Sorbonne Université
Année universitaire 2018-2019, master 2 de mathématiques fondamentales.
Cours *Théorie de l'intersection* ; feuille de TD numéro 2.

On désigne par k un corps commutatif.

Exercice 1. On désigne par D (resp. D') le sous-schéma fermé du plan projectif $\mathbf{P}^2_k = \mathrm{Proj}(k[T_0, T_1, T_2])$ d'équation homogène $T_0 = 0$ (resp. $T_0T_2 - T_1^2 = 0$). Vérifiez que D et D' sont des diviseurs de Cartier effectifs de $\mathbf{P}^2_k$. Calculez $D \cdot [D']$, et vérifiez qu'il coïncide avec $D' \cdot [D]$ dans $A_0(|D| \cap |D'|)$. Calculez $D \cdot [D]$ dans $A_0(D) \simeq \mathbf{Z}$.

Exercice 2. Soit X un schéma et soit Z un diviseur de Cartier effectif sur X. Soit $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ l'éclatement de X de centre Z. Montrez que π est un isomorphisme.

Exercice 3. Soit A un anneau (commutatif unitaire), et soit I un idéal de A. On pose $X = \mathrm{Spec}\, A$ et on note $\mathscr{I}$ le faisceau quasi-cohérent sur X associé à I. Soit $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ l'éclaté de X le long de $\mathscr{I}$. Montrez qu'il existe un isomorphisme $\pi^{-1}(\mathscr{I}) \simeq \mathscr{O}(1)$ qui envoie $[a]_0$ sur $[a]_1$ pour tout élément $a \in I$.

Exercice 4. Soit n un entier $\geqslant 1$ et soit $\pi\colon X \to \mathbf{A}^n_k$ l'éclatement centré à l'origine.

(a) Montrez que $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbf{P}^{n-1}_k$.

(b) On suppose que $n = 2$ et on pose $E = \pi^{-1}(0) \simeq \mathbf{P}^1_k$. Calculez l'élément $E \cdot [E] \in A_0(E) \simeq \mathbf{Z}$.

Exercice 5. Soit X un k-schéma de type fini intègre et soit $f \in R(X)^\times$. Le but de ce qui suit est d'utiliser les éclatements pour construire un morphisme propre et birationnel $X^\sharp \to X$ tel que f induise un morphisme $X^\sharp \to \mathbf{P}^1_k$ (une autre façon de procéder consiste à choisir un ouvert non vide U de X sur lequel f induit un morphisme vers $\mathbf{P}^1$, et à prendre pour $X^\sharp$ l'adhérence réduite dans $X \times_k \mathbf{P}^1_k$ du graphe de $f|_U\colon U \to \mathbf{P}^1_k$).

(a) On note $\mathscr{D}_f \subset \mathscr{O}_X$ le faisceau des dénominateurs de f et $\widetilde{X}$ l'éclaté de X le long de $\mathscr{D}_f$; on identifie $R(\widetilde{X})$ à $R(X)$ si bien qu'on s'autorise à voir f comme une fonction rationnelle sur $\widetilde{X}$. Montrez que le diviseur de Cartier $\mathrm{div}(f)$ de $\widetilde{X}$ s'écrit $D_1 - D_2$ où D_1 et D_2 sont deux diviseurs de Cartier effectifs sur $\widetilde{X}$. En déduire qu'il existe un fibré en droites $\mathscr{L}$ sur $\widetilde{X}$ et deux sections globales non identiquement nulles s_1 et s_2 de $\mathscr{L}$ telles que $f = s_1/s_2$.

(b) Expliquez pourquoi (s_1, s_2) définit un faisceau d'idéaux $\mathscr{I}$ sur $\widetilde{X}$. On note $X^\sharp$ l'éclaté de $\widetilde{X}$ le long de $\mathscr{I}$.

(c) On voit f comme une fonction rationnelle sur $X^\sharp$. Montrez qu'elle induit un morphisme de $X^\sharp$ vers $\mathbf{P}^1_k$.