Sorbonne Université
Année universitaire 2023-2024, licence 3, *Algèbre* (UE 3M270), feuille de TD numéro 3.

Exercice 1. Soit k un corps et soit n un entier supérieur ou égal à 1. On note $\mathrm{SL}_n(k)$ le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_n(k)$ formé des matrices de déterminant 1. Montrez que $\mathrm{SL}_n(k)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_n(k)$ et que le quotient $\mathrm{GL}_n(k)/\mathrm{SL}_n(k)$ est isomorphe à $k^\times$.

Exercice 2. Construire un isomorphisme entre le quotient $\mathbb{C}^\times/\{-1,1\}$ et $\mathbb{C}^\times$.

Exercice 3. Montrez que le groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 est isomorphe au groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Exercice 4. On dit qu'un élément g d'un groupe G est *de torsion* s'il existe $n > 0$ tel que $g^n = e$. Montrez que dans le groupe quotient $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tout élément est de torsion.

Exercice 5. Soit G un groupe. Si g et h sont deux éléments de G on note $[g,h]$ l'élément $ghg^{-1}h^{-1}$ de G, qu'on appelle le *commutateur* de h et g.

(a) D'où vient à votre avis le terme «commutateur» ?

(b) Montrez que l'inverse d'un commutateur est un commutateur.

(c) On note traditionnellement $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs. À quelle condition sur G a-t-on $D(G) = \{e\}$?

(d) Montrez que $D(G)$ est distingué dans G.

(e) On pose $G' = G/D(G)$. Montrez que G' est abélien.

(f) Soit $p\colon G \to G'$ le morphisme quotient. Montrez que pour tout groupe abélien H et tout morphisme φ de G vers H il existe un unique morphisme $\overline{\varphi}$ de G' vers H tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"] & H \\ G' \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

Exercice 6. On dit qu'un sous-groupe H d'un groupe G est *caractéristique* si $\Phi(H) = H$ pour tout automorphisme Φ de G.

(a) Montrez que pour que H soit un sous-groupe caractéristique de G, il suffit que $\Phi(H) \subset H$ pour tout automorphisme Φ de G.

(b) Montrez que si H est un sous-groupe caractéristique d'un groupe G, il est distingué dans G.

(c) Donnez un exemple de groupe G et de sous-groupe H de G qui est distingué mais non caractéristique.

(d) Si G est abélien et si n est un entier, montrez que le sous-groupe de G formé des éléments de n-torsion est caractéristique.

(e) Montrez que $\mathbb{R}_+^\times$ est un sous-groupe caractéristique de $\mathbb{R}^\times$.

Exercice 7. Montrez que si $n \geqslant 2$ alors $n\mathbb{Z}$ n'a pas de supplémentaire dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 8. Soit G un groupe et soient H et K deux sous-groupes de G. On note HK l'ensemble des éléments de G de la forme hk avec $h \in H$ et $k \in K$.

(a) Montrez que si H est distingué alors HK est un sous-groupe de G.

(b) Montrez par un contre-exemple que (a) est faux en général si l'on ne suppose plus H distingué.

Exercice 9. Soit G un groupe. On dit que G est *simple* si $G \neq \{e\}$ et si les seuls sous-groupes distingués de G sont $\{e\}$ et G.

(a) Montrez que si G est abélien, il est simple si et seulement si il est cyclique de cardinal premier.

(b) Soit G un groupe simple, soit H un groupe et soit f un morphisme surjectif de G vers H. Montrez que $H = \{e\}$ ou que f est un isomorphisme.

(c) Soit G un groupe fini non trivial et soit N le plus grand cardinal possible d'un sous-groupe distingué de G distinct de G. Soit H un sous-groupe distingué de G de cardinal N. Montrez que G/H est simple.

Exercice 10. Soit G un groupe tel que le groupe quotient $G/Z(G)$ soit monogène. Montrez que G est abélien (et donc que $Z(G) = G$).