UNIVERSITÉ DE RENNES 1

UFR DE MATHÉMATIQUES

Licence – portail MIPE

NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS, CONGRUENCES, PERMUTATIONS (*A2*)

Examen du 4 novembre 2005 (1 heure)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.
Justifiez toutes vos réponses

NOM : **Prénom :**

EXERCICE 1

Énoncer et démontrer le théorème de Gauss.

EXERCICE 2

Soit A, B, C des ensembles ; soit $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$ des applications.

1 On suppose que $g \circ f$ est injective ; démontrer que f est injective.

2 On suppose que $g \circ f$ est injective et que f est surjective. Montrer que f est bijective et g est injective.

EXERCICE 3

Soit E un ensemble et soit $\mathcal{R}$ une relation réflexive dans E telle que pour tous x, y, z dans E vérifiant $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, on ait $z\mathcal{R}x$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans E.

EXERCICE 4

Soit m, n, p des entiers naturels tels que $n \geqslant m \geqslant p$. Montrer que l'on a

$$\sum_{k=m}^{n} \mathrm{C}_k^p = \mathrm{C}_{n+1}^{p+1} - \mathrm{C}_m^{p+1}.$$

(On pourra raisonner par récurrence sur n.)

EXERCICE 5

Montrer que pour pour tout entier relatif n, n^2+2 n'est pas multiple de 4.

EXERCICE 6

Soit a et b des entiers naturels.

1 Montrer que $\mathrm{pgcd}(a,b)$ divise $\mathrm{ppcm}(a,b)$.

2 Montrer que $\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{ppcm}(a,b)$ si et seulement si $a = b$.

3 Trouver tous les couples d'entiers naturels (a,b) tels que $\mathrm{ppcm}(a,b) = 18$ et $\mathrm{pgcd}(a,b) = 3$.

NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS,
CONGRUENCES, PERMUTATIONS (*A2*)
Corrigé de l'examen du 4 novembre 2005 (1 heure)
Sujet proposé (et corrigé) par A. Chambert-Loir

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.

Énoncé du théorème de Gauss. — Soit a, b, c des entiers relatifs. On suppose que a et b sont premiers entre eux.
1) Si a divise bc, alors a divise c.
2) Si a et b divisent c, alors ab divise c.

Démonstration. — Comme a et b sont premiers entre eux, il existe des entiers u et v tels que $au+bv=1$. On a alors $c=1c=acu+bcv$.
1) Comme a divise bc, bcv est multiple de a ; de plus, acu est multiple de a. Par conséquent, c est multiple de a.
2) Soit x et y des entiers tels que $c=ax$ et $c=by$. On a $c=cau+cbv=byau+axbv=ab(yu+xv)$, ce qui démontre que ab divise c.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.

1 Soit x et y des éléments de A tels que $f(x)=f(y)$. On a alors

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(f(y))=(g\circ f)(y).$$

Comme $g\circ f$ est injective, on a donc $x=y$. Cela démontre que f est injective.

2 D'après la question précédente, f est injective ; elle est aussi surjective par hypothèse. Elle est donc bijective.
Montrons que g est injective. Soit a et b des élements de B tels que $g(a)=g(b)$ et prouvons que $a=b$. Comme f est surjective, il existe x et y dans A tels que $a=f(x)$ et $b=f(y)$. Alors,

$$(g\circ f)(x)=g(a)=g(b)=(g\circ f)(y).$$

Comme $g\circ f$ est injective, $x=y$. Alors, $f(x)=f(y)$, d'où $a=b$, comme il fallait démontrer.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.

On doit montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.
Elle est réflexive par hypothèse.
Soit x et y des éléments de E tels que $x\mathcal{R}y$. Puisque $\mathcal{R}$ est réflexive, on a $y\mathcal{R}y$. En appliquant l'hypothèse à x, y et $z=y$, on obtient alors $y\mathcal{R}x$. Cela démontre que $\mathcal{R}$ est symétrique.
Soit enfin x, y, z des éléments de E tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On a donc $z\mathcal{R}x$. Puisque $\mathcal{R}$ est symétrique, on a aussi $x\mathcal{R}z$. Cela démontre que $\mathcal{R}$ est transitive.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.

Démontrons le résultat par récurrence sur n. L'assertion est vraie pour $n = m$ car elle s'écrit

$$\mathrm{C}_m^p = \mathrm{C}_{m+1}^{p+1} - \mathrm{C}_m^{p+1},$$

formule qu'on sait être vraie.

Supposons la relation vraie pour n et démontrons-la pour $n+1$. On a en effet

$$\sum_{k=m}^{n+1} \mathrm{C}_k^p = \mathrm{C}_{n+1}^p + \sum_{k=m}^{n} \mathrm{C}_k^p = \mathrm{C}_{n+1}^p + \mathrm{C}_{n+1}^{p+1} - \mathrm{C}_m^{p+1} = \mathrm{C}_{n+2}^{p+1} - \mathrm{C}_m^{p+1}$$

en utilisant encore une relation dans le triangle de Pascal démontrée en cours. Par récurrence, le résultat est vrai pour tout entier $n \geqslant m$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.

Supposons que n^2+2 soit multiple de 4. Alors, n^2+2 est pair, donc n^2 aussi, donc n est pair. Par suite, n^2 est multiple de 4. Cela entraîne que $2 = (n^2+2) - n^2$ est multiple de 4, ce qui est absurde. Donc n^2+2 n'est pas multiple de 4.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.

1 L'entier $\operatorname{pgcd}(a,b)$ divise a et l'entier $\operatorname{ppcm}(a,b)$ est multiple de a. Par suite, $\operatorname{pgcd}(a,b)$ divise $\operatorname{ppcm}(a,b)$.

2 Notons $d = \operatorname{pgcd}(a,b)$ et soit a', b' des entiers tels que $a = da'$ et $b = db'$. Les entiers a' et b' sont premiers entre eux et l'on a $\operatorname{ppcm}(a,b) = da'b'$.
Si $a = b$, alors $d = a$, $a' = b' = 1$ et $\operatorname{ppcm}(a,b) = a = \operatorname{pgcd}(a,b)$.
Supposons inversement que $\operatorname{ppcm}(a,b) = \operatorname{pgcd}(a,b)$. Si $d = 0$, $a = b = 0$. Sinon, on obtient en simplifiant par d l'égalité $a'b' = 1$ qui entraîne $a' = b' = 1$. Donc $a = b = d$.

3 Avec les mêmes notations, on doit résoudre les équations $d = 3$ et $da'b' = 18$, d'où $d = 3$ et $a'b' = 6$, avec la contrainte supplémentaire que a' et b' sont premiers entre eux.
Analysons pour commencer l'équation $a'b' = 6$. On obtient $(a',b') = (6,1)$, $(3,2)$, $(2,3)$ ou $(1,6)$. Tous ses couples sont formés d'entiers premiers entre eux, donc conviennent.
Finalement, on trouve $(a,b) = (18,3)$, $(9,6)$, $(6,9)$ ou $(3,18)$.