } C^\infty$$

de sorte que les champs tangents à l'hypersurface $\Sigma = \{x_1 = 0\}$ sont "lisses pour H" : le front d'onde est

$$\Big(\underbrace{0, x_2, x_3}_{\in\Sigma}; \underbrace{(\text{champs lisses pour } H)^\perp}_{\text{covecteurs}(\xi_1, 0, 0)}\Big) = \text{conormal}(\Sigma).$$

Pour la masse de Dirac, pas de champ lisse en 0 : le front d'onde est $\{0\} \times (\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$.

En dimension trois, 0 appartient au support singulier de $H(x_1)$ et de $\delta_0(x)$, mais les structures des singularités sont bien différentes. En particulier,

$$a_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial H}{\partial x_3} \quad \text{sont } C^\infty$$

de sorte que les champs tangents à l'hypersurface $\Sigma = \{x_1 = 0\}$ sont "lisses pour H" : le front d'onde est

$$\big(\underbrace{0, x_2, x_3}_{\in\Sigma}; \underbrace{(\text{champs lisses pour } H)^\perp}_{\text{covecteurs}(\xi_1,0,0)}\big) = \text{conormal}(\Sigma).$$

Pour la masse de Dirac, pas de champ lisse en 0 : le front d'onde est $\{0\} \times (\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$.

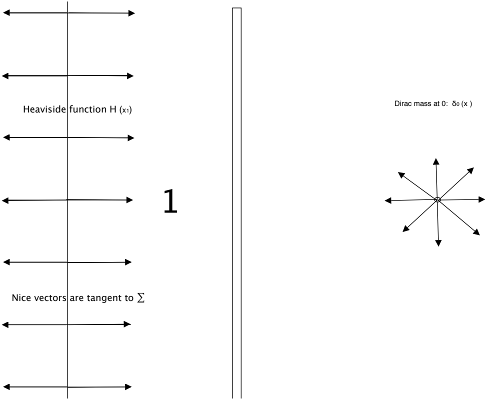


FIGURE : Fronts d'onde $H(x_1)$ et $\delta_0(x)$.

Le front d'onde d'une distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est un fermé de $\dot{T}^*(\Omega)$ de première projection singsupp u. Cela prend en compte l'anisotropie éventuelle des singularités.

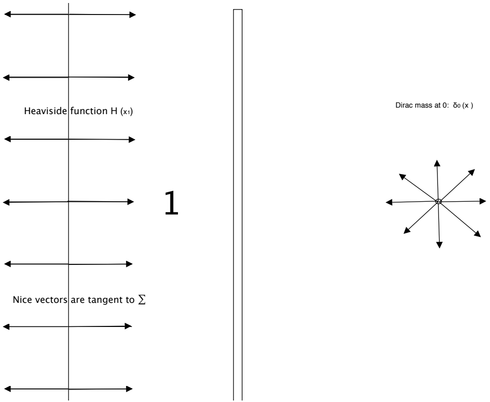


FIGURE : Fronts d'onde $H(x_1)$ et $\delta_0(x)$.

Le front d'onde d'une distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est un fermé de $\dot{T}^*(\Omega)$ de première projection singsupp u. Cela prend en compte l'anisotropie éventuelle des singularités.

Le front d'onde, via la transformation de Fourier.

Si $x \in \operatorname{singsupp}_\infty u$, le théorème de Paley-Wiener nous dit qu'il doit exister $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que

$$|\widehat{\chi u}(\lambda\xi)| \quad \text{n'est pas } O(\lambda^{-\infty}).$$

Ces (x,ξ) décrivent le $WF_\infty u$. En particulier

$$p_1(WF_\infty u) = \operatorname{singsupp}_\infty u.$$

Plus formellement, $(x_0,\xi_0) \notin WF_\infty u$: $\exists \chi \in C_c^\infty, \chi(x_0) \neq 0$, $\exists W_0 \in \mathcal{V}_{\xi_0/|\xi_0|}$ avec

$$\forall N, \exists C_N, \forall \xi \in W_0, \forall \lambda \geq 1, \quad |\widehat{\chi u}(\lambda\xi)| \leq C_N \lambda^{-N}.$$

Le front d'onde, via la transformation de Fourier.

Si $x \in \operatorname{singsupp}_\infty u$, le théorème de Paley-Wiener nous dit qu'il doit exister $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que

$$|\widehat{\chi u}(\lambda\xi)| \quad \text{n'est pas } O(\lambda^{-\infty}).$$

Ces (x, ξ) décrivent le $WF_\infty u$. En particulier

$$p_1(WF_\infty u) = \operatorname{singsupp}_\infty u.$$

Plus formellement, $(x_0, \xi_0) \notin WF_\infty u$: $\exists \chi \in C_c^\infty, \chi(x_0) \neq 0$, $\exists W_0 \in \mathcal{V}_{\xi_0/|\xi_0|}$ avec

$$\forall N, \exists C_N, \forall \xi \in W_0, \forall \lambda \geq 1, \quad |\widehat{\chi u}(\lambda\xi)| \leq C_N \lambda^{-N}.$$

Le front d'onde, via la transformation de Fourier.

Si $x \in \operatorname{singsupp}_\infty u$, le théorème de Paley-Wiener nous dit qu'il doit exister $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que

$$|\widehat{\chi u}(\lambda\xi)| \quad \text{n'est pas } O(\lambda^{-\infty}).$$

Ces (x, ξ) décrivent le $WF_\infty u$. En particulier

$$p_1(WF_\infty u) = \operatorname{singsupp}_\infty u.$$

Plus formellement, $(x_0, \xi_0) \notin WF_\infty u : \exists \chi \in C_c^\infty, \chi(x_0) \neq 0$, $\exists W_0 \in \mathcal{V}_{\xi_0/|\xi_0|}$ avec

$$\forall N, \exists C_N, \forall \xi \in W_0, \forall \lambda \geq 1, \quad |\widehat{\chi u}(\lambda\xi)| \leq C_N \lambda^{-N}.$$

Le front d'onde, via la transformation de Fourier.

Si $x \in \operatorname{singsupp}_\infty u$, le théorème de Paley-Wiener nous dit qu'il doit exister $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que

$$|\widehat{\chi u}(\lambda\xi)| \quad \text{n'est pas } O(\lambda^{-\infty}).$$

Ces (x, ξ) décrivent le $WF_\infty u$. En particulier

$$p_1(WF_\infty u) = \operatorname{singsupp}_\infty u.$$

Plus formellement, $(x_0, \xi_0) \notin WF_\infty u$: $\exists \chi \in C_c^\infty, \chi(x_0) \neq 0$, $\exists W_0 \in \mathcal{V}_{\xi_0/|\xi_0|}$ avec

$$\forall N, \exists C_N, \forall \xi \in W_0, \forall \lambda \geq 1, \quad |\widehat{\chi u}(\lambda\xi)| \leq C_N \lambda^{-N}.$$

Le front d'onde analytique, via la transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer

On a vu que $\operatorname{singsupp}_\infty u \subset \operatorname{singsupp}_A u$. On veut définir le front d'onde analytique $WF_A(u) \supset WF_\infty(u)$ de telle sorte que

$$p_1(WF_A u) = \operatorname{singsupp}_A u.$$

On utilise la transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer : pour $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on définit

$$(Tv)(z,\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\lambda(z-x)^2} v(x)dx, \qquad z \in \mathbb{C}, \lambda > 0.$$

$(x_0, \xi_0) \notin WF_A(u)$ signifie

$$\exists W_0 \in \mathcal{V}_{x_0 - i\xi_0}, \exists \chi_0 \in C_c^\infty(\Omega), \chi_0(x) = 1 \text{ près de } x_0, \exists \epsilon_0 > 0 \quad \text{with}$$

$$\sup_{\lambda \geq 1, z \in W_0} e^{\epsilon_0 \lambda} |(T\chi_0 u)(z,\lambda)| e^{-\pi\lambda(\operatorname{Im} z)^2} < +\infty.$$

Le front d'onde analytique, via la transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer

On a vu que $\operatorname{singsupp}_\infty u \subset \operatorname{singsupp}_A u$. On veut définir le front d'onde analytique $WF_A(u) \supset WF_\infty(u)$ de telle sorte que

$$p_1(WF_A u) = \operatorname{singsupp}_A u.$$

On utilise la transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer : pour $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on définit

$$(Tv)(z,\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\lambda(z-x)^2} v(x)dx, \qquad z \in \mathbb{C}, \lambda > 0.$$

$(x_0, \xi_0) \notin WF_A(u)$ signifie

$$\exists W_0 \in \mathcal{V}_{x_0 - i\xi_0}, \exists \chi_0 \in C_c^\infty(\Omega), \chi_0(x) = 1 \text{ près de } x_0, \exists \epsilon_0 > 0 \quad \text{with}$$

$$\sup_{\lambda \geq 1, z \in W_0} e^{\epsilon_0 \lambda} |(T\chi_0 u)(z,\lambda)| e^{-\pi\lambda(\operatorname{Im} z)^2} < +\infty.$$

Le front d'onde analytique, via la transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer

On a vu que $\operatorname{singsupp}_\infty u \subset \operatorname{singsupp}_A u$. On veut définir le front d'onde analytique $WF_A(u) \supset WF_\infty(u)$ de telle sorte que

$$p_1(WF_A u) = \operatorname{singsupp}_A u.$$

On utilise la transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer : pour $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on définit

$$(Tv)(z,\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\lambda(z-x)^2} v(x)dx, \qquad z \in \mathbb{C}, \lambda > 0.$$

$(x_0, \xi_0) \notin WF_A(u)$ signifie

$\exists W_0 \in \mathcal{V}_{x_0 - i\xi_0}, \exists \chi_0 \in C_c^\infty(\Omega), \chi_0(x) = 1$ près de $x_0, \exists \epsilon_0 > 0$ with

$$\sup_{\lambda \geq 1, z \in W_0} e^{\epsilon_0 \lambda} |(T\chi_0 u)(z,\lambda)| e^{-\pi\lambda(\operatorname{Im} z)^2} < +\infty.$$

Le front d'onde analytique, via la transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer

On a vu que $\operatorname{singsupp}_\infty u \subset \operatorname{singsupp}_A u$. On veut définir le front d'onde analytique $WF_A(u) \supset WF_\infty(u)$ de telle sorte que

$$p_1(WF_A u) = \operatorname{singsupp}_A u.$$

On utilise la transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer : pour $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on définit

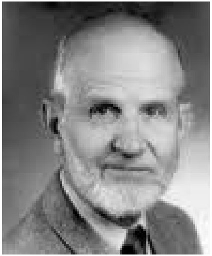
$$(Tv)(z,\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\lambda(z-x)^2} v(x)dx, \qquad z \in \mathbb{C}, \lambda > 0.$$

$(x_0, \xi_0) \notin WF_A(u)$ signifie

$$\exists W_0 \in \mathcal{V}_{x_0 - i\xi_0}, \exists \chi_0 \in C_c^\infty(\Omega), \chi_0(x) = 1 \text{ près de } x_0, \exists \epsilon_0 > 0 \quad \text{with}$$
$$\sup_{\lambda \geq 1, z \in W_0} e^{\epsilon_0 \lambda} |(T\chi_0 u)(z,\lambda)| e^{-\pi\lambda(\operatorname{Im} z)^2} < +\infty.$$

Mikio Sato, Lars Hörmander, 1970 : Pour une équation de type principal réel $Pu = 0$ (e.g. l'équation des ondes), le front d'onde de u est invariant par le flot hamiltonien du symbole principal : les singularités se propagent le long des courbes bicaractéristiques.

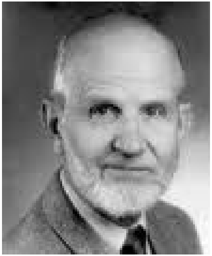
Mikio Sato, né en 1928.



Lars Hörmander, 1931–2012.

Mikio Sato, Lars Hörmander, 1970 : Pour une équation de type principal réel $Pu = 0$ (e.g. l'équation des ondes), le front d'onde de u est invariant par le flot hamiltonien du symbole principal : les singularités se propagent le long des courbes bicaractéristiques.

Mikio Sato, né en 1928.



Lars Hörmander, 1931–2012.

Jean-Michel Bony, 1981 : Ce résultat de propagation est valide également pour des équations non linéaires et des singularités faibles.

Démonstration du théorème B.

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,u)\partial_{x_j} u = b(t,x,u), \qquad u(0,x) = \omega(x).$$

Sous une hypothèse de finitude ($\operatorname{Im} \nu_k \neq 0$), vérifiée dans les cas elliptiques et pour l'équation de Burgers complexe, on veut démontrer que ω possède des propriétés d'analyticité, i.e.

$$(WF_A \omega)^c \neq \emptyset.$$

L'avantage de la description des singularités par le front d'onde est non seulement que celle-ci prend en compte les anisotropies du lieu singulier, mais également qu'elle permet d'obtenir la régularité de u via la preuve d'inégalités sur certaines transformations appliquées à u.

Démonstration du théorème B.

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,u)\partial_{x_j} u = b(t,x,u), \qquad u(0,x) = \omega(x).$$

Sous une hypothèse de finitude ($\operatorname{Im} \nu_k \neq 0$), vérifiée dans les cas elliptiques et pour l'équation de Burgers complexe, on veut démontrer que ω possède des propriétés d'analyticité, i.e.

$$\left(WF_A \omega\right)^c \neq \emptyset.$$

L'avantage de la description des singularités par le front d'onde est non seulement que celle-ci prend en compte les anisotropies du lieu singulier, mais également qu'elle permet d'obtenir la régularité de u via la preuve d'inégalités sur certaines transformations appliquées à u.

Démonstration du théorème B.

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,u)\partial_{x_j} u = b(t,x,u), \qquad u(0,x) = \omega(x).$$

Sous une hypothèse de finitude ($\operatorname{Im} \nu_k \neq 0$), vérifiée dans les cas elliptiques et pour l'équation de Burgers complexe, on veut démontrer que ω possède des propriétés d'analyticité, i.e.

$$\left(WF_A \omega\right)^c \neq \emptyset.$$

L'avantage de la description des singularités par le front d'onde est non seulement que celle-ci prend en compte les anisotropies du lieu singulier, mais également qu'elle permet d'obtenir la régularité de u via la preuve d'inégalités sur certaines transformations appliquées à u.

Démonstration du théorème B.

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,u)\partial_{x_j} u = b(t,x,u), \qquad u(0,x) = \omega(x).$$

Sous une hypothèse de finitude ($\operatorname{Im} \nu_k \neq 0$), vérifiée dans les cas elliptiques et pour l'équation de Burgers complexe, on veut démontrer que ω possède des propriétés d'analyticité, i.e.

$$\left(WF_A \omega\right)^c \neq \emptyset.$$

L'avantage de la description des singularités par le front d'onde est non seulement que celle-ci prend en compte les anisotropies du lieu singulier, mais également qu'elle permet d'obtenir la régularité de u via la preuve d'inégalités sur certaines transformations appliquées à u.

Démonstration du théorème B.

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,u)\partial_{x_j} u = b(t,x,u), \qquad u(0,x) = \omega(x).$$

Sous une hypothèse de finitude ($\mathrm{Im}\, \nu_k \neq 0$), vérifiée dans les cas elliptiques et pour l'équation de Burgers complexe, on veut démontrer que ω possède des propriétés d'analyticité, i.e.

$$\left(WF_A \omega\right)^c \neq \emptyset.$$

L'avantage de la description des singularités par le front d'onde est non seulement que celle-ci prend en compte les anisotropies du lieu singulier, mais également qu'elle permet d'obtenir la régularité de u via la preuve d'inégalités sur certaines transformations appliquées à u.

Après quelques calculs ...

$$\overbrace{(T_{\chi,q}\omega)(z,\lambda)}^{\substack{\text{FBI de } \omega \text{ :} \\ \text{on veut une décroissance exponentielle en } \lambda}} = \overbrace{\int_{\Omega_0} \widetilde{V}(s,x) \exp\left[-\lambda q\big(\widetilde{Z}(s,x)-z\big)^2\right]\chi(x) J(s,x)\,dx}^{=I_1(z,\lambda)}$$

$$\underbrace{- \int_0^s \int_{\Omega_0} \widetilde{a}(t,x)\cdot d\chi(x) \exp\left[-\lambda q\big(\widetilde{Z}(t,x)-z\big)^2\right] \widetilde{V}(t,x) J(t,x)\,dt\,dx}_{\text{facile car } d\chi \equiv 0 \text{ près de } x_0}.$$

Pour contrôler I_1, on doit minorer $\operatorname{Re} q\big(\widetilde{Z}(s,x)-z\big)^2$. Ici q est une forme quadratique et $\widetilde{Z}(t,x) = Z(t,x,u(t,x))$ où Z est une intégrale première du champ $\mathcal{L}$ (obtenue paradoxalement avec CK, qui contribue de manière décisive à la démonstration de son instabilité). On examine le développement de Taylor de $\widetilde{Z}$: l'hypothèse de finitude sur les ν_k intervient et l'on obtient

$$\operatorname{Re} q\big(\widetilde{Z}(s,x)-z\big)^2 + q(\operatorname{Im} z)^2 \gtrsim s^{2k+2} q\big(\operatorname{Im} \nu_k(0,x_0,\omega(x_0))\big)^2.$$

Après quelques calculs ...

$$\overbrace{(T_{\chi,q}\omega)(z,\lambda)}^{\substack{\text{FBI de } \omega \text{ :} \\ \text{on veut une décroissance exponentielle en } \lambda}} = \overbrace{\int_{\Omega_0} \widetilde{V}(s,x) \exp\left[-\lambda q\left(\widetilde{Z}(s,x)-z\right)^2\right]\chi(x)J(s,x)dx}^{=I_1(z,\lambda)}$$

$$\underbrace{- \int_0^s \int_{\Omega_0} \widetilde{a}(t,x)\cdot d\chi(x) \exp\left[-\lambda q\left(\widetilde{Z}(t,x)-z\right)^2\right]\widetilde{V}(t,x)J(t,x)dtdx}_{\text{facile car } d\chi \equiv 0 \text{ près de } x_0}.$$

Pour contrôler I_1, on doit minorer $\mathrm{Re}\, q\left(\widetilde{Z}(s,x)-z\right)^2$. Ici q est une forme quadratique et $\widetilde{Z}(t,x) = Z(t,x,u(t,x))$ où Z est une intégrale première du champ $\mathcal{L}$ (obtenue paradoxalement avec CK, qui contribue de manière décisive à la démonstration de son instabilité). On examine le développement de Taylor de $\widetilde{Z}$: l'hypothèse de finitude sur les ν_k intervient et l'on obtient

$$\mathrm{Re}\, q\left(\widetilde{Z}(s,x)-z\right)^2 + q(\mathrm{Im}\, z)^2 \gtrsim s^{2k+2} q\left(\mathrm{Im}\, \nu_k(0,x_0,\omega(x_0))\right)^2.$$

Après quelques calculs ...

$$\overbrace{(T_{\chi,q}\omega)(z,\lambda)}^{\substack{\text{FBI de } \omega \text{ :}\\ \text{on veut une décroissance exponentielle en } \lambda}} = \overbrace{\int_{\Omega_0} \widetilde{V}(s,x) \exp\left[-\lambda q\left(\widetilde{Z}(s,x)-z\right)^2\right]\chi(x)J(s,x)dx}^{=I_1(z,\lambda)}$$
$$- \underbrace{\int_0^s \int_{\Omega_0} \widetilde{a}(t,x)\cdot d\chi(x) \exp\left[-\lambda q\left(\widetilde{Z}(t,x)-z\right)^2\right]\widetilde{V}(t,x)J(t,x)dtdx}_{\text{facile car } d\chi \equiv 0 \text{ près de } x_0}\,.$$

Pour contrôler I_1, on doit minorer $\operatorname{Re} q\left(\widetilde{Z}(s,x)-z\right)^2$. Ici q est une forme quadratique et $\widetilde{Z}(t,x) = Z(t,x,u(t,x))$ où Z est une intégrale première du champ $\mathcal{L}$ (obtenue paradoxalement avec CK, qui contribue de manière décisive à la démonstration de son instabilité). On examine le développement de Taylor de $\widetilde{Z}$: l'hypothèse de finitude sur les ν_k intervient et l'on obtient

$$\operatorname{Re} q\left(\widetilde{Z}(s,x)-z\right)^2 + q(\operatorname{Im} z)^2 \gtrsim s^{2k+2} q\left(\operatorname{Im} \nu_k(0,x_0,\omega(x_0))\right)^2.$$

Après quelques calculs ...

$$\overbrace{(T_{\chi,q}\omega)(z,\lambda)}^{\substack{\text{FBI de } \omega \text{ :}\\ \text{on veut une décroissance exponentielle en } \lambda}} = \overbrace{\int_{\Omega_0} \widetilde{V}(s,x) \exp\left[-\lambda q\left(\widetilde{Z}(s,x)-z\right)^2\right]\chi(x)J(s,x)dx}^{=I_1(z,\lambda)}$$

$$- \underbrace{\int_0^s \int_{\Omega_0} \widetilde{a}(t,x)\cdot d\chi(x) \exp\left[-\lambda q\left(\widetilde{Z}(t,x)-z\right)^2\right]\widetilde{V}(t,x)J(t,x)dtdx}_{\text{facile car } d\chi \equiv 0 \text{ près de } x_0} .$$

Pour contrôler I_1, on doit minorer $\operatorname{Re} q\left(\widetilde{Z}(s,x)-z\right)^2$. Ici q est une forme quadratique et $\widetilde{Z}(t,x) = Z(t,x,u(t,x))$ où Z est une intégrale première du champ $\mathcal{L}$ (obtenue paradoxalement avec CK, qui contribue de manière décisive à la démonstration de son instabilité). On examine le développement de Taylor de $\widetilde{Z}$: l'hypothèse de finitude sur les ν_k intervient et l'on obtient

$$\operatorname{Re} q\left(\widetilde{Z}(s,x)-z\right)^2 + q(\operatorname{Im} z)^2 \gtrsim s^{2k+2} q\left(\operatorname{Im} \nu_k(0,x_0,\omega(x_0))\right)^2 .$$

Après quelques calculs ...

$$\overbrace{(T_{\chi,q}\omega)(z,\lambda)}^{\substack{\text{FBI de } \omega\ : \\ \text{on veut une décroissance exponentielle en } \lambda}} = \overbrace{\int_{\Omega_0} \widetilde{V}(s,x) \exp\left[-\lambda q\big(\widetilde{Z}(s,x)-z\big)^2\right]\chi(x)J(s,x)dx}^{=I_1(z,\lambda)}$$
$$\underbrace{-\int_0^s\int_{\Omega_0} \widetilde{a}(t,x)\cdot d\chi(x)\exp\left[-\lambda q\big(\widetilde{Z}(t,x)-z\big)^2\right]\widetilde{V}(t,x)J(t,x)dtdx}_{\text{facile car } d\chi\equiv 0 \text{ près de } x_0}\,.$$

Pour contrôler I_1, on doit minorer $\operatorname{Re} q\big(\widetilde{Z}(s,x)-z\big)^2$. Ici q est une forme quadratique et $\widetilde{Z}(t,x)=Z(t,x,u(t,x))$ où Z est une intégrale première du champ $\mathcal{L}$ (obtenue paradoxalement avec CK, qui contribue de manière décisive à la démonstration de son instabilité). On examine le développement de Taylor de $\widetilde{Z}$: l'hypothèse de finitude sur les ν_k intervient et l'on obtient

$$\operatorname{Re} q\big(\widetilde{Z}(s,x)-z\big)^2 + q(\operatorname{Im} z)^2 \gtrsim s^{2k+2} q\big(\operatorname{Im}\nu_k(0,x_0,\omega(x_0))\big)^2.$$

Après quelques calculs ...

$$\overbrace{(T_{\chi,q}\omega)(z,\lambda)}^{\substack{\text{FBI de } \omega : \\ \text{on veut une décroissance exponentielle en } \lambda}} = \overbrace{\int_{\Omega_0} \widetilde{V}(s,x)\exp\left[-\lambda q\left(\widetilde{Z}(s,x)-z\right)^2\right]\chi(x)J(s,x)dx}^{=I_1(z,\lambda)}$$
$$- \underbrace{\int_0^s \int_{\Omega_0} \widetilde{a}(t,x)\cdot d\chi(x)\exp\left[-\lambda q\left(\widetilde{Z}(t,x)-z\right)^2\right]\widetilde{V}(t,x)J(t,x)dtdx}_{\text{facile car } d\chi \equiv 0 \text{ près de } x_0}.$$

Pour contrôler I_1, on doit minorer $\operatorname{Re} q\left(\widetilde{Z}(s,x)-z\right)^2$. Ici q est une forme quadratique et $\widetilde{Z}(t,x) = Z(t,x,u(t,x))$ où Z est une intégrale première du champ $\mathcal{L}$ (obtenue paradoxalement avec CK, qui contribue de manière décisive à la démonstration de son instabilité). On examine le développement de Taylor de $\widetilde{Z}$: l'hypothèse de finitude sur les ν_k intervient et l'on obtient

$$\operatorname{Re} q\left(\widetilde{Z}(s,x)-z\right)^2 + q(\operatorname{Im} z)^2 \gtrsim s^{2k+2} q\left(\operatorname{Im} \nu_k(0,x_0,\omega(x_0))\right)^2.$$

Après quelques calculs ...

$$\overbrace{(T_{\chi,q}\omega)(z,\lambda)}^{\substack{\text{FBI de } \omega \text{ :} \\ \text{on veut une décroissance exponentielle en } \lambda}} = \overbrace{\int_{\Omega_0} \widetilde{V}(s,x)\exp\left[-\lambda q\left(\widetilde{Z}(s,x)-z\right)^2\right]\chi(x)J(s,x)dx}^{=I_1(z,\lambda)}$$
$$\underbrace{-\int_0^s\int_{\Omega_0}\widetilde{a}(t,x)\cdot d\chi(x)\exp\left[-\lambda q\left(\widetilde{Z}(t,x)-z\right)^2\right]\widetilde{V}(t,x)J(t,x)dtdx}_{\text{facile car } d\chi\equiv 0 \text{ près de } x_0}.$$

Pour contrôler I_1, on doit minorer $\operatorname{Re} q\left(\widetilde{Z}(s,x)-z\right)^2$. Ici q est une forme quadratique et $\widetilde{Z}(t,x)=Z(t,x,u(t,x))$ où Z est une intégrale première du champ $\mathcal{L}$ (obtenue paradoxalement avec CK, qui contribue de manière décisive à la démonstration de son instabilité). On examine le développement de Taylor de $\widetilde{Z}$: l'hypothèse de finitude sur les ν_k intervient et l'on obtient

$$\operatorname{Re} q\left(\widetilde{Z}(s,x)-z\right)^2 + q(\operatorname{Im} z)^2 \gtrsim s^{2k+2} q\left(\operatorname{Im}\nu_k(0,x_0,\omega(x_0))\right)^2.$$

Après quelques calculs ...

$$\overbrace{(T_{\chi,q}\omega)(z,\lambda)}^{\substack{\text{FBI de } \omega : \\ \text{on veut une décroissance exponentielle en } \lambda}} = \overbrace{\int_{\Omega_0} \widetilde{V}(s,x) \exp\left[-\lambda q\big(\widetilde{Z}(s,x)-z\big)^2\right]\chi(x)J(s,x)dx}^{=I_1(z,\lambda)}$$
$$- \underbrace{\int_0^s \int_{\Omega_0} \widetilde{a}(t,x)\cdot d\chi(x) \exp\left[-\lambda q\big(\widetilde{Z}(t,x)-z\big)^2\right]\widetilde{V}(t,x)J(t,x)dtdx}_{\text{facile car } d\chi \equiv 0 \text{ près de } x_0}.$$

Pour contrôler I_1, on doit minorer $\operatorname{Re} q\big(\widetilde{Z}(s,x)-z\big)^2$. Ici q est une forme quadratique et $\widetilde{Z}(t,x) = Z(t,x,u(t,x))$ où Z est une intégrale première du champ $\mathcal{L}$ (obtenue paradoxalement avec CK, qui contribue de manière décisive à la démonstration de son instabilité). On examine le développement de Taylor de $\widetilde{Z}$: l'hypothèse de finitude sur les ν_k intervient et l'on obtient

$$\operatorname{Re} q\big(\widetilde{Z}(s,x)-z\big)^2 + q(\operatorname{Im} z)^2 \gtrsim s^{2k+2} q\big(\operatorname{Im} \nu_k(0,x_0,\omega(x_0))\big)^2.$$

Une référence récente avec une bibliographie détaillée : le papier

Instability of the Cauchy-Kovalevskaya solution for a class of non-linear systems

de N. Lerner, Y. Morimoto, C.-J. Xu paru en 2010 dans l'

American Journal of Mathematics.

Une référence récente avec une bibliographie détaillée : le papier

Instability of the Cauchy-Kovalevskaya solution for a class of non-linear systems

de N. Lerner, Y. Morimoto, C.-J. Xu paru en 2010 dans l'

American Journal of Mathematics.

Merci pour votre attention.