UNIVERSITE DE RENNES 1

A2. NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS, CONGRUENCES. PERMUTATIONS

Feuille de travaux dirigés n^{o} 1

1. Nombres entiers et principe de récurrence

EXERCICE 1

On dispose d'un stock illimité de pièces de 3 €et de 5 €. Quels sont les montants que l'on peut payer ?

EXERCICE 2

1 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, on a $2^n < n!$.

2 Déterminer un entier A tel que pour tout $n \geqslant A$, on ait $3^n < n!$.

EXERCICE 3

1 Montrer que pour tout entier n, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

2 Montrer que si $10^n + 7$ est multiple de 9, $10^{n+1} + 7$ l'est aussi. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 4

1 Montrer par récurrence sur n les formules

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2 Que vaut, si n est impair, la somme $1 + 3 + 5 + \cdots + n$?

3 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

EXERCICE 5

Si n est un entier $\geqslant 1$ et x un réel dans $[0,1]$, montrer l'inégalité

$$1 - nx \leqslant (1-x)^n \leqslant 1 - \frac{nx}{1+(n-1)x}.$$

EXERCICE 6

Soit (x_n) une suite de réels dans $]0,1[$. On pose $S_n = x_1 + \cdots + x_n$. Montrer l'inégalité

$$1 - S_n \leqslant (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \leqslant \frac{1}{1+S_n}.$$

EXERCICE 7

1 Déterminer deux nombres réels a et b tels que l'on ait, pour tout nombre réel $x > 0$,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

2 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

EXERCICE 8

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$.

EXERCICE 9

1 Si x et y sont deux nombres réels positifs, montrer que $\sqrt{xy} \leqslant (x+y)/2$.

2 Montrer par récurrence sur n que si $x_1, \dots, x_{2^n}$ sont des nombres réels positifs,

$$(x_1 \dots x_{2^n})^{1/2^n} \leqslant (x_1 + \dots + x_{2^n})/2^n.$$

3 Soit $N \geqslant 2$ et soit $x_1, \dots, x_N$ des nombres réels positifs. Démontrer que

$$(x_1 \dots x_N)^{1/N} \leqslant (x_1 + \dots + x_N)/N$$

(*inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique*). Pour cela, choisir un entier n tel que $N \leqslant 2^n$; poser, pour $N \leqslant k \leqslant 2^n$, $x_k = (x_1 + \dots + x_N)/N$; appliquer la question précédente.

EXERCICE 10

1 Peut-on paver un échiquier privé de deux cases diagonalement opposées par des dominos (chacun recouvrant exactement deux cases).

2 Démontrer que l'on peut paver un échiquier 8×8 par des triominos en forme de L (recouvrant trois cases) de sorte à laisser vide une case quelconque prescrite à l'avance. (Remplacer 8 par 2^n, et faire une récurrence…)

3 Quels rectangles sont pavables par des triominos en forme de L? (La réponse générale n'est semble-t-il pas connue…)

EXERCICE 11*

On trace n droites dans le plan ; on suppose que deux d'entre elles ne sont pas parallèles et que trois d'entre elles ne sont pas concourantes.

1 Quelle est le nombre de régions du plan qu'elles délimitent ? Combien d'entre elles sont bornées ? (Une $(n+1)$-ième droite coupe chacune des n premières en n points distincts ; elle traverse $(n+1)$ régions en les divisant en 2. Lesquelles sont bornées ?)

2 Quel est le nombre maximal de parts d'un gâteau circulaire que l'on peut obtenir en n coups de couteau ?

EXERCICE 12

Nous allons démontrer par récurrence sur n que si, dans une salle de n personnes, il y a au moins une fille, alors il n'y a que des filles. Notons $P(n)$ cette proposition.

Elle est vraie pour $n = 1$.

Supposons qu'elle soit vraie pour n, c'est-à-dire supposons que lorsqu'une salle contient n personnes dont au moins une fille, alors il n'y a que des filles ; montrons qu'elle est vraie pour $n+1$. Considérons donc une salle contenant $n+1$ personnes dont au moins une fille ; appelons-la Chantal. Faisons sortir une personne autre que Chantal, disons, Vincent. La salle contient n personnes, dont une fille, Chantal. Par l'hypothèse de récurrence, il y a donc n filles dans la salle. On fait alors entrer Vincent, et on demande à Chantal de sortir. Dans la salle il y a n personnes dont $n-1$ filles. En appliquant à nouveau l'hypothèse de récurrence, on en déduit que la salle ne contient que des filles. On fait alors rentrer Chantal ; la salle ne contient que des filles.

Chercher l'erreur !

EXERCICE 13

Le jeu des tours de Hanoï est constitué de n disques de rayons distincts et de trois piquets pouvant les accueillir. On ne peut poser un disque que sur un disque plus grand. Au début, les disques sont empilés du plus grand au plus petit sur un des piquets ; le but du jeu est de déplacer l'ensemble sur un des deux autres piquets. Montrer que c'est effectivement possible en $2^n - 1$ étapes, mais pas en moins.

EXERCICE 14

Démontrer l'associativité de l'addition, la commutativité et l'associativité de la multiplication.

EXERCICE 15

On considère une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison a et on pose $U_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $U_n = (n+1)(u_0 + \frac{1}{2}an)$.

EXERCICE 16

On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison a et on pose encore $U_n = u_0 + \cdots + u_n$. On suppose que $a \neq 1$; montrer alors que $U_n = u_0 \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. Que vaut U_n dans le cas où $a = 1$?

EXERCICE 17

Un récipient contient 1 dm^3 de riz, chaque grain faisant 1 mm^3. On dispose un grain de riz sur la première case d'un échiquier, deux sur la deuxième, quatre sur la suivante, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains. Combien de cases de l'échiquier seront remplies lorsque le pot de riz ne contiendra plus assez de grains ? Combien en reste-t-il dans le pot ?

EXERCICE 18

La suite (u_n) est définie par $u_1 = 1/2$ et $u_n = u_{n-1}/(2nu_{n-1}+1)$, si $n \geqslant 2$. Calculer $u_1 + \cdots + u_n$ pour tout entier n. (Commencez par calculer explicitement cette somme pour de petites valeurs de n, conjecturez alors une formule générale que vous démontrerez ensuite par récurrence.)

EXERCICE 19

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et $u_0 = 1$.

1 Déterminer un nombre réel a tel que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + a$ soit une suite géométrique.

2 En déduire une formule simple pour v_n puis une formule simple pour u_n.

3 Déduire de l'exercice une *méthode générale* pour calculer le n-ième terme d'une suite (u_n) définie par une récurrence $u_{n+1} = au_n + b$, où a et b sont des nombres réels.

EXERCICE 20

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ pour $n \geqslant 0$.

1 Démontrer que pour tout entier n, on a $u_n \geqslant n^2$.

2 On définit une suite (v_n) en posant, pour tout entier n, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n, puis exprimer v_n en fonction de n.

3 Calculer u_n en fonction de n.

EXERCICE 21

On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = 1$ et, si $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n/(1+u_n)$.

1 Montrer que l'on a $u_n > 0$ pour tout entier n.

2 Montrer que la suite $(1/u_n)$ est arithmétique.

3 Calculer u_n pour tout entier n.

EXERCICE 22

Les taux d'intérêt (TEG annuel) des crédits à la consommation sont en 2005 de l'ordre de 8% pour des prêts d'une durée de 5 ans. Vous souhaitez acheter une Logan (7500 €) ; votre revenu mensuel est de 1200 € et l'organisme de prêt exige un endettement inférieur à 30%.

1 Quel est le nombre minimal de mensualités dont vous devrez vous acquitter ?

2 Quel est le coût total de votre crédit si vous souscrivez un tel crédit ? et si vous décider de rembourser pendant 5 ans ?

EXERCICE 23

Un ingénieur au revenu mensuel de 3000 € décide d'acheter une maison ; le taux d'endettement que lui autorise son organisme de crédit est $1/3$, le taux d'intérêt du moment est $3{,}5\%$.

1 De quelle somme peut-il disposer s'il décide de souscrire un prêt d'une durée de 10 ans ? de 20 ans ?

2 Quel est le coût total du crédit (pour 100000 € empruntés) ?

3 En 1995, les taux d'intérêts étaient plutôt de l'ordre de $8{,}5\%$. Répondre aux questions ci-dessus.

EXERCICE 24

1 Dans un prêt, calculer la somme totale S payée par le débiteur en fonction du nombre de mensualités, du taux mensuel et du capital emprunté. Avec MAPLE, tracer la fonction $N \mapsto S$ (on fixera une valeur numérique de τ_{m} et $C = 1$).

2 Avec MAPLE (ou un tableur), produire un tableau de remboursements en donnant, mois par mois, la part d'intérêts dans la mensualité et le capital restant dû.

3 Une banque permet de rembourser une partie du prêt par anticipation, moyennant des frais de dossier. Le client de la banque a-t-il intérêt à rembourser partiellement son prêt ? (La réponse dépend du taux, du capital restant dû, des frais de dossier et du montant du remboursement exceptionnel. Écrire un programme qui fait l'ensemble des calculs.)