L'ESSENTIEL

> La géométrie tropicale est un champ mathématique récent, apparu dans les années 1980.

> Cette géométrie repose sur une algèbre dite tropicale, où l'on remplace l'addition de deux termes par la prise de leur maximum, et la multiplication par l'addition.

> Dans cette géométrie, les objets les plus simples, les courbes tropicales, ressemblent à des réseaux de segments et de demi-droites.

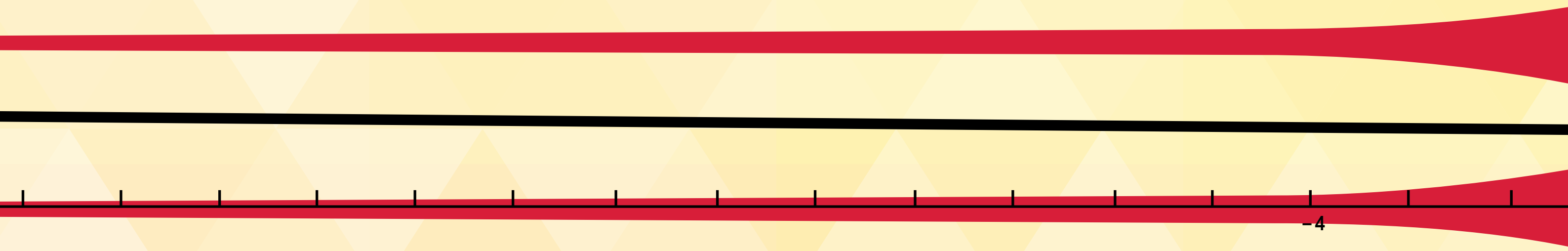
> Ils ont des propriétés analogues à celles des courbes de la géométrie algébrique classique, qu'ils permettent donc d'étudier par un autre biais.

L'AUTEUR

ANTOINE CHAMBERT-LOIR
professeur de mathématiques à l'université Paris-Diderot, spécialisé en géométrie algébrique et arithmétique

Quand la géométrie devient tropicale

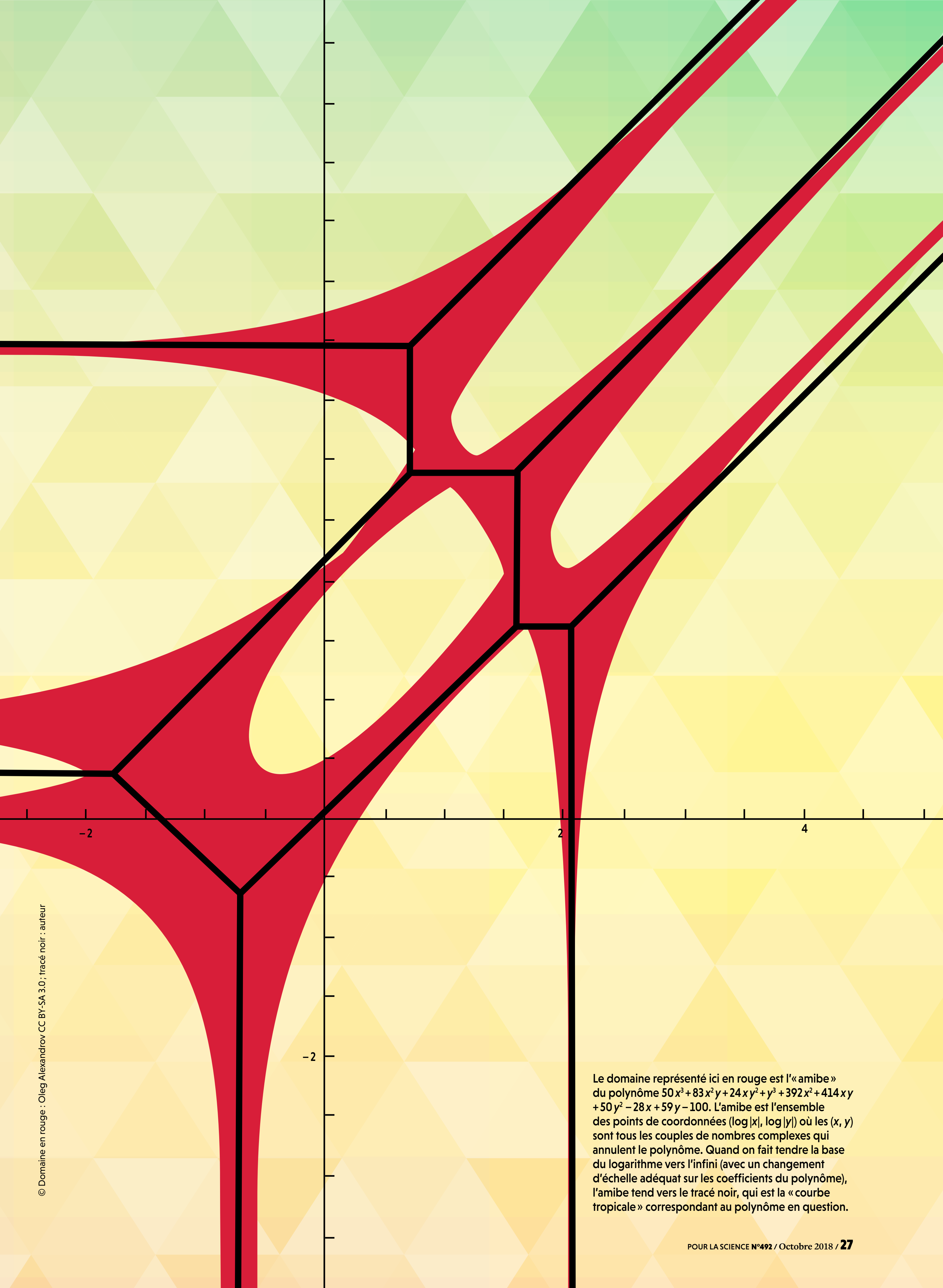
Prendre l'équation d'une courbe, remplacer l'addition et la multiplication par deux opérations plus exotiques, et étudier l'objet géométrique qui en résulte : c'est ce que fait la géométrie tropicale, un domaine récent des mathématiques. Qui profite aussi à la géométrie plus classique.



En mathématiques, pour étudier les propriétés de certains objets, il est fréquent qu'il soit plus commode ou plus fructueux de passer par des objets de nature très différente. Les exemples de tels détours sont légion. L'un des plus élémentaires et des plus répandus est le détour par les nombres complexes (ceux de la forme $a+ib$, où a et b sont des nombres réels et i un nombre imaginaire qui vérifie $i^2=-1$) pour résoudre ou étudier des équations ne mettant en œuvre que des coefficients et variables réels. D'ailleurs, le recours aux nombres complexes, que ce soit en analyse, en algèbre ou en géométrie, est tellement universel que, sans lui, les mathématiques d'aujourd'hui n'existeraient pas.

On peut voir la géométrie tropicale, dont il va être question ici, de la même façon. Ce domaine, qui n'a commencé à émerger que dans les années 1980, repose sur une algèbre particulière qui était apparue dans divers contextes des mathématiques discrètes et de l'informatique.

La géométrie tropicale est à présent un champ de recherche très actif, intéressant en soi mais aussi utile à d'autres domaines des mathématiques, en particulier la géométrie algébrique (l'étude des objets géométriques définis par des équations algébriques, construites à l'aide de l'addition et de la multiplication). Ses objets, les courbes tropicales (et, plus généralement, les « variétés » tropicales), ont des propriétés parfois analogues à celles que l'on découvre en géométrie >



Le domaine représenté ici en rouge est l'« amibe » du polynôme $50x^3+83x^2y+24xy^2+y^3+392x^2+414xy+50y^2-28x+59y-100$. L'amibe est l'ensemble des points de coordonnées ($\log|x|$, $\log|y|$) où les (x, y) sont tous les couples de nombres complexes qui annulent le polynôme. Quand on fait tendre la base du logarithme vers l'infini (avec un changement d'échelle adéquat sur les coefficients du polynôme), l'amibe tend vers le tracé noir, qui est la « courbe tropicale » correspondant au polynôme en question.

> algébrique. De ce fait, le passage par la géométrie tropicale permet de découvrir, calculer ou prouver, parfois plus facilement, certaines propriétés des objets de la géométrie algébrique. On l'illustrera ici en montrant comment les courbes tropicales permettent d'aborder un problème de géométrie énumérative, partie de la géométrie algébrique qui consiste à compter les points, courbes, surfaces, etc. vérifiant certaines conditions.

Partons du célèbre postulat d'Euclide: « Par deux points distincts, il passe une droite et une seule », en cherchant à y remplacer la figure géométrique d'une droite par une autre figure géométrique. Considérons par exemple un cercle, et posons les deux questions suivantes: combien faut-il de points du plan pour déterminer un cercle passant par eux? Combien de cercles n points déterminent-ils? On observe d'abord que par deux points A et B donnés, il passe une infinité de cercles. En revanche, si l'on se donne un troisième point C qui n'est pas sur la droite (AB), il n'existe qu'un seul cercle passant par A, B, C: c'est le cercle circonscrit au triangle ABC.

La question devient un peu plus riche si l'on prend pour figure géométrique une conique. Comme le suggère leur nom, il s'agit des courbes tracées par l'intersection d'un cône et d'un plan. Elles sont essentiellement de trois sortes: les ellipses, les paraboles et les hyperboles (*voir la figure page ci-contre*). Les courbes du premier type, les ellipses, sont fondamentales en mécanique céleste: ce sont par exemple celles que décrivent les planètes autour du Soleil. Celles du deuxième type sont aussi très importantes dans la vie de tous les jours, puisque c'est d'elles que les antennes satellites – paraboliques – tirent leur forme.

COMPTER DES COURBES RATIONNELLES

Au XVII^e siècle, Pascal avait démontré que par cinq points quelconques, tels que quatre quelconques d'entre eux ne sont pas alignés, il passe une conique, et une seule (*voir la figure page 30*). L'une des questions qui se posent naturellement en géométrie est s'il est possible de trouver des énoncés analogues pour d'autres familles de courbes. La réponse est oui, comme nous allons le voir.

Les droites et les coniques du plan ont deux qualités, qu'on retrouvera dans les autres courbes en question. Tout d'abord, ce sont des « courbes rationnelles », c'est-à-dire que l'on peut paramétrer les coordonnées de leurs points à l'aide de fractions rationnelles d'une variable t (rappelons qu'une « fraction rationnelle » en t est un quotient $P(t)/Q(t)$ de deux polynômes P et Q, et qu'un polynôme de degré n en la variable t est une expression de la forme $a_0+a_1t+a_2t^2+...+a_nt^n$, où les a_i sont les coefficients du polynôme).

POURQUOI 3*D* – 1 POINTS POUR LES COURBES DE DEGRÉ *D* ?

Expliquons pourquoi il faut fixer $3d - 1$ points pour qu'il n'y ait qu'un nombre fini N_d de courbes rationnelles de degré d passant par ces points.

Un paramétrage de degré d d'une courbe rationnelle est de la forme :
$x(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_d t^d)/(\gamma_0 + \gamma_1 t + \cdots + \gamma_d t^d)$,
$y(t) = (\beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_d t^d)/(\gamma_0 + \gamma_1 t + \cdots + \gamma_d t^d)$.
Ce paramétrage dépend des $3(d + 1)$ coefficients (ou paramètres !) $\alpha_0,..., \alpha_d, \beta_0,..., \beta_d, \gamma_0,..., \gamma_d$. Cependant, on peut diviser le numérateur et le dénominateur de chacune de ces fractions rationnelles par le même nombre, par exemple γ_d, ce qui élimine un paramètre, de sorte que nous n'avons que $3(d + 1) - 1 = 3d + 2$ paramètres effectifs. Par ailleurs, on peut changer le paramétrage d'une courbe rationnelle sans changer la courbe en remplaçant t par $(at + b)/(ut + w)$; cela fait encore chuter le nombre de paramètres effectifs de $4 - 1 = 3$. Ainsi, finalement, les courbes rationnelles de degré d dépendent de $(3d + 2) - 3 = 3d - 1$ paramètres.

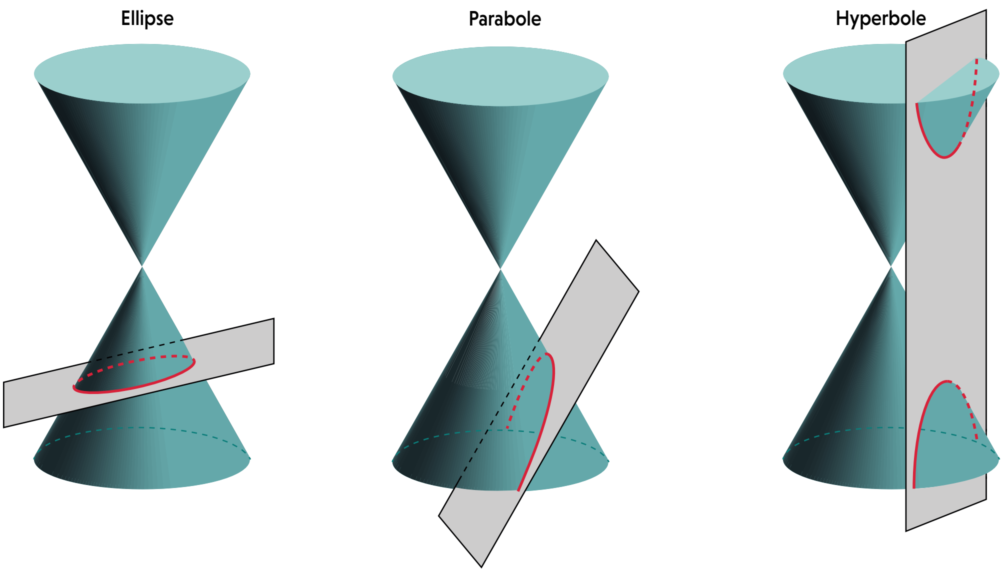
Maintenant, imposer qu'une telle courbe passe par un point M du plan revient à ajouter un paramètre t_M (l'« instant » auquel la courbe paramétrée passe par le point M) et à ajouter les deux équations $x(t_M) = x_M$ et $y(t_M) = y_M$; imposer le passage par le point M fait donc perdre un degré de liberté. Par conséquent, lorsqu'on impose à une courbe rationnelle plane de degré d, qui dépend *a priori* de $3d - 1$ paramètres, de passer par $3d - 1$ points donnés, il n'y a plus aucun paramètre dont pourraient dépendre les courbes recherchées. À une réserve près, cependant : que les conditions imposées par les $3d - 1$ points ne soient pas redondantes entre elles, ce qui arrive parfois. S'il n'y a pas redondance, on dit que les points sont en position générale (ils font alors tous chuter le nombre de degrés de liberté d'une unité chacun).

Grâce à une théorie algébrique aujourd'hui classique, fort justement appelée théorie de l'élimination, on peut éliminer un à un les paramètres auxiliaires t_M ajoutés dans cette analyse. On se retrouve alors avec un énorme système d'équations polynomiales dont les inconnues sont les paramètres initiaux $\alpha_0,..., \alpha_d, \beta_0,..., \beta_d, \gamma_0,..., \gamma_d$. Ce système n'a qu'un nombre fini de solutions, et c'est précisément ce nombre (N_d) que calcule la formule de Maxim Kontsevich.

Il y a deux aspects, classiques mais subtils, dans ce décompte. D'une part, toutes les solutions des équations polynomiales en jeu ne sont pas forcément des nombres réels, et il faut prendre en compte les valeurs complexes. D'autre part, chaque solution a sa « multiplicité ».

Pour décrire ces deux phénomènes, et montrer leur importance, il est plus simple de considérer le cas d'une équation polynomiale à une inconnue, que l'on peut écrire sous la forme $F(x) = x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$. Son degré est n, et le théorème de d'Alembert-Gauss (parfois appelé théorème fondamental de l'algèbre) garantit qu'il existe des nombres complexes $\alpha_1,..., \alpha_n$ tels que $F(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$. Ces nombres complexes sont toutes les solutions de l'équation $F(x) = 0$, et la multiplicité d'une solution est le nombre de fois qu'elle apparaît. Par exemple, la factorisation $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 5 = (x - 1)^2 (x - 1 - 2i) (x - 1 + 2i)$ montre que les solutions de l'équation $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 5 = 0$ sont 1 (multiplicité 2), $1 + 2i$ (multiplicité 1) et $1 - 2i$ (multiplicité 1).

C'est parce que l'on compte toutes les racines, réelles ou complexes, avec leur multiplicité, que le théorème de d'Alembert-Gauss prend une forme très agréable : une équation polynomiale de degré n a exactement n solutions.



Les coniques *(en rouge)* sont les courbes nées de l'intersection d'un cône et d'un plan. Ces courbes peuvent être décrites par des équations polynomiales $F(x, y)=0$ de degré 2. On peut aussi les représenter sous forme paramétrique, les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de leurs points étant données par des fractions $P(t)/Q(t)$, où P et Q sont des polynômes en t de degré 2 au plus.

Par exemple, la droite passant par deux points A et B du plan, de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B), admet le paramétrage suivant:

$$x(t)=(1-t)\,x_A+tx_B,$$
$$y(t)=(1-t)\,y_A+ty_B,$$

de façon que quand le paramètre t décrit l'ensemble des nombres réels, le point $(x(t), y(t))$ décrit toute la droite (AB).

Le paramétrage d'une conique est plus subtil, mais se déduit d'une construction géométrique simple; pour le cercle de centre O et de rayon 1, on obtient: $x(t)=(1-t^2)/(1+t^2)$, $y(t)=2t/(1+t^2)$.

Les courbes rationnelles peuvent aussi être décrites par une équation $F(x, y)=0$ où F est un polynôme en x et y. Cette équation polynomiale est de la forme $ax+by+c=0$ dans le cas d'une droite, et $x^2+y^2=R^2$ pour le cercle de rayon R centré en l'origine. Le degré d de F est le degré de la courbe rationnelle plane; il est égal à 1 pour les droites, à 2 pour le cercle et les autres coniques.

On cherchait le nombre de courbes rationnelles planes de degré *d* passant par 3*d*–1 points

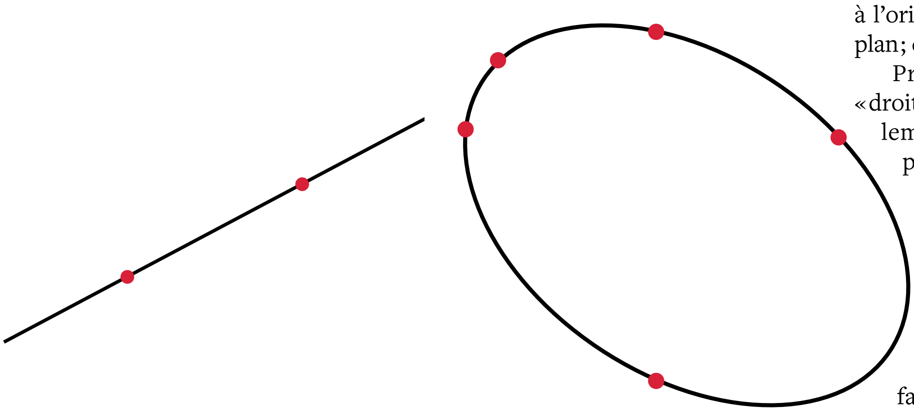
Cependant, les droites et les coniques ne sont que les premiers exemples de courbes rationnelles planes, et les mathématiciens se sont bien sûr intéressés aux courbes rationnelles de degrés supérieurs.

En 1993, le mathématicien russe Maxim Kontsevich, aujourd'hui professeur permanent à l'IHES (Institut des hautes études scientifiques), près de Paris, a résolu une question qui se posait alors, et dont les droites et les coniques forment les deux premiers cas. Nous avons vu que par deux points, il ne passe qu'une seule droite, et que par cinq points, il ne passe qu'une seule conique. Il s'agissait de généraliser et de déterminer, pour tout entier positif d, le nombre N_d de courbes rationnelles planes de degré d passant par $3d-1$ points. Ces nombres sont des «invariants de Gromov-Witten», issus de considérations mathématiques plus générales inspirées par la théorie des cordes en physique, et nommés d'après Mikhaïl Gromov, qui travaille lui aussi à l'IHES, et Edward Witten, physicien-mathématicien de l'Institut d'études avancées de Princeton, aux États-Unis.

Plus précisément, Maxim Kontsevich a démontré la formule de récurrence, assez incroyable, selon laquelle N_d est égal à:
$\sum\left(a^2b^2C(3d-4, 3a-2)-a^3bC(3d-4, 3a-1)\right)N_aN_b$,
où la somme $\sum$ porte sur tous les entiers positifs a et b tels que $a+b=d$ et où $C(p, q)$ désigne ici le coefficient binomial $p!/[q!(p-q)!]$, avec $p!=p\times(p-1)\times(p-2)\times\cdots\times 2\times 1$.

Compte tenu de $N_1=1$, cette formule permet de calculer tous les autres N_d de proche en proche. En particulier, on retrouve $N_2=1$ (comme Pascal l'avait prouvé en géométrie pure), $N_3=12$ (autrement dit, par 8 points donnés, il passe en général 12 courbes de degré 3, c'est-à-dire cubiques), $N_4=620$ (calculé par le mathématicien danois Hieronymus Zeuthen en 1873), $N_5=87304$ (qui avait été calculé juste avant que Maxim Kontsevich ne présente sa formule). Mais on obtient aussi les valeurs inédites: $N_6=26\,312\,976$, $N_7=14\,616\,808\,192$, $N_8=13\,525\,751\,027\,392$, etc.

L'entier $3d-1$ qui apparaît dans le problème résolu par Maxim Kontsevich peut sembler >



Par deux points, il passe une seule droite. Par cinq points, il passe une seule conique *(ici, en l'occurrence, une ellipse)*. Pour les courbes de degré supérieur, il existe des relations analogues qui ont été démontrées récemment dans toute leur généralité. Une preuve passant par la géométrie tropicale a été donnée vers 2005.

> mystérieux, mais, pour $d=1$ ou 2, on trouve 1 ou 5, le nombre de points qu'il s'agissait de fixer pour déterminer une droite ou une conique. Pour comprendre pourquoi, en général, $3d-1$ points déterminent un nombre fini de courbes rationnelles, on peut procéder à un décompte des paramètres à l'aide desquels les courbes sont décrites (*voir l'encadré page 28*).

Quelques années après ces travaux de Maxim Kontsevich, la géométrie des «courbes tropicales» a permis d'aborder la question sous un nouvel angle. Que sont ces objets? Pour les introduire, revenons aux courbes rationnelles planes qui, comme la droite et le cercle, peuvent aussi être définies par une équation polynomiale $F(x, y)=0$ avec deux variables (ou coordonnées) x et y. Même si l'on continue à parler de courbe, les mathématiciens considèrent généralement, pour de multiples raisons, que ces deux coordonnées peuvent aussi prendre des valeurs complexes.

Dans ce cas, chaque coordonnée représente, *de facto*, deux coordonnées réelles, sa partie réelle (a dans un nombre $a+ib$) et sa partie imaginaire (b dans $a+ib$). Autrement dit, nous avons maintenant quatre coordonnées réelles, liées par une équation $F(x, y)=0$ qui équivaut en fait à deux équations, une première pour la partie réelle de F et une seconde pour sa partie imaginaire. Quatre coordonnées, deux relations: c'est plutôt une surface à laquelle on a affaire, dans un espace à quatre dimensions – quelque chose de délicat à visualiser!

L'étude des propriétés d'un tel objet est difficile en général, et divers outils et méthodes ont été élaborés dans ce contexte. Notamment, dans les années 1990, les mathématiciens d'origine russe Israel Gelfand, Mikhail Kapranov et Andrei Zelevinsky ont eu l'idée de visualiser à l'aide de coordonnées logarithmiques la taille des nombres complexes x et y qui sont solution d'une équation polynomiale $F(x,y)=0$. Plus précisément, l'idée est de tracer l'ensemble A_F des points de coordonnées $(u, v)=(\log|x|, \log|y|)$, où (x,y) parcourt toutes les solutions de l'équation $F(x,y)=0$ (la notation $|x|$ désigne le module de x: si $x=a+ib$, alors $|x|=\sqrt{(a^2+b^2)}$, la distance à l'origine du point représentatif de x dans le plan; c'est la valeur absolue de x si x est réel).

Prenons l'exemple, très simple, de la «droite» d'équation $x+y=1$ (on a mis des guillemets, car il faut se souvenir que x et y peuvent prendre des valeurs complexes, et donc que cette équation représente un objet géométrique plus compliqué, dans un espace à quatre dimensions). On cherche alors les couples de nombres réels $(u, v)=(\log|x|, \log|y|)$ tels que les nombres complexes x et y vérifient $x+y=1$. Dans ce cas, on peut faire le calcul relativement aisément. On trouve que les points (u, v) constituent le domaine du plan délimité par les trois courbes d'équations $v=\log(e^u+1)$ pour tout u, $v=\log(1-e^u)$ pour $u<0$ et $v=\log(e^u-1)$ pour $u>0$ (*voir la figure page ci-contre*).

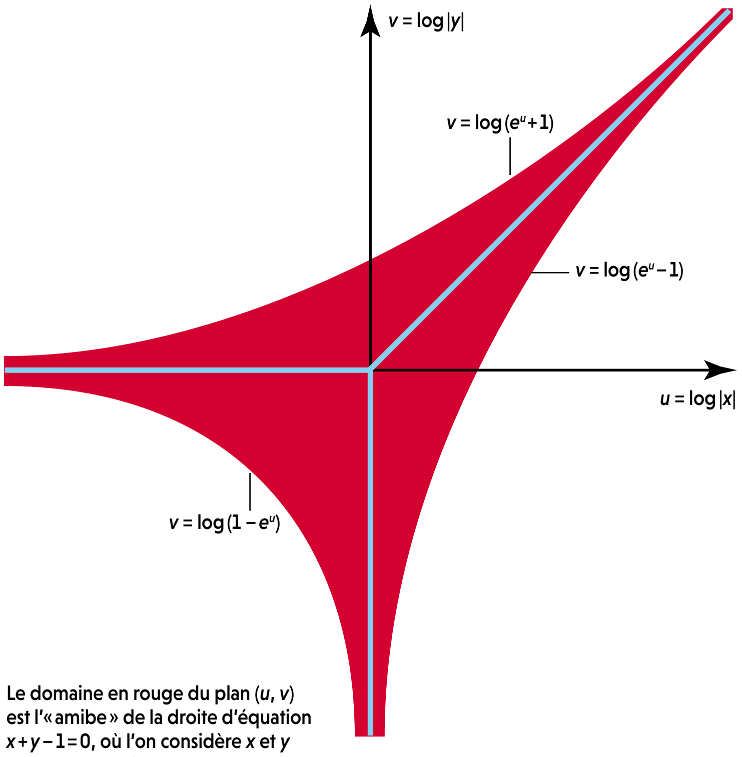
D'UNE ÉQUATION POLYNOMIALE À SON AMIBE

Ce domaine présente des sortes de tentacules, caractéristique que l'on retrouve pour les autres équations (ou courbes) $F(x,y)=0$ et qui explique pourquoi les ensembles A_F ont été appelés «amibes».

Que sont, justement, les trois tentacules de l'amibe de la droite $x+y=1$? Ils correspondent aux points de cette droite dont les coordonnées sont soit très grandes ($\log|x|$ tend vers $+\infty$), soit au contraire très petites ($\log|x|$ tend vers $-\infty$). Ainsi, le tentacule du haut à droite correspond aux points dont les coordonnées (x, y) sont toutes deux grandes; dans ce cas, la constante 1 est négligeable devant x et y, et l'équation $x+y=1$ se simplifie en $x\approx-y$; en particulier, on a $|x|\approx|y|$ et l'on voit pourquoi ce tentacule s'approche de la diagonale d'équation $v=u$. Le tentacule de gauche correspond au cas où x est petit: dans ce cas, $y=1-x$ est proche de 1 et $v=\log|y|$ est proche de 0. De la même façon, le tentacule du bas correspond au cas où y est petit.

Sur la figure, on a aussi représenté le «squelette» de l'amibe; pour $x+y=1$, il est constitué

On «tropicalise» un polynôme en remplaçant l'opération + par max, et l'opération × par +



Le domaine en rouge du plan (u, v) est l'« amibe » de la droite d'équation $x+y-1=0$, où l'on considère x et y comme des variables complexes. Son squelette *(en bleu)* est la « droite tropicale » correspondant au polynôme $x+y-1$. Cette droite tropicale est donnée par les points (u, v) pour lesquels le maximum $\max(u, v, 0)$ est atteint en au moins deux de ces trois arguments u, v et 0.

de trois demi-droites issues de l'origine. Une première façon de comprendre ce squelette, mise en avant par plusieurs mathématiciens, en particulier les Russes Victor Maslov et Oleg Viro, consiste à changer d'échelle et à tracer la même amibe en remplaçant le logarithme naturel (népérien, de base $e=2{,}718...$) par un logarithme de base supérieure. L'amibe se contracte alors autour de son squelette (*voir la figure ci-dessous*).

QUAND L'ALGÈBRE TROPICALE POINTE SON NEZ...

Il y a une façon plus algébrique de comprendre ce processus. La fonction logarithme transforme une multiplication en addition : si $z=xy$, on a $\log z=\log x+\log y$. Ainsi, si l'on note $u=\log x$, $v=\log y$ et $w=\log z$, on a $w=u+v$.

En même temps, la loi d'addition devient plus étrange : si $z=x+y$, on a $\log z=\log(x+y)=\log(e^{\log x}+e^{\log y})$, c'est-à-dire $w=\log(e^u+e^v)$.

Mais cette étrangeté se simplifie lorsqu'on va au bout du changement d'échelle : pour un logarithme de base b, cette formule devient $w=\log_b(b^u+b^v)$ et son membre de droite converge, lorsque b tend vers l'infini, vers le plus grand des deux nombres u et v, c'est-à-dire que l'on a, dans cette limite, $w=\max(u, v)$.

Autrement dit, poussé à son terme, le changement d'échelle de Maslov et Viro déforme les lois familières d'addition (+) et de multiplication (×) vers les « lois exotiques » max et +, respectivement. Nous entrons enfin dans le domaine qui fait l'objet de cet article, car ces deux dernières lois définissent ce qu'on appelle aujourd'hui l'algèbre tropicale, et plus anciennement l'algèbre max-plus.

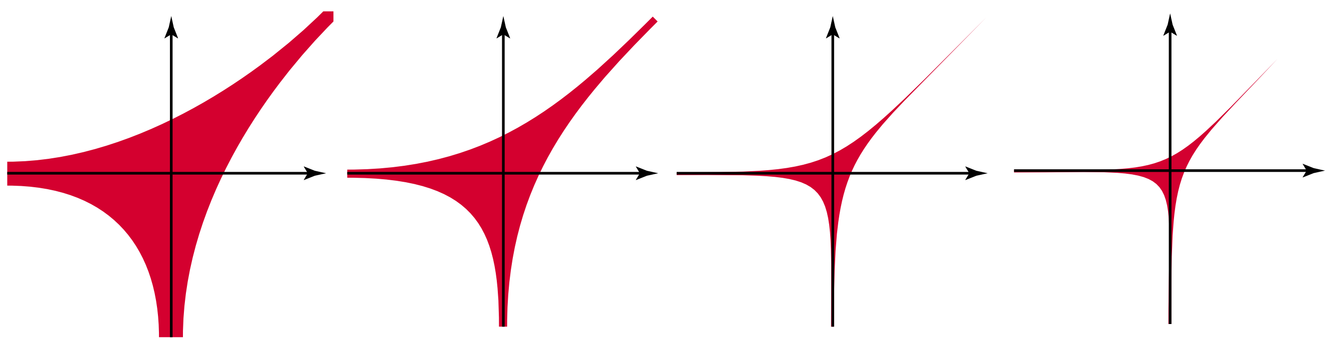
On peut traduire dans cette algèbre n'importe quelle expression polynomiale, en remplaçant l'opération + par l'opération max, et l'opération × par l'addition usuelle, comme si l'on prenait le logarithme selon la procédure ci-dessus. Un monôme de la forme ax^n sera ainsi traduit en l'expression $\log|a|+nu$, et un polynôme tel que $-2+5x^2+(-4)y^3$ sera ainsi traduit en $\max(\log 2, \log 5+2u, \log 4+3v)$.

DES AMIBES AUX COURBES TROPICALES

Appliquons cette règle à l'équation de notre droite-modèle, écrite sous la forme $x+y-1=0$, en traduisant le membre de gauche dans cette algèbre tropicale. On obtient alors l'expression $\max(u, v, 0)$, qui fournit la clé de la compréhension du squelette de notre amibe. En effet, les trois demi-droites qui constituent ce squelette correspondent exactement aux points de coordonnées (u, v) telles que le maximum de u, v et 0 est atteint en au moins deux de ces trois arguments (par exemple, si le maximum est atteint pour les deux premiers des trois arguments u, v et 0, cela signifie que $u=v$ et que $u>0$, $v>0$: c'est la demi-droite diagonale du squelette). Ce squelette est la « courbe tropicale » correspondant à l'équation $x+y-1=0$.

Ces considérations se généralisent à toute équation polynomiale, à laquelle on peut donc associer une amibe et son squelette, c'est-à-dire la courbe tropicale correspondante. La compréhension de ces amibes et de leurs squelettes, pour des polynômes F plus généraux que l'exemple choisi ici, constitue un difficile sujet >

Quand on augmente la base du logarithme utilisé pour calculer l'amibe (ici celle de l'équation $x+y-1=0$), l'amibe se contracte. À la limite où la base tend vers l'infini, l'amibe se réduit à son squelette.



> de recherches actuelles. Même obtenir une représentation graphique précise de ces objets n'est pas si aisé.

L'un des résultats connus, et que l'on peut constater dans notre exemple, est que la région du plan complémentaire de l'amibe est une réunion d'un nombre fini de domaines convexes. Autrement dit, étant donnés deux points hors de l'amibe, soit on peut les relier par un segment qui ne touche pas l'amibe, soit on ne peut même pas les relier par une courbe continue.

Prenons un autre exemple, un peu plus compliqué : le polynôme $F(x,y) = 1+2xy+x^3+y^3$. Comme on l'a fait plus haut, la tropicalisation de F est définie en interprétant F dans l'algèbre tropicale et en prenant les logarithmes des coefficients. On obtient :

$F_{\text{trop}}(u, v) = \max(0, \log 2+u+v, 3u, 3v)$.

La « courbe tropicale » correspondante (*voir la figure ci-contre*) est définie comme précédemment : c'est l'ensemble des (u, v) pour lesquels ce maximum est atteint en deux termes au moins (c'est-à-dire en au moins deux des arguments 0, $\log 2+u+v$, $3u$ et $3v$).

Comme dans l'exemple précédent, cette courbe tropicale est un ensemble linéaire par morceaux, constitué ici de trois segments et de trois demi-droites. Cette linéarité par morceaux est une propriété générale des courbes tropicales. Une autre, un peu plus difficile à décrire, est une condition d'équilibre en chacun des points multiples, où se rejoignent plusieurs lignes. Chaque branche issue d'un tel point a un vecteur directeur primitif, c'est-à-dire que ses deux coordonnées sont des entiers premiers entre eux ; la théorie lui attribue également un poids, qui est un nombre entier positif. La condition d'équilibre stipule qu'en chaque sommet, la somme de ces vecteurs primitifs, pondérée par leurs poids, est nulle.

Pourquoi s'intéresser aux courbes tropicales ? L'un de leurs attraits est qu'elles ont des propriétés de nature essentiellement combinatoire, tout en reflétant assez fidèlement la géométrie des « courbes » algébriques sous-jacentes, ces objets définis par des équations polynomiales $F(x,y)=0$ où x et y sont des coordonnées complexes.

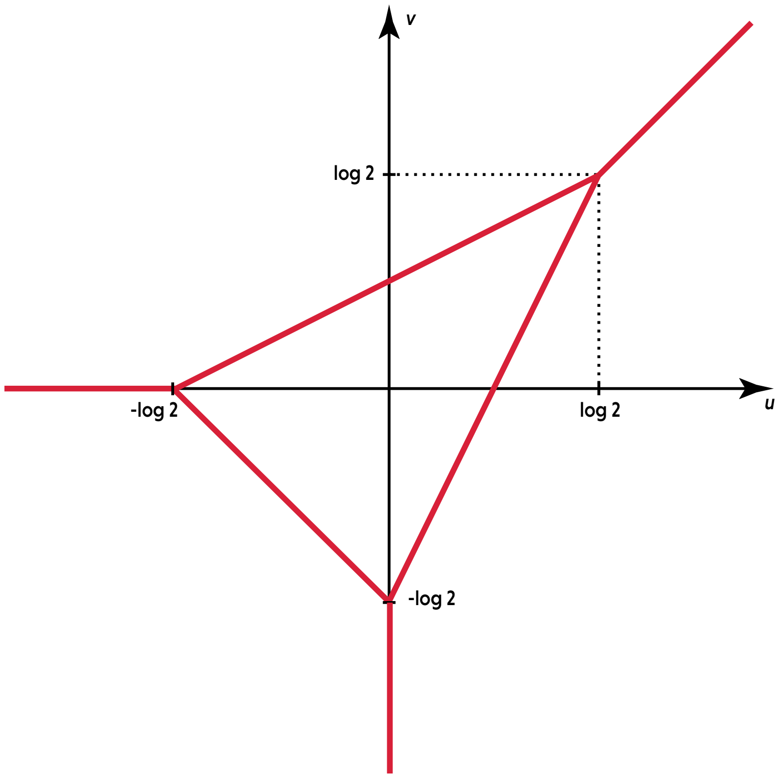
DES APPLICATIONS À LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Au cours des dernières années, de nombreux mathématiciens ont étendu des théorèmes classiques de la géométrie algébrique au contexte de la géométrie tropicale. Il en est ainsi du « théorème de Bézout » qui établit que le nombre de points d'intersection de deux courbes tropicales est égal au produit de leurs degrés (*voir la figure page suivante*). Bien que plus élémentaire que l'énoncé correspondant en géométrie algébrique, la variante tropicale en fournit un raffinement, car, outre le nombre de points d'intersection, le théorème fournit aussi des informations sur leurs positions.

De façon plus importante, la géométrie tropicale a permis de fournir de nouvelles démonstrations, plus simples, de résultats difficiles.

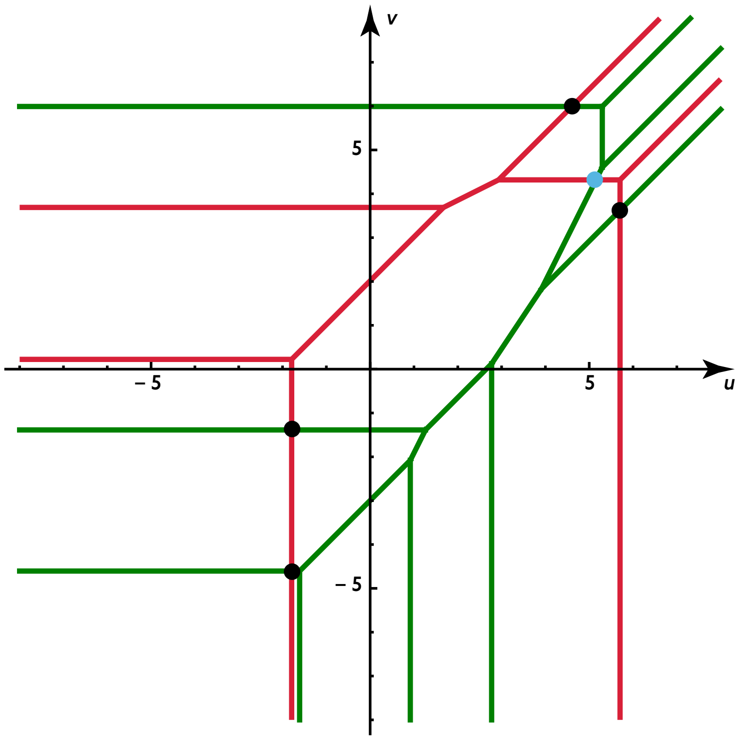
La première application concernait les invariants de Gromov-Witten, les nombres N_d mentionnés au début de cet article. On doit en effet à Grigory Mikhalkin, de l'université de Genève, un remarquable « principe de correspondance », qui établit pour l'essentiel une bijection entre les courbes algébriques de degré d et leurs analogues tropicales. Par ailleurs, Andreas Gathmann et Hannah Markwig, à l'université de Kaiserslautern, en Allemagne, ont prouvé vers 2005 l'analogue tropical de la formule de Kontsevich. La combinaison de ces deux travaux fournit ainsi une nouvelle démonstration de la relation de récurrence de Kontsevich.

Ces techniques tropicales avaient aussi permis de calculer les analogues, en géométrie réelle, des invariants de Gromov-Witten. Ils portent toujours sur des courbes, mais on impose maintenant que les coefficients des équations de celles-ci soient des nombres réels, et non plus des nombres complexes. Le décompte de ces courbes est en général très mystérieux, mais Jean-Yves Welschinger,



UNE COURBE TROPICALE

Cette figure linéaire par morceaux est la « courbe tropicale » associée au polynôme $F(x, y)=1+2xy+x^3+y^3$. Elle correspond à l'ensemble des points (u, v) du plan tels que le maximum de 0, $\log 2+u+v$, $3u$, $3v$ est atteint en au moins deux de ces quatre arguments.



INTERSECTION DE COURBES TROPICALES

Comme pour des courbes algébriques classiques, le nombre de points d'intersection de deux courbes tropicales est égal, en général, au produit de leurs degrés. Ici, la conique tropicale (degré 2) associée au polynôme $x^2+4xy-300x-40y-50$ *(en rouge)* croise la cubique tropicale (degré 3) liée au polynôme $x^3/8+x^2y+2xy^2+y^3+2x^2+15xy+400y^2+5x+100y+1$ *(en vert)* en $2\times3=6$ points (on montre que le point d'intersection bleu, proche de (5, 5), est de multiplicité 2 : il compte double).

aujourd'hui à l'université de Lyon, avait découvert en 2002 qu'il convenait de les compter certaines positivement et les autres négativement, définissant ainsi des invariants W_d analogues aux entiers N_d.

Pour ces nombres, Ilia Itenberg (Sorbonne Université et École normale supérieure, à Paris), Viatcheslav Kharlamov (université de Strasbourg) et Eugenii Shustin (université de Tel-Aviv) ont pu établir en 2009 une relation de récurrence d'où il découle, par exemple, que $W_3=8$, $W_4=240$, etc. Autrement dit, s'il y a $N_3=12$ cubiques rationnelles passant par 8 points généraux réels, seules $W_3=8$ sont réelles. Compte tenu de la règle de comptage « avec signes », cela signifie en fait qu'il y en a 8 (toutes comptées avec le même signe), 10 (une a un signe opposé des neuf autres) ou 12 (deux ont un signe opposé des dix autres) ; le nombre précis dépend des positions des 8 points choisis.

Plus récemment encore, la géométrie tropicale a fourni une clé pour accéder à certaines propriétés des courbes algébriques, planes ou non, ainsi qu'à des propriétés de certains espaces, introduits par Bernhard Riemann au milieu du XIXe siècle, qui paramètrent toutes ces courbes algébriques de façon naturelle. Par exemple, en 2012, Filip Cools, Jan Draisma, Sam Payne et Elina Robeva ont pu reprouver, par les outils de la géométrie tropicale, une conjecture d'Alexander von Brill et Max Noether énoncée en 1874 et dont la première démonstration datait de 1980. Et il y a quelques mois, David Jensen, à l'université du Kentucky, et Sam Payne, à l'université Yale, ont pu démontrer pour certaines familles de courbes algébriques (celles de « genres » 22 et 23) une propriété, jusque-là inconnue, de leurs espaces de paramètres, à savoir qu'ils sont « de type général ». La conséquence la plus simple est qu'il n'est pas possible, pour ces genres-là, de décrire toutes les courbes algébriques uniquement à l'aide de fonctions rationnelles (de plusieurs variables).

DÉFORMER L'OBJET D'ÉTUDE JUSQU'À LE RENDRE DÉGÉNÉRÉ

La raison de l'efficacité de la géométrie tropicale, branche toute neuve, presque balbutiante, est encore un peu mystérieuse, mais rappelons-nous que les courbes tropicales sont, justement, des dégénérescences (lorsque la base des logarithmes tend vers l'infini) d'amibes de courbes algébriques. Ainsi, la géométrie tropicale met implicitement en œuvre un mécanisme omniprésent en géométrie moderne : déformer l'objet d'étude jusqu'à le rendre « dégénéré » et vérifier que certaines propriétés restent conservées tout au long de la déformation, y compris à son aboutissement. Mais ce faisant, elle fournit des modèles combinatoires plus simples pour la dégénérescence, et permet ainsi non seulement de revenir sur des questions classiques de géométrie algébrique, mais aussi de les dépasser.

La suite de l'histoire reste à écrire. Mais pour terminer, répondons à une question qui n'aura pas manqué d'intriguer les lectrices et lecteurs : pourquoi l'adjectif « tropical » qualifie-t-il l'algèbre et la géométrie dont on a esquissé ici quelques éléments ? En mathématiques, beaucoup de termes sont tirés du langage courant sans que leur sens technique ait un rapport évident ou pertinent avec leur sens courant. C'est le cas ici. L'algèbre formée en utilisant les opérations max et + au lieu des opérations + et × avait été nommée algèbre exotique, puis algèbre max-plus jusqu'à la fin des années 1980. Elle est devenue depuis « algèbre tropicale » sous l'impulsion de quelques chercheurs en informatique théorique de l'université Paris-VII, qui ont voulu rendre hommage à leur collègue brésilien Imre Simon, pionnier du domaine. L'exotisme a des facettes diverses ! ■

BIBLIOGRAPHIE

J. Rau, **A first expedition to tropical geometry**, 2017 (https://bit.ly/2o6Bzn2).

E. Brugallé et K. Shaw, **A bit of tropical geometry**, 2014 (https://arxiv.org/abs/1311.2360).

I. Itenberg, **Droites tropicales**, *Images des Mathématiques*, CNRS, 2011 (http://images.math.cnrs.fr/Droites-tropicales.html).

I. Itenberg, **Géométrie tropicale et dénombrement de courbes**, dans *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*, vol. 4, pp. 107-125 (éd. : F. Bayart et E. Charpentier), Cassini, 2010.

G. Cohen *et al.*, **L'algèbre des sandwichs**, *Pour la Science* n° 328, pp. 56-63, février 2005.

J. Richter-Gebert *et al.*, **First steps in tropical geometry**, 2003 (https://arxiv.org/abs/math/0306366).