Sorbonne Université
Année universitaire 2023-2024, licence 3, *Algèbre* (UE 3M270), feuille de TD numéro 5.

Exercice 1. Soit G un groupe fini de cardinal n. Montrez que G est isomorphe à un sous-groupe de S_n.

Exercice 2. Soit n un entier. Combien de points fixes sur $\{1, \ldots, n\}$ une permutation appartenant à S_n possède-t-elle en moyenne ? Le vérifier pour $n = 3$ et $n = 4$ par des calculs explicites.

Exercice 3. Soit n un entier $\geqslant 0$. Pour toute famille $(i_1, \ldots, i_r)$ d'entiers $\geqslant 0$ tels que $i_1 + \ldots + i_r = n$ on note $\mathscr{D}(n, i_1, \ldots, i_r)$ l'ensemble des familles $(I_1, \ldots, I_r)$ de sous-ensembles deux à deux disjoints de $\{1, \ldots, n\}$ tels que I_ℓ soit de cardinal i_ℓ pour tout ℓ.

(a) Pour toute famille $(i_1, \ldots, i_r)$ d'entiers $\geqslant 0$ tels que $i_1 + \ldots + i_r = n$, décrire brièvement une opération naturelle de S_n sur $\mathscr{D}(n, i_1, \ldots, i_r)$, et montrez qu'elle est transitive.

(b) Soit $(i_1, \ldots, i_r)$ comme ci-dessus et soit $d \in \mathscr{D}(n, i_1, \ldots, i_r)$. Calculez le cardinal du stabilisateur de d ; en déduire le cardinal de $\mathscr{D}(n, i_1, \ldots, i_r)$.

(c) Montrez la *formule du multinôme*

$$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \sum_{i_1 + \ldots + i_r = n} \frac{n!}{i_1! \ldots i_r!} x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r}.$$

Exercice 4. Le but de cet exercice est de démontrer que tout groupe de cardinal 6 est isomorphe ou bien à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, ou bien à S_3.

(a) Soit H un groupe tel que $x^2 = e$ pour tout $x \in H$. Rappelez pourquoi ceci entraîne que H est abélien. Montrez que si de plus H est fini, le cardinal de H est une puissance de 2. *Indication* : on pourra montrer par récurrence sur n que le résultat est vrai si H est de cardinal $\leqslant n$; le point clef consistera à considérer le quotient $H/\langle x \rangle$ si x est un élément non trivial de H.

(b) On se donne pour toute la suite de l'exercice un groupe G de cardinal 6, dont on veut prouver qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ou S_3. Quels sont les ordres possibles pour un élément de G ?

(c) Supposons qu'il existe deux éléments x et y dans G tels que x soit d'ordre 2, que y soit d'ordre 3, et que x et y commutent. Montrez que xy est d'ordre 6 et conclure.

(d) *On suppose à partir de maintenant que G n'est pas cyclique.* Montrez en utilisant la question (a) que G possède un élément d'ordre 3.

(e) Montrez que le nombre d'éléments d'ordre 3 de G est pair. *Indication* : que dire de l'inverse d'un élément d'ordre 3 ?

(f) Déduire de la question précédente que G possède un élément d'ordre 2 ; on en choisit un, noté x.

(g) On fait opérer G sur lui-même par conjugaison. Montrez que le stabilisateur de x a pour cardinal 2 ou 6, puis utiliser les questions (d) et (c) pour exclure le cas du cardinal 6. Décrire alors précisément le stabilisateur de x.

(h) Montrez que l'orbite ω de x a trois éléments.

(i) L'action induite de G sur ω fournit un morphisme de G vers S_ω. Déterminez son noyau et conclure.

Exercice 5. Soit G un groupe fini et soit p un diviseur premier de $|G|$. On se propose de montrer que G possède un élément d'ordre p (théorème de Cauchy).

(a) Soit E l'ensemble des familles $(x_1, \ldots, x_p)$ d'éléments de G tels que $x_1 x_2 \ldots x_p = e$. Montrez que la formule

$$(x_1, \ldots, x_p) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_p, x_1)$$

définit une bijection σ de E sur lui-même. Calculez σ^p.

(b) Montrez que l'action naturelle de $\langle \sigma \rangle$ sur E admet strictement plus d'un point fixe, et conclure.

Exercice 6. Soit G un groupe fini et soit p le plus petit nombre premier divisant $|G|$. Soit H un sous-groupe d'indice p de G. On se propose de montrer que H est distingué dans G. On note $f\colon G \to S_{G/H}$ le morphisme induit par l'action de G par translations.

(a) Montrez que $f(G)$ est non trivial.

(b) Quel est le cardinal de $S_{G/H}$?

(c) Montrez que $|f(G)| = p$ ou bien qu'il existe un diviseur premier de $|f(G)|$ strictement inférieur à p, puis expliquez pour quoi cette dernière situation est en fait exclue.

(d) Montrez que $H = \ker(f)$ et conclure.

Exercice 7. Soit p un nombre premier et soit n un entier $\geqslant 1$. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

(a) Supposons qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ telle que pour tout $M \in G$ la matrice $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Montrez que G est un p-groupe.

(b) Réciproquement, supposons que G est un p-groupe. Montrez qu'il existe un vecteur non nul de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ qui est fixe par tous les éléments de G. En déduire par récurrence sur n l'existence de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ telle que pour tout $M \in G$ la matrice $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.