FEUILLE N° 3

LU3MA270 – 2023/24

Exercice 1. *L'application* $\det\colon \mathrm{GL}_n(k) \to k^*$ *est un morphisme de groupes, de noyau* $\mathrm{SL}_n(k)$. *Cet ensemble forme donc une sous-groupe distingué. L'application* det *est surjective : pour* $\lambda \in k^*$, *considérer la matrice diagonale de diagonale* $(\lambda, 1, \dots, 1)$. *Par le premier théorème d'isomorphisme de Noether,* det *réalise un isomorphisme*

$$\mathrm{GL}_n(k)/\,\mathrm{SL}_n(k) \simeq k^*.$$

Exercice 2. *On considère l'application* $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ *donnée par* $z \mapsto z^2$. *C'est un morphisme de groupes surjectif, de noyau* $\{-1, 1\}$. *Par le premier théorème d'isomorphisme de Noether, il réalise un isomorphisme* $\mathbb{C}/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{C}$.

Exercice 3. *On considère l'application* $\mathbb{R} \to \mathbb{U}$ *donnée par* $t \mapsto \exp(i2\pi t)$. *C'est une application surjective, de noyau* $\mathbb{Z}$ *: en effet toute solution de l'équation* $x^2 + y^2 = 1$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *est de la forme* $(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. *Par le théorème d'isomorphisme de Noether, elle réalise un isomorphisme* $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{U}$.

Exercice 4. *Pour tout rationel* a/b, *on a :* $b \cdot a/b = ba/b = a \in \mathbb{Z}$. *La projection canonique* $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *étant un morphisme de groupes, on a :* $b \cdot [a/b] = \mathbb{Z}$. *On conclut en utilisant la surjectivité de cette application : tout élément de* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *est de torsion.*

Exercice 5. *(a) On a* $ab = ba$ *("a et b commutent") si et seulement si* $aba^{-1}b^{-1} = 1$.

(b) On a $([a, b])^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} = [b, a]$.

(c) On a $D(G) = \{1\}$ *si et seulement si* G *est un groupe commutatif.*

(d) Pour tout morphisme de groupes φ *on a*

$$\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)].$$

En particulier, le conjugué d'un commutateur est le commutateur des conjugués.

(e) L'application $p\colon G \to G/D(G)$ *est un morphisme de groupes. On a donc*

$$[p(a), p(b)] = p([a, b]) = D(G).$$

On conclut par surjectivité de p *que* $G' := G/D(G)$ *est abélien.*

(f) Soit $\varphi\colon G \to H$ *un morphisme de groupes de* G *dans un groupe abélien. On a*

$$\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)] \in D(H) = \{1\}.$$

On en déduit que $D(G) \subseteq \ker \varphi$ *puis, par la propriété universelle du quotient, qu'il existe un unique morphisme de groupes* $\bar{\varphi}\colon G' \to H$, *tel que* $\bar{\varphi} \circ p = \varphi$.

Exercice 6. *(a) Si* H *est un sous-groupe caractéristique de* G *et* $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, *on a :* $\varphi(H) \subseteq H$ *et* $\varphi^{-1}(H) \subseteq H$ *(en appliquant à* $\varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$*). En appliquant* φ *à la deuxième inclusion et en prenant en compte la surjectivité de* φ, *on a* $H = \varphi(\varphi^{-1}(H)) \subseteq \varphi(H)$. *Finalement* $H = \varphi(H)$.

(b) En appliquant la définition au morphismes intérieurs de G, *on obtient que* H *est un sous-groupe distingué de* G.

(c) Il faut trouver un sous-groupe dont la définition n'est pas préservée par les automorphismes. Elle doit donc faire intervenir une autre notion que le produit l'inverse et le neutre.

— *Pour un groupe non-trivial G, on considère le groupe G^2 et le sous-groupe $H = G \times \{1\}$. C'est le noyau de la seconde projection $G^2 \to G$, donc c'est un sous-groupe distingué. L'application $(x, y) \mapsto (y, x)$ est un automorphisme de G qui ne préserve pas H.*

— *Soit G un groupe commutatif et $g \in G$ tel qu'il existe $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ avec $\varphi(g) \notin \langle g \rangle$. Alors $\langle g \rangle$ est un sous-groupe distingué qui n'est pas caractéristique. Par exemple $G = \mathbb{R}^*$, $g \neq \pm 1$ et $\varphi(x) = x^{1/3}$.*

(d) On pose

$$G_n := \{g \in G : n \cdot g = 1\}.$$

Comme G est commutatif $g \mapsto g^n$ est un morphisme de groupes et G_n est bien un sous-groupe distingué. De plus, on a

$$\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(G), \forall g \in G_n : \varphi(g)^n = \varphi(g^n) = \varphi(1) = 1.$$

Le sous-groupe G_n est donc bien caractéristique.

(e) Le sous-groupe $\mathbb{R}_+^*$ est l'image du morphisme de groupes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donné par $x \mapsto x^2$. Or les automorphisme de R^* vérifient : $\varphi(x^2) = \varphi(x)^2$.

Exercice 7. *Les sous-groupes de Z sont les $n\mathbb{Z}$, pour $n \in \mathbb{N}$. Deux tels sous-groupes sont supplémentaires si et seulement si $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \{0\}$. Or $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathrm{pgcd}(a, b)\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mathrm{ppcm}(a, b)\mathbb{Z}$. On veut donc $\mathrm{ppcm}(a, b) = 0$ et $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$. On a $\mathrm{ppcm}(a, b) = 0 \implies a = 0$ ou $b = 0$ et $\mathrm{pgcd}(n, 0) = n$. La seule solution est donc $\{a, b\} = \{0, 1\}$. Conclusion : Un sous-groupe non-trivial de $\mathbb{Z}$ n'admet pas de supplémentaire dans $\mathbb{Z}$.*

Exercice 8. *(a) On a $1 = 1 * 1 \in HK$ et*

$$\forall h, h' \in H, \forall k, k' \in K : hkh'k' = (hh')(h'^{-1}kh'k^{-1})(kk').$$

Si le sous-groupe H est distingué, alors

$$h'^{-1}(kh'k^{-1}) \in H.$$

En particulier, on a bien $hkh'k' \in HK$. On a aussi

$$\forall h \in H, \forall k \in K : (hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} = h^{-1}(hk^{-1}h^{-1}k)k^{-1}.$$

Si le sous-groupe H est distingué, alors

$$h(k^{-1}h^{-1}k) \in H.$$

En particulier, on a bien $(hk)^{-1} \in HK$.

Une autre preuve est la suivante (pour utiliser les classes à gauche on va changer les rôles de H et K). Si K est distingué, alors $HK = \pi^{-1}(\pi(H))$, où $\pi : G \to G/K$ est la projection canonique. C'est donc un sous-groupe de G.

(b) Vue la preuve ci-dessus, on voit qu'on aurait pu montrer le même résulat en supposant K distingué. On cherche donc un exemple ou ni H ni K n'est distingué.

On peut considérer S_3. Il est de cardinal 6 donc ses sous-groupes non-distingués s'ils existent sont tous de cardinal 2. On considère $H = \{\mathrm{id}, (1, 2)\}$ et $K = \{\mathrm{id}, (1, 3)\}$. Alors l'ensemble $HK = \{\mathrm{id}, (1, 2), (1, 3), (1, 2, 3)\}$ est de cardinal 4 donc ça ne peut pas être un sous-groupe.

On va considérer un groupe vraiment pas commutatif. Le groupe libre de rang 2 est l'ensemble F des mots de longueur finie formés des lettres a, a^{-1}, b, b^{-1}, avec les règles de simplification naturelles et la loi de concaténation. On note A le sous-groupe (isomorphe à $\mathbb{Z}$) des mots formés des lettres a, a^{-1} et B le sous-groupe (isomorphe à $\mathbb{Z}$) des mots formés des lettres b, b^{-1}. L'ensemble $AB = \{a^k b^l, k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}\}$ n'est clairement pas un sous-groupe de F.

darondeau@imj-prg.fr

Exercice 9. *(a) Si G est abélien, tous ses sous-groupes sont distingués. On en déduit qu'un tel groupe est simple si et seulement si il n'admet pas de sous-groupes non-triviaux. En particulier, G est engendré par tout élément non-nul : G est donc cyclique. On considère le morphisme $\mathbb{Z} \to G$ correspondant à un générateur. Son noyau est de la forme $n\mathbb{Z}$ et par le premier théorème d'isomorphisme de Noether, on a $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Les sous-groupes de $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont en bijections avec les sous-groupes $d\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ qui contiennent $n\mathbb{Z}$, c'est-à-dire avec les diviseurs d de n. On en déduit que G est simple si et seulement si n est premier.*

(b) Si G est simple et $f\colon G \to H$ est un morphisme surjectif, il y a deux cas. Soit $\ker(f) = \{1\}$ et f est un morphisme bijectif, donc un isomorphisme ; soit $\ker(f) = G$ et f est le morphisme nul. Alors $H = f(G) = \{1\}$.

(c) Les sous-groupes de G/H sont en bijection avec les sous-groupes K de G contenant H. Si K est distingué, alors K/H est distingué, car $[g][k][g^{-1}] = [gkg^{-1}]$ et $\pi\colon g \mapsto [g]$ est surjective. Si K/H est distingué, alors

$$\forall k \in K, \forall g \in G\colon gkg^{-1} \in \pi^{-1}(K/H) = K + H = K.$$

On utilise $H \subseteq K$. Le groupe K est donc bien distingué.

En résumé, les sous-groupes distingués de G/H sont en bijection avec les sous-groupes distingués de G contenant H. Si comme dans notre hypothèse H est maximal pour l'inclusion parmi les sous-groupes propres distingués de G, on en déduit que G/H est simple : ses sous-groupes distingués sont G/H et H/H.

Exercice 10. *Soit $g \in G$ un élément tel que $G/Z(G) = \{[g]^k, k \in \mathbb{Z}\}$. Par hypothèse, pour tous $x, y \in G$, il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ et $x', y' \in Z(G)$ tels que $x = g^k x'$ et $y = g^l y'$.*

On a alors

$$xy = g^k x' g^l y' \overset{x' \in Z(G)}{=} g^k g^l y' x' = g^{k+l} y' x' = g^l g^k y' x' \overset{y' \in Z(G)}{=} g^l y' g^k x' = yx.$$

On en déduit que $Z(G) = G$.

darondeau@imj-prg.fr