École normale supérieure, année universitaire 2018-2019.
Cours *Algèbre 1*, examen terminal du 16 janvier 2019.
Durée : 3 heures. *Les documents et calculatrices sont interdits.*

**Exercice 1.** Soit $G$ un groupe fini opérant sur un ensemble fini $X$. Montrez que

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}(g)|$$

est égal au nombre d'orbites pour l'action de $G$ sur $X$.

**Exercice 2.** Soit $p$ un nombre premier et soit $G$ un groupe fini de cardinal $p^n m$ avec $n \geqslant 0$ et $m$ premier à $p$. Soit $k$ un entier compris entre 0 et $n$. Le but de ce qui suit est de prouver que le nombre de sous-groupes de $G$ de cardinal $p^k$ est égal à 1 modulo $p$ (le cas $k = n$ a été vu en cours : cela fait partie des théorèmes de Sylow). On pose $N = p^{n-k}m$. Soit $E$ l'ensemble des parties de $G$ de cardinal $p^k$ ; on considère l'action de $G$ sur $E$ induite par l'action de $G$ sur lui-même par translations à gauche.

(a) Soit $A \in E$ et soit $G_A$ son stabilisateur. En remarquant que $G_A a \subset A$ pour tout $a \in A$, montrez que $|G_A|$ divise $p^k$.

(b) On note $E'$ (resp. $E''$) le sous-ensemble de $E$ constitué des parties $A$ telles que $|G_A|$ soit de cardinal $p^k$ (resp. égal à $p^\ell$ avec $\ell < k$). Pour tout $A \in E''$, montrez que le cardinal de l'orbite de $A$ sous l'action de $G$ est multiple de $pN$. En déduire que $|E| = |E'|$ modulo $pN$.

(c) Soit $A \in E'$ et soit $a \in A$. Montrez que $A$ est égale à la classe à droite $G_A a$.

(d) Soit $H$ un sous-groupe de $G$ de cardinal $p^k$ et soit $a \in G$. Posons $A = Ha$. Montrez que $G_A = H$.

(e) Soit $\lambda$ le nombre de sous-groupes de $G$ de cardinal $p^k$. Montrez que $|E'|$ est égal à $\lambda N$, puis que $N$ divise $|E|$ et que

$$\lambda = \frac{|E|}{N} \text{ modulo } p.$$

(f) Déduire de ce qui précède que la classe de $\lambda$ modulo $p$ ne dépend que de $|G|$ et de $k$, et pas du groupe $G$ lui-même. En conclure que $\lambda$ est égal à 1 modulo $p$. *Indication : choisissez un groupe de cardinal $p^n m$ dont vous arrivez à déterminer explicitement le nombre de sous-groupes de cardinal $p^k$.*

**Exercice 3.** Soit $n$ un entier $\geqslant 2$. On considère l'opération tautologique de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1,\ldots,n\}$ ; on note $L_n = \mathbf{C}[1] \oplus \ldots \oplus \mathbf{C}[n]$ sa linéarisée sur le corps $\mathbf{C}$.

(a) On pose $X = \{1, \dots, n\}^2$ et l'on fait agir $\mathfrak{S}_n$ sur $X$ par la formule $\sigma(x, y) = (\sigma(x), \sigma(y))$. Montrez qu'il y a exactement deux orbites pour cette action, à savoir $\{(x, x)\}_{x \in \{1,\dots,n\}}$ et son complémentaire. Si l'on restreint l'action à $\mathfrak{A}_n$, montrez que cela est vrai si $n > 3$, mais faux pour $n = 2$ ou $n = 3$.

(b) Montrez que $\langle \chi_{L_n}, \chi_{L_n} \rangle = 2$. *Indication : exprimer ce produit hermitien en termes de points fixes des permutations, et se ramener à la formule de Burnside (exercice 1) pour l'action de* $\mathfrak{S}_n$ *sur* $X$.

(c) On désigne par $V_n$ la sous-représentation de $L_n$ constituée des vecteurs de la forme $\sum a_i[i]$ où $\sum a_i = 0$. Rappelez (sans démonstration) l'écriture de $L_n$ comme somme directe de $V_n$ et d'une autre sous-représentation ; en déduire à l'aide de (b) que $V_n$ est irréductible.

(d) Si $n > 3$ montrez que $V_n$ est encore irréductible lorsqu'on la voit (par restriction) comme une représentation de $\mathfrak{A}_n$.

(e) Montrez par un argument théorique rapide que lorsqu'on voit $V_3$ (par restriction) comme une représentation de $\mathfrak{A}_3$, elle n'est plus irréductible. Puis donnez une décomposition explicite de $V_3$ comme somme directe de représentations irréductibles de $\mathfrak{A}_3$.

**Exercice 4.** Soit $n \geqslant 2$ et soit $V$ une représentation complexe de dimension finie de $\mathfrak{S}_n$, que l'on suppose irréductible. On note $\chi$ le caractère de $V$, et $\Sigma$ la représentation signature de $\mathfrak{S}_n$ (sur $\mathbf{C}$).

(a) Montrez que $V \simeq_{\mathfrak{S}_n} V \otimes_{\mathbf{C}} \Sigma$ si et seulement si $\chi(\sigma) = 0$ pour toute permutation $\sigma$ impaire.

(b) On suppose que $V \simeq_{\mathfrak{S}_n} V \otimes_{\mathbf{C}} \Sigma$. Montrez à l'aide de la théorie des caractères que lorsqu'on voit $V$ comme représentation de $\mathfrak{A}_n$ (par restriction), elle est somme directe de deux sous-$\mathfrak{A}_n$-représentations irréductibles non isomorphes (en particulier, $V$ n'est pas irréductible comme représentation de $\mathfrak{A}_n$).

(c) On suppose réciproquement que $V$ n'est pas irréductible en tant que représentation de $\mathfrak{A}_n$, et on en choisit une sous-$\mathfrak{A}_n$-représentation irréductible $W$.

  (c1) Montrez que si $\sigma$ est une permutation impaire l'espace vectoriel $\sigma(W)$ est indépendant de $\sigma$ ; on le note $W'$.

  (c2) Montrez que $W'$ est une sous-$\mathfrak{A}_n$-représentation de $V$.

  (c3) En utilisant le fait que $V$ est irréductible en tant que représentation de $\mathfrak{S}_n$, mais pas en tant que représentation de $\mathfrak{A}_n$, montrez que $V$ est égal à $W \oplus W'$.

  (c4) Montrez que $\dim V$ est paire et que $\dim W = \dim V/2$, puis que $W'$ est irréductible comme représentation de $\mathfrak{A}_n$.

  (c5) Montrez en utilisant (a) que $V \simeq_{\mathfrak{S}_n} V \otimes_{\mathbf{C}} \Sigma$.

  (c6) Rappelez la description de $V \otimes_{\mathbf{C}} \Sigma$ comme représentation d'espace sous-jacent $V$. En utilisant celle-ci et à l'aide de la décomposition fournie en (c3), exhibez une bijection $\mathfrak{S}_n$-équivariante *explicite* entre $V$ et $V \otimes_{\mathbf{C}} \Sigma$.