Université Joseph Fourier

Licence de Mathématiques, L3, 2011-2012.

Examen, 4 janvier 2012, durée : 4 heures

Documents et calculatrices interdits. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Voici un barème indicatif. Exercice "autour du cours" : 8 points ; Exercice 1 : 4 points ; Exercice 2 : 5 points ; Exercice 3 : 7 points.

Autour du cours

Dans toute cette partie, constituée de questions de cours ou d'applications directes du cours, les questions sont indépendantes.

(1) Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $f\colon X \to Y$ une application continue. Vrai ou faux (donner une preuve ou bien un contre-exemple) :

(a) $U \subset X$ ouvert $\Rightarrow\ f(U)$ ouvert.
FAUX. Prendre $f = \sin$ et $U =]0, \pi[$.

(b) $A \subset Y$ fermé $\Rightarrow\ f^{-1}(A)$ fermé.
VRAI. Passer au complémentaire dans la définition de continuité avec les ouverts.

(c) $K \subset X$ compact $\Rightarrow\ f(K)$ compact.
VRAI. Prendre une suite $\{y_n \in f(K)\}$; écrire $y_n = f(x_n)$. Extraire une sous-suite convergente de $\{x_n\}$. Conclure grâce à la continuité de f.

(d) $L \subset Y$ compact $\Rightarrow\ f^{-1}(L)$ compact.
FAUX. Prendre $f = \arctan$ et $Y =]-\pi/2, \pi/2[$.

(2) Soit (E, d) un espace compact. Montrer qu'il existe une suite (x_n) de E dense dans E.
RÉPONSE. Compact implique pré-compact. On couvre E avec un nombre fini de boules de rayon 1 ; puis on fait de même avec un nombre fini de boules de rayon $1/2$ et ainsi de suite pour $1/n$. Les centres de ces boules forment une suite dense dans E (on laisse compléter la preuve).

(3) Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que la distance $d' = \min(d, 1)$ induit sur X la même topologie que d. Montrer que une suite $\{x_n\}$ dans X est de Cauchy par rapport à d si et seulement si elle l'est par rapport à d'.
RÉPONSE. En effet les boules ouvertes de rayon $r \leq 1$ coïncident. Considérons une partie O ; O est ouverte si pour chaque point $x \in O$ il existe une boule centré en x et contenue dans O. Or si une telle boule existe et a rayon

> 1, la boule rayon 1 convient aussi. Ainsi, les collections d'ouverts par rapport à d et à d' coïncident. La deuxième partie suit de la définition de suite de Cauchy par rapport à d et d'

(1) Pour tout ε on à (C_ε) : il existe N tel que $\forall p, q \geq N \; d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.

(2) Pour tout ε on à (C'_ε) : il existe N tel que $\forall p, q \geq N \; d'(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.

Pour $\varepsilon \leq 1$, on a $(C'_\varepsilon) = (C'_\varepsilon)$. Pour tout $\varepsilon > 1$, on a $(C'_\varepsilon) = (C'_1) = (C_1) \Rightarrow (C_\varepsilon)$. Ainsi

$$(1) \Leftrightarrow \forall\varepsilon \; (C_\varepsilon) \Rightarrow \forall\varepsilon \leq 1 \; (C_\varepsilon) \Leftrightarrow \forall\varepsilon \leq 1 \; (C'_\varepsilon) \Leftrightarrow \forall\varepsilon \; (C'_\varepsilon) \Leftrightarrow (2).$$

Réciproquement

$$(2) \Leftrightarrow \forall\varepsilon \; (C'_\varepsilon) \Rightarrow \forall\varepsilon \leq 1 \; (C'_\varepsilon) \Leftrightarrow \forall\varepsilon \leq 1 \; (C_\varepsilon) \Leftrightarrow \forall\varepsilon \; (C_\varepsilon) \Leftrightarrow (1).$$

(4) Montrer que l'image continue d'un connexe est connexe.
RÉPONSE. Admettons par absurde que l'image de A n'est pas connexe et démontrons que A n'est pas connexe. Or prenons deux parties ouvertes et fermées qui déconnectent l'image $f(A)$ de A. Leurs images réciproques déconnectent A (à compléter).

(5) Soit $P \in \mathbb{Q}[x]$ un polynôme à coefficients rationnels. On regarde P comme une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on note Γ_P le graphe de P

$$\Gamma_P = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \mid y = P(x)\}.$$

Soit $B = \cup_P \Gamma_P$ l'union de tout les graphes de polynômes à coefficients rationnels. Montrer que $A = \mathbb{R}^2 \setminus B$ est une partie dense de $\mathbb{R}^2$.
RÉPONSE. Noter que $\mathbb{Q}[x]$ est dénombrable (à compléter). Alors l'énoncé suit du théorème de Baire et de la densité de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_P$.

(6) Soit X un espace métrique, et soit $f\colon X \to X$ une application lipschitzienne de constante $k < 1$. Montrer que f a au plus un point fixe (un point x de X est dit fixe pour f si $f(x) = x$).
RÉPONSE. Admettons deux points fixes distincts. Leur distance n'est pas nulle. On applique f aux deux points ; la lipschitziennité entraine une contradiction.

(7) Soit X un espace métrique complet, soit $f\colon X \to X$ une application lipschitzienne de constante $k < 1$. Montrer que f a un point fixe.
RÉPONSE. Pour un point x quelconque considérer la suite x, $f(x)$, $f(f(x))$,...On prouve aisément que la suite est de Cauchy.

(8) Soient X et Y deux parties complètes d'un espace métrique donné. Montrer que $X \cup Y$ est complet.
RÉPONSE. Prendre une suite (x_n) de Cauchy dans $X \cup Y$ et montrer qu'elle sous-converge. Cela suffit pour la convergence. La sous-convergence découle du fait que soit $\{n \mid x_n \in X\}$ soit $\{n \mid x_n \in Y\}$ est infini. On peut donc extraire une sous-suite à valeurs dans X ou dans Y.

Exercice 1

Dans le cours on a vu le théorème d'Ascoli sous la forme suivante.

Théorème 1. *Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques compacts et soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions continues dans l'espace $\mathcal{C}(E, F)$ des fonctions continues de E dans F muni de la distance*

$$\sigma(f, g) = \max_{x \in E} \delta(f(x), g(x)).$$

Si la famille $\mathcal{F}$ est fermée et équicontinue, alors $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(E, F)$ est une partie compacte.

On va montrer ici que, réciproquement, la compacité équivaut à imposer que $\mathcal{F}$ est fermée et équicontinue. Autrement dit, on prouve le théorème suivant.

Théorème 2. *Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques compacts et soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions continues dans $\mathcal{C}(E, F)$. Alors, si la famille $\mathcal{F}$ est une partie compacte, elle est fermée et équicontinue.*

On admet $\mathcal{F}$ compacte.

(1) Montrer que que $\mathcal{F}$ est fermée.
RÉPONSE. Compact implique borné.

(2) Montrer que, si $\mathcal{F}$ n'est pas équicontinue, il existe $x \in E$, $\varepsilon > 0$ et deux suites $\{f_n \in \mathcal{F}\}$, $\{x_n \in E\}$ tels que

$$(*) \qquad d(x_n, x) < \frac{1}{n}, \qquad \delta(f_n(x_n), f_n(x)) \geq \varepsilon.$$

RÉPONSE. On donne la négation de $\mathcal{F}$ est équicontinue (en un point $x \in E$, il existe ε tel que pour tout η...). Puis on prends $\eta = 1/n$...

(3) Montrer que $\{f_n\}$ admet une suite extraite $\{f_{\phi(n)}\}$ qui converge vers une fonction f et satisfait

$$(**) \qquad \lim_{n \to \infty} f_{\phi(n)}(x_{\phi(n)}) = f(x).$$

RÉPONSE. La compacité entraine la sous-convergence. Puis on note que la sous-suite converge uniformément, et donc simplement. On a donc la limite ci-dessus.

(4) Déduire de la limite précédente et de $(*)$ une contradiction. On aura montré que la partie $\mathcal{F}$ est compacte (si et) seulement si elle est fermée et équicontinue.
RÉPONSE. On écrit $\delta(f_{\phi(n)}(x_{\phi(n)}), f_{\phi(n)}(x)) \geq \varepsilon$ et on passe à la limite $n \to \infty$ à droite. On obtient $\delta(f(x), f(x)) = 0$. Contradiction.

(5) Question : dans l'énoncé du théorème 2, les conditions de compacité de (E, d) et de (F, δ) sont-elles nécessaires ?
RÉPONSE. Non, on n'a pas utilisé ces conditions.

Exercice 2

Soit (K, d) un espace métrique compact et (x_n) une suite de points de K telle que la suite $(d(x_n, x_{n+1}))$ converge vers 0. On note F l'ensemble des $x \in K$ qui sont limite d'une suite extraite de (x_n). Le but de l'exercice est de montrer que F est connexe.

(1) Rappeler rapidement pourquoi F est fermé.
RÉPONSE. L'ensemble des valeurs d'adhérence est fermé.

(2) Soit F_1,F_2 deux parties fermées de F, disjointes et non vides. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $y_1 \in F_1$ et tout $y_2 \in F_2$ on ait $d(y_1, y_2) \geq \varepsilon$.
RÉPONSE. Supposons par l'absurde que pour tout $\varepsilon = 1/n$ il existait $y'_n \in F_1$ et $y''_n \in F_2$ avec $d(y'_n, y'_n) < 1/n$. Grâce à la compacité de K on peut extraire des suites convergentes de (y'_n) et de (y''_n). On aura deux suites qui convergent à la même limite ℓ qui est nécessairement dans $F_1 \cap F_2$. Une contradiction.

(3) Posons
$$X = \{y \in K; d(y, F_1 \cup F_2) \geq \varepsilon/3\}.$$
Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tels que $n_2 > n_1 \geq m$ et $d(x_{n_1}, F_1) < \varepsilon/3$ et $d(x_{n_2}, F_2) < \varepsilon/3$. En déduire qu'il existe $n \geq m$ tel que $x_n \in X$.
RÉPONSE. La première partie suit évidemment de la définition de F.

Ensuite on exploite ici la condition $\lim_{n\to\infty}(d(x_n, x_{n+1})) = 0$. Ceci implique qu'à partir d'un certain rang la distance entre un terme de la suite et le terme suivant est strictement inférieure à $\varepsilon/3$. On observe que n_1 et n_2 ne peuvent pas être deux entiers consécutifs (autrement $d(F_1, F_2) \leq d(F_1, x_{n_1}) + d(x_{n_1}, x_{n_2}) + d(F_2, x_{n_2}) < \varepsilon$). On peut se ramener au cas où tout n strictement contenu entre n_1 et n_2 ne satisfait ni $d(x_n, F_1) < \varepsilon/3$ ni $d(x_n, F_2) < \varepsilon/3$ (si ceci n'est pas le cas on procède par élimination). Encore une fois, comme la distance entre un terme et le suivant est $< \varepsilon/3$, il existe au moins un entier n strictement contenu entre n_1 et n_2. Alors pour tout n tel que $n_1 < n < n_2$ on a $d(x_n, F_1 \cup F_2) \geq \varepsilon/3$.

(4) Montrer qu'il existe une suite extraite de (x_n) contenue dans X et convergente.
RÉPONSE. Le point précédent montre comment construire une suite à valeurs dans X. La compacité entraine l'énoncé.

(5) Montrer que F est connexe.
RÉPONSE. On suppose que F n'est pas connexe. Soient F_1 et F_2 deux parties fermées de F, disjointes, non vides, tels que $F = F_1 \cup F_2$. Le point précédent montre alors que F contient un élément qui n'appartient pas à $F_1 \cup F_2$. Une contradiction.

Exercice 3

Soit (E,d) un espace métrique complet. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de E. Soit $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. On suppose $A\neq\emptyset$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tous $x,y\in A$, on pose

$$f_n(x,y)=\mid \frac{1}{d(x,E\setminus U_n)}-\frac{1}{d(y,E\setminus U_n)}\mid,$$

et

$$d'(x,y)=d(x,y)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{f_n(x,y)}{1+f_n(x,y)}.$$

(1) Montrer que, pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in A$, la fonction $y\mapsto f_n(x,y)$ est continue sur A.
RÉPONSE. Il suffit de vérifier que $d(x,E\setminus U_n)$ et $d(y,E\setminus U_n)$ ne valent pas zéro. Le reset suit du cours.

(2) Montrer que d' est une distance sur A (on pourra utiliser que la fonction $t/(1+t)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$).
RÉPONSE. La seule chose à vérifier est l'inégalité triangulaire. La croissance de $t/(1+t)$ donne

$$\frac{f_n(x,y)}{1+f_n(x,y)}\leq\frac{f_n(x,z)+f_n(y,z)}{1+f_n(x,z)+f_n(y,z)},$$

et

$$\frac{f_n(x,z)+f_n(y,z)}{1+f_n(x,z)+f_n(y,z)}\leq\frac{f_n(x,z)}{1+f_n(x,z)}+\frac{f_n(y,z)}{1+f_n(y,z)}.$$

(3) Montrer que, sur A, d et d' sont topologiquement équivalentes.
RÉPONSE. Soient $x\in A$ et $r>0$. Notons $B_d(x,r)$ (resp. $B_{d'}(x,r)$) la boule ouverte de A de centre x et de rayon r pour la distance d (resp. d'). Clairement, $B_{d'}(x,r)\subset B_d(x,r)$. Pour conclure, montrons qu'il existe $r'>0$ tel que $B_d(x,r')\subset B_{d'}(x,r)$. Soit m un entier tel que, pour tout $y\in A$,

$$\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{fn(x,y)}{1+fn(x,y)}\leq\frac{1}{2^{m-1}}\leq r/3.$$

La question 1. montre que, pour chaque n, il existe $r_n>0$ tel que $d(x,y)<r_n$ implique $f_n(x,y)<r/6$. Alors si $r'<\min\{r,r_n,0\leq n\leq m\}$, $d(x,y)<r'$ implique $d'(x,y)<r_0+2r/3$, et il suffit de prendre $r'=r/3$.

(4) Montrer que A est complet pour d'.
RÉPONSE. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A de Cauchy pour d'. Alors cette suite est aussi de Cauchy pour d (qui est inférieure à d') et converge donc vers $x\in E$, pour d. Pour conclure, en vertu du 3., il suffit de montrer que $x\in A$. Or, si ce n'était pas le cas, on aurait $x\notin U_n$ pour un certain n ; mais alors on aurait, pour tout p, $\lim_{q\to\infty} f_n(x_p,x_q)=+\infty$, ce qui implique $\lim_{q\to\infty} d'(x_p,x_q)\leq 1/2^n$ et contredit le fait que (x_n) est de Cauchy pour d'.

(5) Montrer que cette construction permet de définir une distance sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, topologiquement équivalente à la distance usuelle, pour laquelle $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est complet.
RÉPONSE. Si $\mathbb{Q} = \{r_n, n \in \mathbb{N}\}$, il suffit de prendre $U_n = \mathbb{R} \setminus \{r_n\}$.