Sorbonne Université
Année universitaire 2023-2024, licence 3, *Algèbre* (UE 3M270), feuille de TD numéro 1.

Exercice 1. Est-ce que $(\mathbb{N}, +)$ est un groupe ? Même question avec $(\mathbb{N}, \times)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, \times)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}, \times)$, $(\mathbb{R}_+^\times, +)$, $(\mathbb{R}_+^\times, \times)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C}, \times)$, $(\mathbb{C}^\times, \times)$.

Exercice 2. Soit $*$ la loi interne sur $\mathbb{R}$ définie par la formule

$$x * y = x + y + \frac{1}{2}.$$

Montrez que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe.

Exercice 3. Donnez un exemple d'un ensemble E muni d'une loi associative avec élément neutre, d'un élément x de E qui possède un inverse à droite mais pas à gauche et d'un élément y de E qui possède un inverse à gauche mais pas à droite.

Exercice 4. Soit E un ensemble muni d'une loi de composition, associative, avec élément neutre e, et telle que tout élément de E possède un inverse à gauche. Montrer que tout élément de E possède un inverse à droite qui coïncide avec son inverse à gauche. En déduire que E est un groupe.

Exercice 5. Soit G un groupe tel que $g^2 = e$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 6. Donnez toutes les lois de groupe possibles sur un ensemble à un élément $\{a\}$, sur un ensemble à deux éléments $\{a, b\}$, et sur un ensemble à trois éléments $\{a, b, c\}$.

Exercice 7. Soit G un groupe et soit H un sous-ensemble de G.

(a) Montrez que H est un sous-groupe de G si et seulement si H est non vide et $gh^{-1} \in H$ pour tout couple (g, h) d'éléments de H.

(b) On suppose que H est fini, non vide, et stable sous la loi interne de G. Montrez que H est un sous-groupe de G.

(c) Montrez par un contre-exemple que si H est seulement supposé non vide et stable sous la loi interne de G (mais pas forcément fini) alors H n'est pas en général un sous-groupe de G.

Exercice 8. Soit X un ensemble, soit G un sous-groupe de S_X et soit Y un sous-ensemble de X.

(a) Soit H le sous-ensemble de G formé des $g \in G$ tels que $g(Y) = Y$. Montrez que H est un sous-groupe de G.

(b) Si Y est fini, montrez que H est égal à l'ensemble des $g \in G$ tels que $g(Y) \subset Y$.

Exercice 9. Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Pour tout $u \in \mathbb{U}$, on note r_u et s_u les applications de $\mathbb{C}$ dans lui-même données par les formules respectives

$$r_u(z) = uz \quad \text{et} \quad s_u(z) = u\overline{z}.$$

(a) Montrez que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^\times, \times)$.

(b) Montrez que pour tout $u \in \mathbb{U}$, les applications r_u et s_u sont des bijections, dont on déterminera la réciproque.

(c) Montrez que l'application $\mathbb{U} \to S_{\mathbb{C}}, u \mapsto r_u$ est un morphisme injectif de groupes. On note G^+ son image.

(d) Montrez que l'application $\mathbb{U} \to S_{\mathbb{C}}, u \mapsto s_u$ est injective. On note G^- son image.

(e) On pose $G = G^+ \cup G^-$. Montrez que G est un sous-groupe de $S_{\mathbb{C}}$. Est-il abélien ?

(f) Vérifiez que les éléments de G sont des bijections $\mathbb{R}$-linéaires. Que peut-on dire de leurs déterminants ? En déduire que $G^+ \cap G^- = \varnothing$.

(g) Soit $n \geqslant 3$. On note P_n l'ensemble $\{e^{2ik\pi/n}\}_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ des racines n-ièmes de l'unité. Décrire le sous-groupe H_n de G formé des éléments h de G tels que $h(P_n) \subset P_n$ (c'est bien un sous-groupe par la question (b) de l'exercice précédent).

(h) Question subsidiaire : savez-vous interpréter géométriquement les bijections r_u, s_u, l'ensemble P_n, les éléments de $H_n \ldots$?