UNIVERSITE DE RENNES 1

A2. NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS, CONGRUENCES. PERMUTATIONS

Feuille de travaux dirigés n$^{\text{o}}$ 2

1. Combinatoire, probabilités

EXERCICE 1

1 Au mois de janvier, Anatole a pris ses repas de midi au Restau U. Il y a mangé 17 fois de la pizza et 25 fois de la glace. Montrer qu'il a mangé de la pizza et de la glace au cours d'un des repas.

2 Dans une classe de 35 élèves, chaque étudiant doit apprendre au moins une des deux langues, anglais ou allemand. 25 étudient l'anglais et 20 apprennent les deux langues. Combien d'élèves étudient l'allemand ?

3 Hier soir, sur 100 français, 95 ont regardé le journal télévisé, 85 ont regardé le film qui suivait et 70 se sont couché de bonne heure. Combien de français (au moins) se sont couchés tôt après avoir regardé le journal et le film ?

EXERCICE 2

Le principe d'inclusion-exclusion donne lieu à des inégalités : si $A_1, \dots, A_n$ sont des parties d'un ensemble X, montrer par exemple que

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| \leqslant \left| \bigcup_i A_i \right| \leqslant \sum_i |A_i|.$$

Généraliser.

EXERCICE 3

On considère n objets de différentes couleurs. Si a est un entier tel que $a \leqslant \sqrt{n-1}$, montrer que l'on peut trouver ou bien $a+1$ objets de la même couleur, ou bien $a+1$ objets de couleurs toutes différentes.

EXERCICE 4

Dans un groupe de 6 personnes, deux personnes quelconques ou bien s'aiment, ou bien se détestent. Montrer que l'on peut en trouver 3 qui sont amis, ou 3 qui sont mutuellement ennemis. (*Fixer une personne Anatole ; parmi ses 5 relations, Anatole a (au moins) 3 amis, ou 3 ennemis. Si Anatole a trois amis et que deux d'entre eux sont amis, le résultat est obtenu. Sinon...*)

EXERCICE 5*

1958 points sont reliés deux à deux par un segment d'une couleur parmi 6. Montrer qu'il existe un triangle dont les trois côtés sont de la même couleur.

EXERCICE 6

1 Soit X et Y deux ensembles finis. Combien y a-t-il d'applications injectives de X dans Y ? (La même question avec « surjectives » est naturelle, mais plus difficile.)

2 Estimer le nombre d'applications injectives de $\{1, \dots, 30\}$ dans $\{1, \dots, 365\}$. Sur une classe de 30 élèves, quelle est la probabilité que deux élèves soient nés le même jour ? (*Paradoxe des anniversaires*)

EXERCICE 7

1 Démontrer la relation $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-1}^{p-1} + \mathrm{C}_{n-1}^p$ pour $n > p \geqslant 1$ en utilisant la formule qui calcule C_n^p à l'aide de factorielles.

2 Inversement, à l'aide de cette identité, démontrer par récurrence la formule qui calcule C_n^p.

EXERCICE 8

1 Démontrer de deux façons la formule $\mathrm{C}_n^p = \dfrac{n}{p}\mathrm{C}_{n-1}^{p-1}$ pour $n \geqslant p \geqslant 1$.

2 Démontrer de deux façons que $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_n^{n-p}$.

EXERCICE 9

1 À l'aide de la formule du binôme, démontrer que

$$\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^n = 2^n.$$

2 Calculer de même $\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \mathrm{C}_n^p$.

3 Calculer $\sum_{p=1}^{n} p\mathrm{C}_n^p$ et $\sum_{p=2}^{n} p(p-1)\mathrm{C}_n^p$. En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{n} p^2\mathrm{C}_n^p$.

4 Retrouver la question précédente en dérivant (une puis deux fois) la formule du binôme pour $(1+x)^n$.

EXERCICE 10

1 En développant $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$, montrer que $\mathrm{C}_{2n}^n = \sum_{p=0}^{n} \left(\mathrm{C}_n^p\right)^2$. (Remarquer que $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_n^{n-p}$.)

2 Donner une interprétation combinatoire de la formule précédente.

EXERCICE 11

On pose $F_n = \sum_{p \leqslant n/2} \mathrm{C}_{n-p}^p = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_{n-1}^1 + \mathrm{C}_{n-2}^2 + \ldots$. (Le dernier terme est C_p^p si $n = 2p$ est pair, et C_{p+1}^p si $n = 2p+1$ est impair.)

1 Calculer F_0, F_1, $F_2, \ldots, F_5$.

2 Montrer que $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ (*suite de Fibonacci*).

EXERCICE 12

Une combinaison avec répétition de p éléments parmi n est une liste de p éléments de $\{1, \ldots, n\}$, non nécessairement distincts, et où l'ordre n'intervient pas. On note R_n^p leur nombre.

1 Montrer que l'on a $\mathrm{R}_n^p = \mathrm{R}_{n-1}^p + \mathrm{R}_n^{p-1}$ si $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$. Montrer aussi $\mathrm{R}_n^0 = 1$, $\mathrm{R}_n^1 = n$ et $\mathrm{R}_1^p = 1$, pour $n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$.

2 En déduire par récurrence que $\mathrm{R}_n^p = \mathrm{C}_{n+p-1}^p$.

3 (*autre méthode*) On associe à une partie à $n-1$ éléments de $\{1, \ldots, n+p-1\}$ une combinaison avec répétition de la façon suivante : si cette partie est formée de $n-1$ entiers $x_1 < \cdots < x_{n-1}$, on choisit $(x_1 - 1)$ fois l'entier 1, $(x_2 - x_1 - 1)$ fois l'entier 2, etc., $(x_{n-1} - x_{n-2} - 1)$ fois l'entier $n-1$ et pour finir $(n + p - x_{n-1} - 1)$ fois l'entier n. Montrer que cela définit une application bijective et en déduire la formule de la question précédente.

EXERCICE 13

Un ordinateur (par exemple) ne sait calculer que le produit de deux facteurs et on s'intéresse au nombre de façons K_n d'introduire des parenthèses dans le produit $x_1 x_2 \dots x_n$ de sorte à pouvoir le calculer. Si $n = 2$, c'est un produit de deux facteurs, donc $K_2 = 1$, mais on a $K_3 = 2$ correspondant aux parenthésages $x_1(x_2x_3)$ et $(x_1x_2)x_3$, de même que $K_4 = 5$ avec les parenthésages

$$(x_1x_2)(x_3x_4), \quad ((x_1x_2)x_3)x_4), \quad (x_1(x_2x_3))x_4, \quad x_1((x_2x_3)x_4), \quad \text{et} \quad x_1(x_2(x_3x_4)).$$

1 Dans un parenthésage, le dernier produit que l'on calcule est le produit de deux facteurs : le sous-produit des p premiers, et celui des $n-p$ derniers. En déduire que

$$K_n = \sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p}.$$

2* Montrer que $K_n = \frac{1}{n} \mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}$.

EXERCICE 14

Soit $D_{n,k}$ le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$ qui ont exactement k points fixes (*dérangements*).

1 Montrer que $D_{n,0} + \cdots + D_{n,n} = n!$.

2 Montrer que $D_{n,k} = \mathrm{C}_n^k D_{n-k,0}$

3 En déduire que

$$\frac{1}{n!} D_{n,0} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

EXERCICE 15

1 Quelle est la probabilité d'avoir deux dés identiques en lançant deux dés ? en lançant trois dés ?

2 Au Yam, votre deuxième lancer vous fournit 2, 3, 3, 4, 5. Que vaut-il mieux faire : lancer 2, 4, 5 pour un brelan de 3 ou le 3 pour une des deux suites ?

EXERCICE 16

Quelle est la probabilité d'avoir trois bons numéros au Loto sur une grille de six numéros parmi 49 ? Quelle est l'espérance de gain (on néglige l'influence des autres joueurs) ? Sachant qu'une partie des mises du Loto est reversée directement à l'État, pourquoi les français pensent-ils que les impôts sont trop élevés ?

EXERCICE 17

1 Deux joueurs reçoivent chacun 5 cartes. Le premier a un As ; quelle est la probabilité que le second ait une paire d'As ?

2 Quelle est la probabilité de n'avoir aucun honneur (Valet, Dame, Roi, As) parmi les 13 cartes d'une main de bridge ?

3* Au bridge, quelle est la probabilité que Sud n'ait pas de trèfle ? En ouvrant son jeu, Nord constate qu'il a 6 trèfles ; quelle est alors, selon lui, la probabilité que Sud n'ait pas de trèfle. Si Ouest ouvre d'un trèfle, admettant que cela signifie qu'il en a exactement trois, quelle est, toujours pour Nord, la probabilité que Sud n'ait pas de trèfle. Si l'enchère de Ouest signifie qu'il en a au moins trois, comment estimez-vous la probabilité pour Sud de n'avoir aucun trèfle ?

EXERCICE 18

On dispose de n pièces indépendantes mais biaisées, de sorte que la probabilité que la k-ième pièce tombe sur *face* est $1/(2k+1)$. Quelle est la probabilité qu'en lançant les n pièces, le nombre de *faces* apparues soit impair ?

EXERCICE 19

On suppose que $p(A) = p(B) = \frac{1}{2}$ et $p(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

EXERCICE 20

Soit p une probabilité (finie) sur un ensemble Ω et soit A une partie de Ω de probabilité $p(A) > 0$. On pose, si $X \subset \Omega$, $p_A(X) = p(X|A)$. Montrer que p_A est une probabilité sur Ω.