Sorbonne Université
Année universitaire 2023-2024, licence 3, *Algèbre* (UE 3M270), feuille de TD numéro 4.

Exercice 1. Calculez le PGCD de 84 et 52, ainsi que celui de 48 et 35, en exhibant à chaque fois une relation de Bézout entre eux. Calculez le PPCM de 16 et 24.

Exercice 2. Démontrez à l'aide du lemme de Gauss que si a et b sont deux entiers naturels, le produit ab est égal au produit de $\mathrm{PGCD}(a, b)$ par $\mathrm{PPCM}(a, b)$.

Exercice 3. Soient a et b deux entiers strictement positifs. Exprimez le PGCD et le PPCM de a et b à partir de leurs décomposition en produit de facteurs premiers. Retrouver le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 4. Soit n un entier $\geqslant 1$, soit d un diviseur de n et soit G l'unique sous-groupe de cardinal d de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrez que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/G$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/(n/d)\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de démontrer en détail le fait suivant, qui a été brièvement mentionné en cours (pour montrer la partie «unicité» du théorème de structure des groupes abéliens finis). *Soit* $(d_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ *une famille finie d'entiers strictement supérieurs à* 1 *tels que* $d_1|d_2|\dots|d_r$ *(notons que la famille est vide si et seulement si* $r = 0$*). La famille* (d_i) *peut alors être reconstituée à partir de la fonction* λ *de* $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ *dans lui-même qui envoie* k *sur* $\prod_i \mathrm{PGCD}(d_i, k)$.

(a) À quelle condition sur la fonction λ a-t-on $r = 0$?

(b) On suppose $r > 0$. Montrez que pour tout $s \geqslant r$ et tout entier a non nul, on a $\lambda(a) \leqslant a^s$, et montrez qu'il existe $a > 0$ tel que $\lambda(a) = a^r$. En déduire que r peut se reconstituer à partir de λ.

(c) Quels sont les entiers a tels que $\lambda(a) = a^r$? En déduire que d_1 peut se reconstituer à partir de λ.

(d) On suppose que $d_1, d_2, \dots, d_i$ ont été reconstitués à partir de λ. Si a est un multiple non nul de d_i, montrez que $\lambda(a) \leqslant d_1 d_2 \dots d_i a^{r-i}$. Pour quels entiers a a-t-on égalité ? En déduire que si $i < r$ on peut reconstituer d_{i+1} à partir de λ.

Exercice 6. Soit G le groupe des bijections de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Donnez un exemple de deux éléments d'ordre 2 de G dont le produit est d'ordre infini.

Exercice 7. Soit n un entier impair $\geqslant 3$ et soit G le groupe des bijections ensemblistes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même. Donnez un exemple de deux éléments d'ordre 2 de G dont le produit est d'ordre n.

Exercice 8. Soit G le groupe des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. Donnez un exemple de deux éléments d'ordre 2 de G dont le produit est d'ordre infini, ou bien d'ordre égal à n pour un entier arbitraire $n > 0$ donné.

Exercice 9. Soit G un groupe fini. Supposons que pour tout d divisant $|G|$ il y a *au plus* un sous-groupe de cardinal d dans G. Montrez que G est cyclique.

Exercice 10. Donnez un exemple de groupe fini G qui n'est pas cyclique et tel

que pour tout d divisant $|G|$ il y ait *au moins* un sous-groupe de G de cardinal d.

Exercice 11. Donner la liste de tous les groupes abéliens de cardinal 36 à isomorphisme près.

Exercice 12. Trouver un générateur du groupe cyclique $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$.

Exercice 13. Soit n un entier strictement positif et soit m un multiple non nul de n.

(a) Montrez que le groupe abélien $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(b) Soit G un groupe abélien et soient G_1 et G_2 deux sous-groupes de G tels que $G = G_1 \oplus G_2$. Montrez que pour tout groupe abélien H on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}(G, H) \simeq \mathrm{Hom}(G_1, H) \times \mathrm{Hom}(G_2, H).$$

(c) Soit G un groupe abélien fini et soit m un multiple non nul de l'exposant de G. Montrez que $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est isomorphe à G.