UNIVERSITÉ DE RENNES 1

UFR DE MATHÉMATIQUES

Licence – portail MIPE

NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS,
CONGRUENCES, PERMUTATIONS (*A2*)

Examen du 13 octobre 2004 (1 heure)

Les exercices sont indépendants ; Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

EXERCICE 1

On définit une suite (u_n) par récurrence en posant $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 2$, $u_n = 3u_{n-1} - u_{n-2}$.

1 Calculer u_n pour $0 \leqslant n \leqslant 5$.

2 On pose $v_n = u_0 + \cdots = u_n$. Calculer v_n pour $0 \leqslant n \leqslant 5$.

3 Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$v_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + 1.$$

On vérifiera au préalable que cette relation est vraie pour $0 \leqslant n \leqslant 3$.

EXERCICE 2

Soit x, y, n des entiers naturels.

1 Énoncer la formule du binôme qui calcule $(x+y)^n$.

2 Combien y a-t-il de façons de colorier n objets en utilisant $x+y$ couleurs (numérotées de 1 à $x+y$) ?

3 Si $p \in \{0, \dots, n\}$, combien y a-t-il de façons de sélectionner p objets parmi n ?

4 Deux artisans veulent colorier n objets en $x+y$ couleurs. Ils travaillent à deux : les objets leur arrivent en deux paquets respectivement de p et $n-p$ objets, le premier artisan colorie les objets du premier paquet avec les x premières couleurs, le second artisan colorie les objets du second paquiet avec les autres couleurs. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?

5 En combinant les questions précédentes, démontrer de façon combinatoire la formule du binôme énoncée à la première question.