Sorbonne Université
Année universitaire 2023-2024, licence 3, *Algèbre* (UE 3M270).
Examen terminal, le 8 janvier 2024.
Durée : 2h00. Les appareils électroniques et documents sont interdits.

Exercice 1. Questions de cours.

(a) Donnez la définition d'un groupe.

(b) Donnez la définition d'un p-groupe, où p est un nombre premier.

(c) Si G est un p-groupe (où p est un nombre premier) opérant sur un ensemble fini X, que peut-on dire du cardinal de l'ensemble X^G des points fixes sous G ? (On ne demande aucune démonstration.)

Exercice 2. Soit σ la permutation

$$(1\ 2\ 5\ 7)(3\ 1\ 12\ 5\ 6)(2\ 6\ 11\ 10\ 9\ 8)(11\ 12)(5\ 7\ 2\ 12\ 3)$$

de $\{1, \ldots, 12\}$.

(a) Déterminez la signature de σ, avec le minimum de calculs.

(b) Donnez l'image par σ de chacun des entiers de 1 à 12.

(c) Donnez la décomposition de σ comme produit de cycles à supports deux à deux disjoints.

(d) Donnez l'ordre de σ.

Exercice 3. Soit G un groupe et soient H et K deux sous-groupes distingués de G.

(a) Soit $h \in H$ et soit $k \in K$. Montrez que $hkh^{-1}k^{-1}$ appartient à $H \cap K$.

(b) En déduire que si H et K sont finis et si les cardinaux $|H|$ et $|K|$ sont premiers entre eux, tout élément de H commute avec tout élément de K.

Exercice 4. Classification des groupes de cardinal 1225.

(a) Soit G un groupe de cardinal $1225 = 25 \cdot 49$.

(a1) Montrez que G possède un seul 5-Sylow (que l'on notera S) et un seul 7-Sylow (que l'on notera T).

(a2) Montrez par un argument de cardinal que le sous-groupe de G engendré par S et T est G tout entier.

(a3) Montrez que $st = ts$ pour tout $s \in S$ et tout $t \in T$ (on pourra utiliser l'exercice 3).

(a4) Déduire des questions précédentes que G est abélien.

(b) En utilisant (a), classez à isomorphisme près tous les groupes de cardinal 1225.

Exercice 5. Si G et H sont deux groupes finis, on notera $m(G, H)$ le nombre de morphismes de groupes de G vers H, et $i(G, H)$ le nombre de morphismes de groupes *injectifs* de G vers H.

(a) Soient G et H deux groupes finis, et soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des sous-groupes distingués de G. Montrez que

$$m(G,H) = \sum_{K \in \mathscr{D}} i(G/K, H).$$

Indication : classer les morphismes en fonction de leur noyau.

(b) Soient H_1 et H_2 deux groupes finis ayant la propriété suivante : *pour tout groupe fini G on a $m(G,H_1) = m(G,H_2)$.*

(b1) Montrez qu'on a pour tout groupe fini G l'égalité $i(G,H_1) = i(G,H_2)$. *Indication :* utiliser la question (a) et faire une récurrence sur le cardinal de G.

(b2) Montrez qu'il existe un morphisme injectif de H_1 dans H_2 et un morphisme injectif de H_2 dans H_1.

(b3) Montrez que les groupes H_1 et H_2 sont isomorphes.

(c) Soient G, G' et G'' trois groupes.

(c1) Soit φ une application de G vers G' et soit ψ une application de G vers G''. À quelles conditions sur φ et ψ l'application $g \mapsto (\varphi(g), \psi(g))$ de G vers $G' \times G''$ est-elle un morphisme de groupes ?

(c2) Lorsque G, G' et G'' sont finis, déduire de ce qui précède une expression de $m(G, G' \times G'')$ en fonction de $m(G,G')$ et $m(G,G'')$.

(d) Soient X, Y et Z trois groupes finis tels que $X \times Y \simeq X \times Z$. Utilisez les questions précédentes pour montrer que Y est isomorphe à Z.