Université de Paris

Master Mathématiques fondamentales, 2e année, 2e semestre
Année 2023/2024

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Cohomologie des faisceaux cohérents — extensions, cohomologie, etc.

ANTOINE CHAMBERT-LOIR

EXERCICE 1

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Si A et B sont des objets de $\mathcal{C}$, on appelle *extension* de A par B un triplet (E, i, p) où $i\colon B \to E$ et $p\colon E \to A$ sont des morphismes de $\mathcal{C}$ tels que la suite $0 \to B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} A \to 0$ soit exacte.

Un *morphisme* d'extensions de (E, i, p) dans $(E', i'\colon B' \to E', p'\colon E' \to A')$ est un diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "v"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "i"] & E' \arrow[r, "p"] & A' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

1 Vérifier que f détermine u et v. Démontrer aussi que si u et v sont des isomorphismes, alors f est un isomorphisme.

2 Démontrer que i admet une rétraction (un inverse à gauche, un morphisme $r\colon E \to B$ tel que $r \circ i = \mathrm{id}_B$) si et seulement si p possède une section (un inverse à droite, un morphisme $s\colon A \to E$ tel que $p \circ s = \mathrm{id}_A$). On dit alors que E est *scindée*.

3 Soit $u\colon A \to A'$ et soit E' une extension de A' par B' ; construire une extension u^*E' de A par B' et un morphisme de u^*E' vers E' induisant u et $\mathrm{id}_{B'}$.

4 Soit $v\colon B \to B'$ et soit E une extension de A par B ; construire une extension v_*E de A par B' et un morphisme $E \to v_*E$ induisant id_A et v.

5 Soit E et E' des extensions de A par B ; on note δ le morphisme diagonal de A dans $A \times A$ et σ le morphisme somme de $B \times B$ dans B ; on considère $E \oplus E'$ comme une extension de $A \times A$ par $B \times B$ et l'on pose $E + E' = \sigma_*\delta^*(E \oplus E')$. Démontrer que cette opération munit l'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions de A par B d'une structure de groupe abélien, d'élément neutre la classe des extensions scindées.

EXERCICE 2

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé.

1 Soit $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ des $\mathcal{O}_X$-modules et soit $\mathcal{E}$ une extension de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$.
Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont (quasi-)cohérents, démontrer qu'il en est de même de $\mathcal{E}$.

Si $\mathscr{E}$ est une extension de $\mathscr{O}_X$ par un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{F}$, on note $\delta(\mathscr{E}) \in H^1(X, \mathscr{F})$ l'image de $1 \in H^0(X, \mathscr{O}_X)$ par le cobord de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{E} \to \mathscr{O}_X \to 0$ qui définit l'extension $\mathscr{E}$.

2 Démontrer que δ est un homomorphisme de groupes du groupe $\operatorname{Ext}(\mathscr{O}_X, \mathscr{F})$ des classes d'extensions de $\mathscr{O}_X$ par $\mathscr{F}$ dans $H^1(X, \mathscr{F})$.

3 Démontrer que $\mathscr{E}$ est scindée si et seulement si $\delta(\mathscr{E}) = 0$.

4 Démontrer que δ est un isomorphisme.

EXERCICE 3

Soit X un schéma.

1 On suppose que X est affine. Démontrer que tout $\mathscr{O}_X$-module localement libre est un objet projectif de la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents.

2 On suppose que X est quasi-compact et que $\mathscr{O}_X$ est un objet projectif de la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents. Démontrer que X est affine. (*Démontrer que pour tout $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$, on a* $H^1(X, \mathscr{F}) = 0$.)

3 Soit n un entier $\geqslant 1$ et soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent non nul sur $\mathbf{P}^n_K$, où K est un corps. Démontrer successivement qu'il existe :

a) Un entier relatif a et un homomorphisme non nul $u \colon \mathscr{O}_{P^n}(a) \to \mathscr{F}$;

b) Des entiers relatifs $b_1, \dots, b_m$ strictement inférieurs à a et un homomorphisme surjectif $v \colon \bigoplus_{i=1}^{m} \mathscr{O}_{P^n}(b_i) \to \mathscr{F}$.

En déduire que v n'admet pas de section. En particulier, $\mathscr{F}$ n'est pas un objet projectif de la catégorie des faisceaux cohérents sur $\mathbf{P}^n_K$.(*)

4 Généraliser la question précédente en remplaçant $\mathbf{P}^n_K$ par un sous-schéma intègre de $\mathbf{P}^n_K$ de dimension strictement positive.

EXERCICE 4

Soit A un anneau noethérien, soit P un idéal premier de A et soit K le corps des fractions de l'anneau intègre A/P, considéré comme A-algèbre.

Si $u \colon M \to N$ est morphismes de A-modules et B une A-algèbre, on note $u \otimes B \colon M \otimes_A B \to N \otimes_A B$ le morphisme de B-modules déduit de u par produit tensoriel par B.

1 Soit $u \colon M \to N$ un homomorphisme de A-modules de type fini. On suppose que $u \otimes K$ est surjectif. Démontrer qu'il existe un élément $a \in A - P$ tel que l'homomorphisme $u \otimes A_a$ soit surjectif. (*Commencer par traiter le cas où* A *est un anneau local.*)

2 On suppose de plus que N est plat et que $u \otimes K$ est injectif. Démontrer qu'il existe un élément $a \in A - P$ tel que $u \otimes A_a$ est injectif.

(*) Je tiens cet argument de l'utilisateur *Angel of the bottomless pit* du site MathOverflow, *https://mathoverflow.net/q/289632*.

3 Donner un exemple montrant que dans la question précédente, on ne peut omettre l'hypothèse de platitude sur N.

4 Soit $M^\bullet$ un complexe borné de A-modules à termes *plats* et de type fini. On suppose que le complexe $M^\bullet \otimes K$ est exact. Démontrer qu'il existe un élément $a \in A - P$ tel que le complexe $M^\bullet \otimes A_a$ soit exact.

5 Dans la question précédente, on suppose que A est un anneau local. Démontrer que pour tout A-module Q, le complexe $M^\bullet \otimes Q$ est exact.

EXERCICE 5

Soit A un anneau noethérien, soit $f : X \to \mathrm{Spec}(A)$ un morphisme quasi-compact et séparé. Si B est une A-algèbre, on note X_B le schéma $X \otimes_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(B)$, $p : X_B \to X$ et $f_B : X_B \to \mathrm{Spec}(B)$ les deux projections. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau quasi-cohérent sur X, on note $\mathscr{F}_B$ le faisceau quasi-cohérent $p^*\mathscr{F}$ sur X_B.

1 Si X est un schéma affine, expliquer pourquoi X_B est un schéma affine.

2 Construire pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathscr{F}$ des homomorphismes $H^p(X, \mathscr{F}) \otimes_A B \to H^p(X_B, \mathscr{F}_B)$ qui sont fonctoriels en $\mathscr{F}$.

3 Si B est une A-algèbre plate, démontrer que ces homomorphismes sont des isomorphismes.

Dans la suite de l'exercice, on considère une A-algèbre B qui est *fidèlement* plate, c'est-à-dire plate et telle que le morphisme de schémas $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ soit surjectif.

4 On suppose que X_B est vide ; démontrer que X est vide.

5 On suppose que X_B est quasi-compact ; démontrer que X est quasi-compact.

6 On suppose que X_B est un schéma affine. Démontrer que pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathscr{F}$ sur X et tout idéal premier P de A, on a $H^1(X, \mathscr{F}) \otimes K(P) = 0$. En déduire que $H^1(X, \mathscr{F}) = 0$ puis que X est un schéma affine.