UNIVERSITE DE RENNES 1

A2. NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS, CONGRUENCES. PERMUTATIONS

Feuille de travaux dirigés n^o 3

Division euclidienne

EXERCICE 1

On range 461 pots de yaourts dans des caisses (toutes identiques), en remplissant entièrement une caisse avant de passer à la suivante. On utilise 14 caisses ; combien chaque caisse contient-elle de pots ? (D'après D. Perrin ; plusieurs solutions sont possibles.)

EXERCICE 2

Connaissant le reste de la division euclidienne d'un entier par 10, pouvez-vous en déduire celui de la division euclidienne de cet entier par 5 ? par 6 ?

EXERCICE 3

Soit n un entier. Calculer le reste de la division euclidienne de n^2 par 4, suivant que cet entier est pair ou impair. Existe-t-il des entiers a et b tels que $a^2+b^2=8123$?

EXERCICE 4

Soit a et b des entiers relatifs, $b\neq 0$. Démontrer qu'il existe des entiers relatifs q et r uniques tels que $a=bq+r$ et $-\frac{1}{2}|b|<r\leqslant\frac{1}{2}|b|$.

EXERCICE 5

Connaissant la division euclidienne de deux entiers n et n' par un entier $b\geqslant 1$ (c'est-à-dire quotients et restes), donner un moyen simple de déterminer la division euclidienne de $n+n'$ par b ?

EXERCICE 6

Soit a et b des entiers naturels tels que $a\geqslant 3$ et $b\geqslant 2$; soit n un entier naturel. Supposant connu le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b, calculer le quotient de la division euclidienne de ab^n-1 par b^{n+1}.

EXERCICE 7

Combien de chiffres faut-il utiliser pour écrire tous les entiers de 1 à 2004 ? Quel chiffre est utilisé le plus souvent ?

EXERCICE 8

La pagination d'un livre qui commence à la page 1 utilise 3189 caractères. Combien de pages le livre a-t-il ?

EXERCICE 9

Dans une certaine base, un entier s'écrit $\overline{1254}$ et son double $\overline{2541}$. Quel est cet entier et quelle est la base ?

EXERCICE 10

Calculer le produit 123456789 par 9 en moins de 5 secondes.

EXERCICE 11

1 Écrire en base 7, puis en base 2, enfin dans la base hexadécimale le nombre mille sept-cent quatre-vingt-neuf.

2 Que vaut le nombre écrit $\overline{101001001}$ en base 2 ?

3 Que vaut le nombre écrit $\overline{BAC}$ en hexadécimal ?

EXERCICE 12

1 Si un nombre s'écrit avec 27 chiffres en base 10, combien en faudra-t-il en base 2 ? en base 16 ?

2 Quel sont les entiers qui s'écrivent avec exactement m chiffres en base b ? Combien y en a-t-il ?

3 Si on ajoute deux nombres ayant au plus n chiffres en base b, combien de chiffres (au plus) aura leur somme ? leur produit ?

EXERCICE 13

Quel est le plus petit entier dont l'écriture décimale se termine par un 6 et tel que si l'on efface ce chiffre et qu'on l'écrit en tête des chiffres restants, on obtient quatre fois l'entier initial ?

EXERCICE 14*

Soit A l'entier 4444^{4444} ; soit B la somme de ses chiffres, C la somme des chiffres de B et D la somme des chiffres de C. Que vaut D ?

EXERCICE 15

Soit n un entier dont l'écriture décimale est $\overline{abc}$. Montrer que $n \equiv 2a+3b+c \pmod 7$.

EXERCICE 16

Quels sont les trois derniers chiffres de $7^{100} - 3^{100}$? (*Écrire* $7 = 10-3$ *et utiliser la formule du binôme.*)

EXERCICE 17

Imaginer une preuve par 9 pour les divisions euclidiennes. L'expérimenter sur un exemple.

EXERCICE 18

Remarquer que $10 \equiv -1 \pmod{11}$. En déduire un procédé simple du calcul du reste de la division euclidienne par 11 d'un entier écrit sous forme décimale.

EXERCICE 19

Soit $N = \overline{mcdu}$ un nombre de quatre chiffres écrit en base 10. On pose $P = \overline{udcm}$. Montrer que $N+P$ est divisible par 11 et donner le quotient de la division de $N+P$ par 11.

EXERCICE 20

Que pourrait être la « preuve par $b-1$ » en base b ?

EXERCICE 21

Un problème de Bachet de Méziriac (1612) : « Étant donnée telle quantité qu'on voudra pesant un nombre de livres depuis 1 jusques à 40 inclusivement (sans toutefois admettre les fractions), on demande combien de poids pour le moins il faudrait employer à cet effet. ».

Une variante en français contemporain (et en système métrique) : On dispose d'une balance à deux plateaux (« de Roberval ») et d'une boite de masses marquées de 1 g à 100 g. Montrer comment choisir cinq de ces masses marquées de telle sorte que l'on puisse déterminer la masse de tout objet dont la masse (supposée entière) est de 1 à 100 g.

EXERCICE 22

Trois bouteilles contiennent chacune un nombre entier de litres d'eau. La seule opération permise consiste à doubler le contenu d'une des bouteilles en y versant une partie du contenu d'une autre. Montrer qu'il est possible de vider entièrement l'une des bouteilles. On suppose que chaque bouteille est assez grande pour contenir la totalité de l'eau. (Un problème classique repris par E. Busser et G. Cohen.)

EXERCICE 23

Si $(a,b) = (462,104)$, calculer $d = \text{pgcd}(a,b)$, $\text{ppcm}(a,b)$ et déterminer un couple d'entiers (u,v) tels que $au + bv = d$. Mêmes questions avec $(a,b) = (126,69)$.

EXERCICE 24

1 Trouver des entiers relatifs u et v tels que $29u + 24v = 1$.

2 Déterminer l'ensemble des couples $(u,v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $29u + 24v = 3$.

EXERCICE 25

Calculer les plus grand diviseurs communs suivants : $\text{pgcd}(46\,848, 2\,379)$, $\text{pgcd}(13\,860, 4\,488)$,
$\text{pgcd}(30\,076, 12\,669, 21\,733)$.

EXERCICE 26

Quel est le plus petit entier (strictement positif) qui est multiple de 1, 2, 3,..., 10 ?

EXERCICE 27

Calculer $\text{pgcd}(357,629)$ puis $d = \text{pgcd}(357,629,221)$. Trouver des entiers x, y, z tels que $357x + 629y + 221z = d$.

EXERCICE 28

1 Soit m et n des entiers relatifs tels que m divise à la fois $8n + 7$ et $6n + 5$. Montrer que $m = \pm 1$.

2 Soit a un entier relatif. Déterminer le pgcd d des entiers $m = 14a + 3$ et $n = 21a + 4$ et trouver des entiers u et v tels que $um + vn = d$.

EXERCICE 29

Soit a et b des entiers premiers entre eux.

1 Montrer que le pgcd de $a + b$ et $a - b$ est égal à 1 ou 2. Préciser suivant les parités de a et b dans quel cas on se trouve.

2 Montrer que le pgcd de $a + 2b$ et $2a + b$ est égal à 1 ou 3.

EXERCICE 30

Dans l'État Désuni, la monnaie est le Ralldo (Ꞧ) et les pièces valent 7 Ꞧ ou 11Ꞧ. Montrer que l'on peut y payer toute somme à partir de 60 Ꞧ, mais qu'on ne peut pas y payer une somme de 59 Ꞧ. Qu'en est-il si le commerçant peut rendre la monnaie ?

EXERCICE 31

1 Soit a, b, c des entiers. On suppose que a divise bc et que $\text{pgcd}(a,b) = 1$. Montrer que a divise c. (*Multiplier par* c *une relation de Bézout* $1 = au + bv$.)

2 Soit a, b, c, d des entiers naturels non nuls. On suppose que $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(c,d) = 1$ et que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$ est entier. Montrer que $b = d$.

EXERCICE 32

Soit n un entier naturel.

1 Montrer que le plus petit multiple commun de $9n+8$ et $6n+5$ est égal à $54n^2+93n+40$.

2 Calculer pgcd et ppcm des entiers $12n^2+16n+6$ et $6n+5$.

EXERCICE 33. — Examen, janvier 1997

1 Montrer que 15 et 28 sont premiers entre eux.

2 Trouver une solution particulière dans $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ de l'équation $28x-15y=1$. En déduire une solution particulière dans $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ de l'équation $28x-15y=11$.

3 Trouver l'ensemble des couples (x,y) d'entiers relatifs vérifiant $28x-15y=11$.

4 Soit f l'application de $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$ telle que $f(x,y)=28x-15y$. Montrer que f est surjective. L'application f est-elle injective ?

5 Calculer le pgcd de 15 et 21. L'équation $15x-21y=5$ admet-elle des solutions dans $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$?

EXERCICE 34

Soit m et n des entiers >1.

1 Montrer qu'un nombre complexe z vérifie $z^n=z^m=1$ si et seulement si $z^{\mathrm{pgcd}(m,n)}=1$.

2 Si $m>n$, montrer que $\mathrm{pgcd}(a^m-1,a^n-1)=\mathrm{pgcd}(a^m-1,a^{m-n}-1)$. En déduire à l'aide de l'algorithme d'Euclide que $\mathrm{pgcd}(a^n-1,a^m-1)=a^{\mathrm{pgcd}(m,n)}-1$.

EXERCICE 35

On définit la suite de Fibonacci par $F_0=0$, $F_1=1$ et $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$.

1 Montrer (par récurrence) que $F_{n+1}F_{n-1}-(F_n)^2=(-1)^n$ pour tout n.

2 Montrer que $F_{n+m}=F_{n+1}F_m+F_nF_{m-1}$. (Faire une récurrence sur m, puis sur n.)

3 Montrer que l'on a, pour $m<n$, $\mathrm{pgcd}(F_n,F_m)=\mathrm{pgcd}(F_{n-m},F_m)$ et $\mathrm{pgcd}(n,m)=\mathrm{pgcd}(n-m,m)$. En déduire par récurrence sur $\max(m,n)$ que la relation $\mathrm{pgcd}(F_n,F_m)=F_{\mathrm{pgcd}(n,m)}$.

4* Calculer F_n pour tout entier n. Quelle est la limite de F_{n+1}/F_n quand n tend vers l'infini ? Montrer que F_n est l'entier le plus proche de $((1+\sqrt{5})/2)^n/\sqrt{5}$.

EXERCICE 36

Soit x, y, z des entiers >0, premiers entre eux dans leur ensemble, tels que $x^2+y^2=z^2$ (*triplet pythagoricien*).

1 Soit $d=\mathrm{pgcd}(x,y)$. Montrer que d divise z. En déduire que x, y, z sont premiers entre eux deux à deux.

2 Montrer que de x et y, l'un des deux est pair et l'autre est impair. On supposera dans la suite que x est pair.

3 Montrer que $\mathrm{pgcd}(z-y,z+y)=2$. En utilisant que $x^2=z^2-y^2=(z-y)(z+y)$, montrer qu'il existe des entiers u et v tels que $x=2uv$, $z+y=2u^2$ et $z-y=2v^2$.

4 Inversement, si u et v sont premiers entre eux, le triplet $(x,y,z)=(2uv,u^2-v^2,u^2+v^2)$ est un triplet pythagoricien.