
LES SQUELETTES ACCESSIBLES D'UN ESPACE DE BERKOVICH

par

Antoine Ducros & Amaury Thuillier

Résumé. — Nous définissons une classe de squelettes sur les espaces de Berkovich, dits *accessibles*, qui contient le squelette standard de $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$ pour tout n et est préservée par G-recollement, par image réciproque sous un morphisme de dimension relative nulle, et par image directe sous un morphisme topologiquement propre en restriction au squelette concerné.

Abstract. — We define a class of skeletons on Berkovich analytic spaces, which we call *accessible*, which contains the standard skeleton of $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$ for all n and is preserved by G-glueing, by taking the inverse image along a morphism of relative dimension zero, and by taking the direct image along a morphism whose restriction to the involved skeleton is topologically proper.

Table des matières

0. Introduction.....	1
1. Valuations colorées.....	6
2. Algèbre graduée et corps résiduels.....	9
3. Espaces domaniaux et géométrie linéaire par morceaux.....	14
4. Géométrie analytique : généralités.....	25
5. Exemples de squelettes.....	30
6. L'espace friable associé à un espace domanial.....	37
7. Espaces friables en géométrie analytique.....	43
8. Espaces friables en géométrie linéaire par morceaux.....	48
9. Squelettes élémentaires et accessibles.....	56
Références.....	66

0. Introduction

Parmi les différentes approches aujourd'hui disponibles en géométrie non archimédienne (points de vue de Tate, Raynaud, Berkovich, Huber...), celle de Berkovich est

la plus adaptée à l'étude des liens profonds entre les mondes ultramétrique et linéaire par morceaux. (Précisons que nous adoptons ici le point de vue *multiplicatif* : un polytope est une partie de $\mathbf{R}_{>0}^n$ qui s'identifie *via* le logarithme à une union finie d'intersections finies de demi-espaces définis au moyen de formes affines à parties linéaires rationnelles, et ces polytopes sont les briques de base permettant de définir un espace linéaire par morceaux abstrait par un procédé de recollement un peu délicat – voir 3.2 pour les détails).

En effet, un espace de Berkovich X contient pléthore de sous-ensembles sur lesquels la structure analytique de X induit une structure linéaire par morceaux naturelle, que l'on appelle les *squelettes* de X (définition 4.3.2). Le prototype d'un tel squelette est le sous-ensemble S_n de $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$ constitué des normes de Gauß $\sum a_I T^I \mapsto \max |a_I| r^I$ pour $r \in \mathbf{R}_{>0}^n$: sa structure linéaire par morceaux se déduit de celle de $\mathbf{R}_{>0}^n$ *via* l'homéomorphisme $|T| : S_n \simeq \mathbf{R}_{>0}^n$. Précisons que si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme d'espaces analytiques et si Σ et T sont deux squelettes de X et Y respectivement tels que $f(T) \subset \Sigma$ alors $f|_T : T \rightarrow \Sigma$ est *automatiquement* linéaire par morceaux.

Les squelettes sont apparus dès les travaux fondateurs de Berkovich, pour décrire le type d'homotopie de certains espaces analytiques. Plus précisément il a démontré dans [Ber99] puis [Ber04] que si X est un espace k -analytique compact et quasi-lisse possédant un modèle formel polystable $\mathfrak{X}$ (par exemple, si X est une courbe projective lisse sur un corps algébriquement clos) alors X se rétracte par déformation sur l'un de ses squelettes, qui est naturellement homéomorphe au complexe simplicial dual de la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$. Plus récemment Hrushovski et Loeser ont prouvé dans [HL16] que si X est une variété algébrique quasi-projective et lisse sur un corps ultramétrique complet k alors X^{an} se rétracte par déformation sur l'un de ses squelettes compacts. Précisons que leurs méthodes n'ont rien à voir avec celles de Berkovich : ils utilisent de la théorie des modèles au sens de la logique sans faire intervenir le moindre modèle entier au sens de la géométrie arithmétique. Mentionnons également que leurs techniques s'appliquent tout aussi bien si X n'est pas supposé lisse, mais que la rétraction se fait alors sur un squelette *généralisé*, qui est modélisé localement sur des adhérences dans $\mathbf{R}_{\geq 0}^n$ de polytopes de $\mathbf{R}_{>0}^n$.

Les squelettes ont par ailleurs été étudiés d'un autre point de vue par le premier auteur de ce texte dans les articles [Duc03] et [Duc12]. Il a démontré que si X est un espace analytique de dimension $\leq n$ et si f est un morphisme de X vers $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$, alors $f^{-1}(S_n)$ est un squelette de X (vide dès que $\dim X < n$) ; et que de plus une union finie de tels squelettes de X est encore un squelette. En utilisant cette dernière propriété, on prouve (proposition 9.1.5) que si Σ est une partie de X possédant une famille (Σ_i) de sous-ensembles telle que :

- ◊ chaque Σ_i est une partie linéaire par morceaux d'un squelette $f_i^{-1}(S_{d_i})$ où f_i est un morphisme de Y_i vers $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^{d_i}$ pour un certain sous-espace analytique fermé Y_i purement de dimension d_i d'un domaine analytique de X ;
- ◊ les Σ_i G -recouvrent Σ , ce qui veut dire que tout point x de Σ a un voisinage dans Σ qui est réunion d'un nombre fini de Σ_i contenant x ,

alors Σ est un squelette. Nous qualifierons de *G-localement élémentaire* un tel squelette. En pratique, tous les squelettes rencontrés jusqu'alors (les buts des rétractions

par déformation, ceux qui sont utilisés pour intégrer les formes différentielles dans le travail en cours [CLD12], ceux intervenant dans l'étude du treillis des fonctions tropicales menée à bien dans [DHLY24]...) étaient G-localement élémentaires.

Il résulte essentiellement des définitions et constructions si X est un espace analytique et si Σ est une partie de X , les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (a) si Z est un sous-espace analytique fermé d'un domaine analytique de X , une partie de Z est un squelette G-localement élémentaire de Z si et seulement si c'est un squelette G-localement élémentaire de X ;
- (b) si Σ est un squelette G-localement élémentaire de X , les squelettes G-localement élémentaires de X contenus dans Σ sont exactement les parties linéaires par morceaux de Σ ;
- (c) si Σ possède un G-recouvrement par des squelettes G-localement élémentaires de X , c'est un squelette G-localement élémentaire de X ;
- (d) l'intersection de deux squelettes G-localement élémentaires est un squelette G-localement élémentaire ;
- (e) si Σ est un squelette G-localement élémentaire de X et si $f: Y \rightarrow X$ est un morphisme de dimension relative nulle en tout point de $f^{-1}(\Sigma)$ alors $f^{-1}(\Sigma)$ est un squelette G-localement élémentaire de Y .

(Remarquons que concernant la propriété (e) on ne peut pas espérer supprimer l'hypothèse de dimension relative nulle : si f possédait des fibres de dimension > 0 au-dessus de Σ , celles-ci n'auraient aucun espoir, pour de simples raisons topologiques, de pouvoir être munies d'une structure linéaire par morceaux).

L'objectif de ce travail était d'étudier la question suivante : *la classe des squelettes G-localement élémentaires possède-t-elle également de bonnes propriétés de stabilité par images directes ?* Précisons tout de suite qu'espérer une telle stabilité sans hypothèse de compacité semble illusoire : considérer par exemple l'image du squelette $\coprod_{r \in 2^{\mathbf{Q}}} \{\eta_r\}$ de $\coprod_{r \in 2^{\mathbf{Q}}} \mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}}$ sous la flèche canonique $\coprod_{r \in 2^{\mathbf{Q}}} \mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}} \rightarrow \mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}}$.

Nous n'obtenons pas de réponse précise à la question posée (nous penchons pour la négative, mais expliciter un contre-exemple semble délicat), mais parvenons néanmoins à exhiber (9.1.11, théorème 9.1.12) une classe de squelettes que nous qualifions d'*accessibles*, qui satisfait les propriétés (a) à (e) ci-dessus ainsi que la propriété (f) suivante : *si $f: Y \rightarrow X$ est un morphisme et si T est un squelette accessible de Y tel que $f|_T$ soit topologiquement propre alors $f(T)$ est un squelette accessible de X* . De plus, tout squelette G-localement élémentaire est accessible, et la classe des squelettes accessibles est la plus petite classe de squelettes contenant les S_d et satisfaisant les propriétés (a) à (f).

Il en résulte notamment que si $f: Y \rightarrow X$ est un morphisme entre espaces k -analytiques compacts et si T est un squelette G-localement élémentaire fermé de Y , l'image $f(T)$ est un squelette de X (mais il n'y a pas de raison qu'il soit G-localement élémentaire). Et nous ramenons en fait notre théorème principal à cet énoncé, qui est essentiellement l'objet de la proposition 9.1.8 (et un squelette accessible est précisément une partie G-recouverte par des $f(T)$ avec f et T comme ici) ; nous allons maintenant dire quelques mots de sa preuve. En raisonnant G-localement on voit

tout d'abord qu'on peut supposer que X et Y sont affinoïdes, que Y est purement de dimension n pour un certain n , et que T est égal à $g^{-1}(S_n)$ pour un certain $g: Y \rightarrow (\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$. Le théorème 4.3 de [Duc23], qui repose lui-même sur la déclinaison non archimédienne [Duc21b] des techniques d'aplatissement de Raynaud et Gruson, permet de se ramener au cas où f est composé d'un morphisme plat et équidimensionnel, d'une immersion fermée et d'un morphisme quasi-étale, et il n'y a finalement plus que les deux cas particuliers suivants à traiter.

Premier cas. — C'est celui où X est purement de dimension m pour un certain m , et où f est plat, ses fibres étant donc purement de dimension $n - m$. On montre alors que $f(T)$ est un squelette G -localement élémentaire de X .

Pour ce faire, considérons un point t de T ; posons $s = f(t)$. Puisque T est égal à $g^{-1}(S_n)$, le corps résiduel complété $\mathcal{H}(t)$ de t est une extension d'Abhyankar de rang n de k , et par un simple argument de dimension on en déduit que $\mathcal{H}(s)$ est d'Abhyankar de rang m sur k , et que $\mathcal{H}(t)$ est d'Abhyankar de rang $n - m$ sur $\mathcal{H}(s)$. Il existe alors un voisinage affinoïde V de s dans X et un voisinage affinoïde W de t dans $f^{-1}(V)$, ainsi que m fonctions inversibles $h_1, \dots, h_m$ sur V et $n - m$ fonctions inversibles $h_{m+1}, \dots, h_n$ sur W telles que les $h_i(t)$ forment une base d'Abhyankar de t sur k . Autrement dit, si $h: W \rightarrow (\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$ désigne le morphisme induit par les h_i le point t appartient à $h^{-1}(S_n)$. L'intersection $T \cap h^{-1}(S_n)$ est un squelette G -localement élémentaire de W qui contient t et dont l'image par f est contenue dans le squelette G -localement élémentaire $(h_1, \dots, h_m)^{-1}(S_m)$ de X . Ainsi nous avons exhibé pour tout point $t \in T$ une partie linéaire par morceaux compacte Υ_t de T et un squelette compact G -localement élémentaire Σ_t de X tel que $f(\Upsilon_t) \subset \Sigma_t$. L'idée est alors la suivante : on souhaiterait recouvrir T par une famille *finie* $(\Upsilon_t)_{t \in E}$; cela garantirait que $f(T)$ est contenue dans le squelette G -localement élémentaire $\Sigma := \bigcup_{t \in E} \Sigma_t$ de X ; l'application $f|_T: T \rightarrow \Sigma$ serait alors linéaire par morceaux, et $f(T)$ serait ainsi une partie linéaire par morceaux de Σ , et partant un squelette G -localement élémentaire de X . Mais comme Υ_t n'est pas *a priori* un voisinage de t dans T (il pourrait même très bien être réduit à $\{t\}$), cette approche semble vouée à l'échec. Elle fonctionne cependant, à condition de faire varier t non pas simplement sur T mais sur le sous-ensemble correspondant $T^{\mathbf{R}\text{-ad}}$ de l'espace de Huber-Kedlaya $X^{\mathbf{R}\text{-ad}}$ associé à X , le point crucial étant que $T^{\mathbf{R}\text{-ad}}$ est compact et que les $\Upsilon_t^{\mathbf{R}\text{-ad}}$ sont des ouverts compacts de $T^{\mathbf{R}\text{-ad}}$ (pour la topologie constructible, qui suffit ici), ce qui entraîne la finitude attendue. Cette étape demande évidemment une étude préalable de l'avatar des squelettes dans le contexte réel-adique, qui fait l'objet des sections 6, 7 et 8; indiquons que récemment, ces «squelettes adiques» ont été considérés, totalement indépendamment, par Hübner et Temkin dans [HT24].

Second cas. — C'est celui où f est composée d'une immersion fermée $Y \hookrightarrow Z$ et d'un morphisme quasi-étale $Z \rightarrow X$ (où Z est compact). Un raisonnement G -local permet de se ramener au cas où Z est un domaine analytique compact d'un revêtement fini galoisien X' de X , dont on note G le groupe. Quitte à remplacer T par $\bigcup_{g \in G} g(T)$ (ce qui ne modifie pas son image) on peut le supposer G -invariant. Son image s'identifie alors topologiquement au quotient T/G , lequel hérite d'une structure linéaire par

morceaux naturelle qui en fait le quotient de T par G dans la catégorie linéaire par morceaux (théorème 3.3.3). En utilisant le fait que T est un squelette et que $T \rightarrow T/G$ est une immersion par morceaux, il n'est alors pas difficile de voir que T/G est un squelette – mais rien n'indique par contre qu'il soit G -localement élémentaire.

Nous allons terminer cette introduction par quelques remarques.

- ◇ Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces compacts et soit T un squelette fermé de Y . Comme expliqué ci-dessus, nous montrons que sous certaines hypothèses (si T est G -localement élémentaire, ou plus généralement accessible) l'image $f(T)$ est un squelette, ce qui entraîne automatiquement que $f|_T: T \rightarrow f(T)$ est linéaire par morceaux, et en particulier que la relation d'équivalence sur T induite par f est linéaire par morceaux. Or ce fait n'est pas du tout évident *a priori*, et pourrait tomber en défaut pour des squelettes généraux. En effet, supposons pour simplifier que Y et X sont affinoïdes et irréductibles, que f est dominant et que T est constitué de points Zariski-dense. Deux points t et t' de T ont alors même image sur X si et seulement si pour toute fonction analytique non nulle g sur X on a $|g(t)| = |g(t')|$; or pour une telle g fixée, la condition $|g(t)| = |g(t')|$ définit une relation d'équivalence linéaire par morceaux sur T , si bien que la relation d'équivalence induite par f sur T est une intersection *a priori* infinie de relations linéaires par morceaux. Notre résultat peut donc être vu comme un théorème de finitude pour une classe raisonnable de squelettes.
- ◇ Pour simplifier l'exposition dans cette introduction, nous n'avons pas évoqué la question des *paramètres de définition* des espaces linéaires par morceaux et des espaces analytiques en jeu, mais nous y prêtons attention dans le texte, ce qui alourdit un peu la terminologie. En géométrie linéaire par morceaux générale nous fixons ainsi un couple $c = (K, \Delta)$ où K est un sous-corps de $\mathbf{R}$ et Δ un sous- K -espace vectoriel (pour l'exponentiation) de $\mathbf{R}_{>0}$, et nous travaillons avec des espaces c -linéaires par morceaux, c'est-à-dire modélés sur des parties de $\mathbf{R}_{>0}^n$ définies par des inégalités larges entre monômes dont les exposants appartiennent à K et les termes constants à Δ . En géométrie analytique, nous fixons un corps ultramétrique complet k et un sous-groupe Γ de $\mathbf{R}_{>0}$ qui est non trivial si $|k^\times| = \{1\}$, et nous travaillons uniquement avec des espaces k -analytiques Γ -stricts, c'est-à-dire qui peuvent être définis au moyen de paramètres réels appartenant à Γ (ainsi tout espace k -analytique est $\mathbf{R}_{>0}$ -strict, et si $|k^\times| \neq \{1\}$, un espace k -analytique est $\{1\}$ -strict si et seulement s'il est strict); et nous utilisons également des Γ -variantes des espaces de Huber-Kedlaya et des réductions de germes à la Temkin. Enfin, dans le contexte des espaces k -analytiques Γ -stricts nous posons $c = (\mathbf{Q}, (|k^\times| \cdot \Gamma)^{\mathbf{Q}})$ et nous nous intéressons aux c -squelettes, qui ont une structure c -linéaire par morceaux naturelle.
- ◇ Nous avons mentionné plus haut, à propos des rétractions par déformations qu'ont construites Hrushovski et Loeser, les *squelettes généralisés*, modélés non pas sur des polytopes de $\mathbf{R}_{>0}^n$, mais sur les adhérences de tels polytopes dans $\mathbf{R}_{\geq 0}^n$. Nous travaillons actuellement sur une extension du présent travail au cas de ces

squelettes généralisés, qui est techniquement beaucoup plus délicat ; disposer d'une classe de squelettes généralisés se comportant bien par G-recollement, images réciproques et images directes devrait être très utile à terme pour l'étude du type d'homotopie des espaces de Berkovich généraux ; cet article constitue un premier pas dans cette direction.

Ce travail a été amorcé lors de discussions entre les deux auteurs, et le second est très reconnaissant au premier de l'avoir mené à son terme.

1. Valuations colorées

1.1. Conventions générales relatives aux valuations. — Soit A un anneau (commutatif unitaire).

1.1.1. — On appelle valuation sur A une application $\varphi : A \rightarrow G \cup \{0\}$ où G est un groupe abélien ordonné noté multiplicativement et où 0 est un plus petit élément absorbant qu'on adjoint à G , qui possède les propriétés suivantes :

- ◊ $\varphi(1) = 1$;
- ◊ $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ et $\varphi(a + b) \leq \max(\varphi(a), \varphi(b))$ pour tout $(a, b) \in A^2$.

On dit que deux valuations $\varphi_1 : A \rightarrow G_1 \cup \{0\}$ et $\varphi_2 : A \rightarrow G_2 \cup \{0\}$ sont équivalentes s'il existe une valuation $\varphi : A \rightarrow G \cup \{0\}$ et deux morphismes injectifs croissants $u_1 : G \hookrightarrow G_1$ et $u_2 : G \hookrightarrow G_2$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & & G_1 \cup \{0\} \\
 & \nearrow \varphi_1 & \\
 A & \xrightarrow{\varphi} & G \cup \{0\} \\
 & \searrow \varphi_2 & \\
 & & G_2 \cup \{0\}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & & \\
 & \nearrow u_1 & \\
 & & \\
 & \searrow u_2 & \\
 & &
 \end{array}$$

commute.

1.1.2. — Soit $\varphi : A \rightarrow G \cup \{0\}$ une valuation. Son noyau est un idéal premier de A appelé le *support* de φ . Si ξ est un point de $\text{Spec } A$, se donner une valuation sur A de support ξ revient à se donner une valuation sur le corps résiduel $\kappa(\xi)$ (dans un sens, considérer la valuation induite sur $\kappa(\xi)$ par passage au quotient ; dans l'autre, composer la valuation donnée sur $\kappa(\xi)$ avec l'évaluation en ξ). Deux valuations sur A sont équivalentes si et seulement si elles ont même support et si les valuations induites sur le corps résiduel correspondant sont équivalentes.

1.1.3. Notations. — Pour une valuation sur un corps nous utiliserons le plus souvent le symbole $|\cdot|$. Sur un anneau quelconque nous préférons en général une notation plus géométrique, pour penser aux valuations comme à des points. Ainsi nous pourrions typiquement désigner par x une valuation sur A ; et nous noterons alors $\kappa(x)$ le corps résiduel du support de x muni de la valuation induite par x , valuation que nous noterons $|\cdot|$. Le morphisme d'évaluation de A vers son corps résiduel $\kappa(x)$ sera noté $a \mapsto a(x)$; avec ces conventions, on a $x(a) = |a(x)|$ pour tout $a \in A$, et nous opterons évidemment pour la seconde écriture sauf exception. Remarquons que le groupe ordonné $|\kappa(x)^\times|$ et la flèche $A \rightarrow |\kappa(x)|, a \mapsto |a(x)|$ sont déterminés canoniquement (à unique isomorphisme près) par la classe d'équivalence de x .

1.1.4. Fonctorialité. — Soit $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux et soit y une valuation sur B . La flèche $A \mapsto |\kappa(y)|, a \mapsto |\varphi(a)(y)|$ définit une valuation sur A , dont la classe d'équivalence ne dépend que de celle de y .

1.1.5. Reconstitution d'une valuation. — Une valuation $|\cdot|$ sur un corps K se reconstitue à équivalence près à partir de son anneau $\{z \in K, |z| \leq 1\}$. Il s'ensuit qu'une valuation x sur A se reconstitue à équivalence près à partir de $E := \{(f, g) \in A^2, |f(x)| \leq |g(x)|\}$. En effet, l'ensemble E permet tout d'abord de retrouver le support $\{f, f(x) = 0\}$ de x , qui se réécrit $\{f \in A, (f, 0) \in E\}$. La valuation résiduelle sur le corps $\kappa(x)$ a alors pour anneau $\{f(x)/g(x)\}_{(f,g) \in E, g(x) \neq 0}$.

1.2. Valuations colorées. — Soit Δ un groupe abélien ordonné, soit k un corps muni d'une Δ -valuation, c'est-à-dire d'une valuation $|\cdot|: k \rightarrow \Delta \cup \{0\}$, et soit A une k -algèbre.

1.2.1. Groupes colorés. — Un groupe abélien ordonné Δ -coloré est un groupe abélien ordonné G muni d'un morphisme injectif croissant $\Delta \hookrightarrow G$. Un groupe abélien ordonné Δ -coloré G est dit *bridé* si l'enveloppe convexe de l'image de $\Delta \hookrightarrow G$ est égale à G tout entier.

Un morphisme $G \rightarrow G'$ de groupes abéliens ordonnés Δ -colorés est un morphisme de groupes croissant tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad} & G' \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \Delta & \end{array}$$

commute.

1.2.2. Valuations colorées. — Une k -valuation Δ -colorée sur A est la donnée d'un groupe abélien ordonné Δ -coloré G et d'une valuation $A \rightarrow G \cup \{0\}$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & G \cup \{0\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ k & \xrightarrow{|\cdot|} & \Delta \cup \{0\} \end{array}$$

commute.

On dit que deux k -valuations Δ -colorées $\varphi_1 : A \rightarrow G_1 \cup \{0\}$ et $\varphi_2 : A \rightarrow G_2 \cup \{0\}$ sont équivalentes s'il existe une k -valuation Δ -colorée $\varphi : A \rightarrow G \cup \{0\}$ et deux morphismes $u_1 : G \hookrightarrow G_1$ et $u_2 : G \hookrightarrow G_2$ de groupes abéliens ordonnés Δ -colorés tels que $u_1 \circ \varphi = \varphi_1$ et $u_2 \circ \varphi = \varphi_2$. Si ξ est un point de $\text{Spec } A$, se donner une k -valuation Δ -colorée sur A de support ξ revient à se donner une k -valuation Δ -colorée sur le corps résiduel $\kappa(\xi)$, et deux k -valuations Δ -colorées sur A sont équivalentes si et seulement si elles ont même support et si les k -valuations Δ -colorées sur le corps résiduel correspondant sont équivalentes.

1.2.3. — Soit x une k -valuation Δ -colorée sur A , à valeurs dans $G \cup \{0\}$ pour un certain groupe abélien ordonné Δ -coloré G . Le morphisme structural $\Delta \hookrightarrow G$ permet de voir Δ comme un sous-groupe de G . Le groupe abélien ordonné Δ -coloré $|\kappa(x)|^\times \cdot \Delta \subset G$ et la flèche $A \rightarrow |\kappa(x)| \cdot \Delta, a \mapsto a(x)$ sont alors déterminés à unique isomorphisme près par la classe de x . Dans ce contexte, la notation $|\lambda|$ pour $\lambda \in k^\times$ pourrait apparaître ambiguë, puisque pouvant désigner aussi bien désigner l'image de λ dans $|\kappa(x)^\times|$ sous la valuation structurale de $\kappa(x)$ (le corps k étant identifié naturellement à un sous-corps de $\kappa(x)$) que son image dans Δ par la valuation structurale de k . Mais il n'en est rien : la définition même d'une k -valuation Δ -colorée assure que ces deux images sont égales lorsqu'on les voit comme appartenant à $|\kappa(x)|^\times \cdot \Delta$. Si Γ est un sous-groupe de Δ l'engendrant modulo $|k^\times|$ on a $|\kappa(x)^\times| \cdot \Gamma = |\kappa(x)|^\times \cdot \Delta$. Nous dirons qu'une k -valuation Δ -colorée x sur A est bridée si le groupe abélien ordonné Δ -coloré $|\kappa(x)^\times| \cdot \Delta$ est bridé.

1.2.4. — Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme de k -algèbres et soit y une k -valuation Δ -colorée sur B . La flèche $A \mapsto |\kappa(y)| \cdot \Delta, a \mapsto |\varphi(a)(y)|$ définit une k -valuation Δ -colorée sur A , dont la classe d'équivalence ne dépend que de celle de y ; si y est bridée, x l'est aussi.

1.2.5. *Reconstitution d'une valuation colorée.* — Soit K une extension de k , et soit Γ un sous-groupe de Δ l'engendrant modulo $|k^\times|$. Soit K une extension de k . Une k -valuation Δ -colorée sur K se reconstitue à partir des ensembles $\{z \in E, |z| \leq \gamma\}$ pour γ parcourant Γ . Par conséquent, une valuation Δ -colorée x sur un anneau A se reconstitue à équivalence près à partir de

$$\{(f, g, \gamma) \in A^2 \times \Gamma, |f(x)| \leq \gamma |g(x)|\},$$

par un raisonnement analogue à celui tenu au 1.1.5.

1.3. Raffinements des valuations. — Soit K un corps.

1.3.1. — Soient $|\cdot|$ et $|\cdot|'$ deux valuations sur K . On dit que $|\cdot|'$ raffine $|\cdot|$ si l'anneau de $|\cdot|'$ est contenu dans celui de $|\cdot|$. Il revient au même de demander qu'il existe un morphisme croissant (nécessairement unique) $\pi : |F^\times|' \rightarrow |F^\times|$ tel que $|\cdot| = \pi \circ |\cdot|'$.

1.3.2. — Décrivons maintenant la variante colorée de cette notion. Soit Δ un groupe abélien ordonné, et soit k un sous-corps de K muni d'une Δ -valuation. Soient $|\cdot|$ et $|\cdot|'$ deux k -valuations Δ -colorées sur K . On dit que $|\cdot|'$ raffine $|\cdot|$ si pour tout $\delta \in \Delta$, l'ensemble $\{z \in K, |z|' \leq \delta\}$ est contenu dans $\{z \in K, |z| \leq \delta\}$; cette dernière condition

revient à demander qu'il existe un morphisme $\pi: |F^\times|' \cdot \Delta \rightarrow |F^\times| \cdot \Delta$ de groupes abéliens ordonnés Δ -colorés (nécessairement unique) tel que $|\cdot| = \pi \circ |\cdot|'$.

2. Algèbre graduée et corpoïdes résiduels

2.1. — Nous utiliserons dans la suite le formalisme de l'algèbre graduée introduite par Temkin dans [Tem04], et plus précisément sa variante présentée à la section 1 de [Duc21b]. La différence entre notre point de vue et celui de Temkin est que pour éviter de devoir systématiquement préciser que les éléments manipulés sont homogènes nous choisissons d'emblée de ne considérer *que* des éléments homogènes. Pour ce faire, au lieu de travailler avec les anneaux gradués classiques, nous utiliserons ce que nous appelons les *annéloïdes*.

2.1.1. — Si D est un groupe abélien un *annéloïde D -gradué* est un ensemble A muni d'une décomposition comme *union disjointe* $A = \coprod_{d \in D} A^d$, d'une loi de groupe abélien sur chacun des A^d notée additivement et d'élément neutre 0^d , et d'une loi de composition interne $A \times A \rightarrow A$ associative, commutative et possédant un élément neutre $1 \in A^1$, qui induit pour tout couple (d, d') d'éléments de D une application bi-additive de $A^d \times A^{d'}$ vers $A^{dd'}$. Le degré d'un élément a de A est l'unique élément de D tel que $a \in A^d$; il arrivera qu'on écrive 0 au lieu de 0^d si le degré en jeu est clair. Un morphisme d'annéloïdes D -gradués $f: A \rightarrow B$ est une application f préservant les degrés, commutant aux deux lois et envoyant 1 un sur 1 .

2.1.2. — Un annéloïde (tout court) est un couple constitué d'un groupe abélien D et d'un annéloïde D -gradué A . Pour faire des annéloïdes une catégorie suffisamment souple, nous allons procéder en deux temps. Définissons tout d'abord un morphisme *stricto sensu* entre deux annéloïdes (D, A) et (E, B) comme la donnée d'un morphisme injectif de groupes $i: D \rightarrow E$ et d'une application f de A dans B envoyant A^d sur $B^{i(d)}$ pour tout d , commutant aux deux lois en envoyant 1 sur 1 . La notion de morphisme *stricto sensu* fait des annéloïdes une catégorie $\mathbf{C}$, mais ce que nous appellerons la catégorie des annéloïdes sera la localisée de $\mathbf{C}$ par rapport à la classes des flèches $(i: D \hookrightarrow E, f: A \rightarrow B)$ possédant la propriété suivante : f est injective d'image $\coprod_{d \in D} B^{i(d)}$ et $B^e = \{0^e\}$ pour tout $e \in E \setminus i(D)$.

Ainsi, si E est un groupe abélien et D un sous-groupe de E , un annéloïde E -gradué B tel que $B^e = \{0^e\}$ pour tout $e \in E \setminus D$ est isomorphe en tant qu'annéloïde à l'annéloïde D -gradué $\coprod_{d \in D} B^d$, et un annéloïde D -gradué A est isomorphe en tant qu'annéloïde à l'annéloïde E -gradué $\coprod_{e \in E} A^e$ où l'on a posé $A^e = \{0^e\}$ si $e \notin D$. Dans le premier cas nous dirons simplement que nous voyons B comme un annéloïde D -gradué, et dans le second cas que nous voyons A comme un annéloïde E -gradué.

Tout morphisme d'annéloïdes $(A, D) \rightarrow (B, E)$ le long d'un morphisme injectif $i: D \hookrightarrow E$ peut par ce biais être vu comme un morphisme d'annéloïdes E -gradués : on utilise la réciproque de l'isomorphisme $i: D \rightarrow i(D)$ pour voir A comme un annéloïde $i(D)$ -gradué, puis on le voit comme un annéloïde E -gradué en le prolongeant par 0 comme décrit ci-dessus.

2.1.3. — Nombre de notions et résultats de l'algèbre commutative admettent des avatars gradués naturels ; nous renvoyons à la section 1 de [Duc21b] pour davantage de détails. Nous allons simplement évoquer ici quelques uns de ces avatars qui nous seront particulièrement utiles. Remarquons par ailleurs qu'un annéloïde $\{1\}$ -gradué est simplement un anneau : l'algèbre commutative graduée contient donc l'algèbre commutative standard.

Un *corpoïde* est un annéloïde dans lequel $1 \neq 0$ et dont tout élément non nul est inversible. I

2.1.4. — Il y a une notion d'algèbre de polynômes dans le contexte des annéloïdes, décalquée de la notion classique mais avec une petite complication (pour l'essentiel indolore) : on doit prescrire les degrés des indéterminées. Si $(r_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments d'un groupe abélien D et si A est un annéloïde D -gradué, on dispose ainsi d'un annéloïde D -gradué $A[r_i \setminus T_i]$ qui au sein des A -algèbres D -graduées, représente le foncteur covariant qui envoie B sur l'ensemble des familles (b_i) d'éléments de B , chaque b_i devant être de degré r_i .

2.1.5. — Une fois ces annéloïdes de polynômes à notre disposition, on peut développer une théorie de l'indépendance algébrique et du degré de transcendance dans le cadre des extensions de corpoïdes D -gradués

Plus précisément soit D un groupe abélien et soit $K \hookrightarrow L$ une extension de corpoïdes D -gradués. Soit E un sous-groupe de D . Soit (t_i) une base de transcendance de L^E sur K^E et soit (λ_j) une famille d'éléments de $L^\times$ telle que les $\deg(\lambda_i)$ constituent une base de

$$\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} (\deg(L^\times) / ((E \cap \deg(L^\times)) \cdot \deg(K^\times))).$$

Un calcul immédiat montre que (t_i) est encore une base de transcendance de $K \cdot L^E$ sur K , et que (λ_j) est une base de transcendance de L sur $K \cdot L^E$. Par conséquent, la concaténation de (t_i) et (λ_j) est une base de transcendance de L sur K . En appliquant ce qui précède avec $E = \{1\}$, on voit que le degré de transcendance de L sur K est égal à la somme du degré de transcendance classique de L^1 sur K^1 et du rang rationnel de $\deg(L^\times) / \deg(K^\times)$.

2.2. Valuations et corpoïdes résiduels. — Il y a une notion de valuation sur un corpoïde (et même sur un annéloïde, mais nous n'en aurons pas besoin ici), définie comme dans le cas classique : si G est un groupe abélien ordonné, une valuation sur un corpoïde F est une application $|\cdot| : F \rightarrow G \cup \{0\}$ telle que $|a| = 0$ si et seulement si a est nul, telle que $|ab| = |a| \cdot |b|$ pour tout $(a, b) \in F^2$, et telle que $|a+b| \leq \max(|a|, |b|)$ pour tout couple (a, b) d'éléments de même degré de F . On définit également dans ce cadre de manière naturelle les relations d'équivalence et de raffinement entre valuations, et les pendants colorés de toutes ces notions.

Fixons un groupe abélien D , un corpoïde D -gradué F et une valuation $|\cdot|$ sur F à valeurs dans $G \cup \{0\}$ pour un certain groupe abélien ordonné G .

2.2.1. — Pour tout couple $(d, g) \in D \times G$ nous poserons

$$\tilde{F}^{(d, g)} = \{z \in F^d, |z| \leq g\} / \{z \in F^d, |z| < g\};$$

si x est un élément de $F^\times$ on notera $\tilde{x}$ son image dans $\tilde{F}^{\deg x, |x|}$. Si H est un sous-groupe de $D \times G$ nous poserons

$$\tilde{F}^H = \coprod_{(d,g) \in H} \tilde{F}^{(d,g)}.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous écrirons simplement $\tilde{F}$ au lieu de $\tilde{F}^{D \times G}$. L'addition et la multiplication de F induisent une structure de $(D \times G)$ -corpoïde sur $\tilde{F}$; nous l'appellerons le *corpoïde résiduel* de $(F, |\cdot|)$ (ou simplement de F s'il n'y a pas d'ambiguïté); remarquons que $\tilde{F}$ n'a de termes non nuls qu'en degrés appartenant à $\tilde{F}^{\deg(F^\times) \times |F^\times|}$.

2.2.2. — Soit K un sous-corpoïde de F et soit $(\alpha_i)_i$ une famille d'éléments non nuls de $\tilde{F}$, de degrés respectifs $(d_i, g_i)_i$. Pour tout i , choisissons un élément $a_i \in F^{d_i}$ tel que $|a_i| = g_i$ et $\tilde{a}_i = \alpha_i$. Il résulte immédiatement des définitions que les α_i sont algébriquement indépendants sur le corpoïde $\tilde{K}$ si et seulement si pour tout polynôme $P = \sum a_I T^I$ appartenant à $K[d_i \setminus T_i]$ on a $|P(a_i)_i| = \max |a_I| g^I$; si c'est le cas on voit en particulier que les a_i sont algébriquement indépendants.

Supposons que F soit de degré de transcendance fini n sur K . Par ce qui précède on voit que le degré de transcendance de $\tilde{F}$ sur le corpoïde $\tilde{K}$ est majoré par n : c'est l'*inégalité d'Abhyankar*. On dit que l'extension de corpoïdes valués $K \hookrightarrow F$ est d'Abhyankar si le degré de transcendance de $\tilde{F}$ sur $\tilde{K}$ est égal à n ; cela revient à demander qu'il existe des éléments $a_1, \dots, a_n$ non nuls de F , dont on note d_i les degrés respectifs, et des éléments $g_1, \dots, g_n$ de G tels que pour tout polynôme $P = \sum a_I T^I$ appartenant à $K[d_i \setminus T_i]$ on ait $|P(a_i)_i| = \max |a_I| g^I$; nous dirons qu'une telle famille (a_i) est une *base d'Abhyankar* de F sur K .

Supposons que F soit une extension d'Abhyankar de K , et soit $(a_1, \dots, a_n)$ une base d'Abhyankar de F sur K ; soit F_0 le sous-corpoïde $K(a_1, \dots, a_n)$ de F . La famille (a_i) est une base de transcendance de F sur K , et F est donc une extension algébrique de F_0 , finie si F est de type fini sur K . Les $\tilde{a}_i$ forment une base de transcendance de $\tilde{F}$ sur $\tilde{K}$, et $\tilde{F}_0$ est simplement égal à $\tilde{K}(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$ par un calcul immédiat fondé sur la description explicite de la restriction de $|\cdot|$ à F_0 . Si F est de type fini sur K , la finitude de F sur K_0 entraîne la finitude de $\tilde{F}$ sur $\tilde{F}_0$, si bien que $\tilde{F}$ est de type fini sur $\tilde{K}$.

2.3. Raffinements de valuations colorées. — Soit Δ un groupe abélien ordonné, soit k un corps muni d'une Δ -valuation, et soit F une extension de k . Soit $|\cdot|$ une k -valuation Δ -colorée sur F . Le but de ce qui suit est d'étudier les raffinements de $|\cdot|$ en tant que k -valuation Δ -colorée au moyen du corpoïde résiduel $\tilde{F}$, qui est $|F^\times|$ -gradué.

2.3.1. — L'application de $\tilde{F}^\times$ vers $|F| \cdot \Delta$ qui envoie x sur $\deg(x)$ si $x \neq 0$ et sur 0 sinon est une valuation sur $\tilde{F}$, qu'on se permettra de noter encore $|\cdot|$, puisqu'elle satisfait par construction la formule $|\tilde{a}| = |a|$ pour tout $a \in F^\times$. Remarquons que $|\alpha| \in \Delta$ pour tout $\alpha \in \tilde{k}$: ainsi, la restriction de $|\cdot|$ à $\tilde{k}$ apparaît comme une Δ -valuation, ce qui fait de $|\cdot|$ une $\tilde{k}$ -valuation Δ -colorée sur $\tilde{F}$.

2.3.2. — Supposons donnée une k -valuation Δ -colorée $|\cdot|'$ sur F qui raffine $|\cdot|$. Soit α un élément non nul de $\tilde{F}$ et soit a un élément non nul de F tel que $\tilde{a} = \alpha$. Il est immédiat que $|a|'$ ne dépend que de α et pas de a . Ainsi, $|\cdot|'$ induit une valuation sur $\tilde{F}$, encore notée $|\cdot|'$, à valeurs dans le groupe abélien Δ -coloré $|F^\times|' \cdot \Delta$, caractérisée par le fait que $|a|' = |\tilde{a}|'$ pour tout $a \in F^\times$. Par construction, $|\cdot|'$ est une $\tilde{k}$ -valuation Δ -colorée sur $\tilde{F}$ qui raffine $|\cdot|$.

Réciproquement, supposons donnée une $\tilde{k}$ -valuation Δ -colorée $|\cdot|'$ sur $\tilde{F}$ qui raffine $|\cdot|$. La valuation $|\cdot|'$ induit alors une valuation Δ -colorée sur F à valeurs dans $|\tilde{F}^\times|' \cdot \Delta$, qui raffine $|\cdot|$ et est définie par la formule $|a|' = |\tilde{a}|'$ pour tout $a \in F^\times$.

2.3.3. — Les constructions précédentes mettent en bijection l'ensemble des raffinements (à équivalence près) de la k -valuation Δ -colorée $|\cdot|$ sur F et l'ensemble des raffinements (à équivalence près) de la $\tilde{k}$ -valuation Δ -colorée $|\cdot|$ sur $\tilde{F}$.

Cette bijection préserve les corpoïdes résiduels, dans le sens suivant. Soit $|\cdot|'$ un raffinement de la k -valuation Δ -colorée $|\cdot|$ de F ; notons encore $|\cdot|'$ la $\tilde{k}$ -valuation Δ -colorée correspondante correspondante sur $\tilde{F}$. Soit $\dot{F}$ le corpoïde résiduel de $(F, |\cdot|')$ et soit $\ddot{F}$ celui de $(\tilde{F}, |\cdot|')$. Le corpoïde résiduel $\ddot{F}$ est *a priori* gradué par $|F^\times|' \times |\tilde{F}^\times|'$, mais si π désigne le morphisme canonique $|F^\times|' \cdot \Delta \rightarrow |F^\times| \cdot \Delta$, le degré d'un élément de $\ddot{F}^\times$ appartient toujours au groupe $\{\pi(g), g\}_{g \in |F^\times|'}$, qui s'identifie à $|F^\times|'$ via la seconde projection. On peut donc voir $\ddot{F}$ comme un corpoïde $|F^\times|'$ -gradué, et l'on dispose alors d'un isomorphisme de corpoïdes $|F^\times|'$ -gradués entre $\dot{F}$ et $\ddot{F}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F^\times & \longrightarrow & \tilde{F}^\times \\ \downarrow & & \downarrow \\ \dot{F}^\times & \xrightarrow{\sim} & \ddot{F}^\times \end{array}$$

commute.

2.3.4. — Soit Γ un sous-groupe de Δ l'engendrant modulo $|k^\times|$.

Soit $|\cdot|'$ une $\tilde{k}$ -valuation Δ -colorée sur $\tilde{F}$ qui raffine $|\cdot|$. On lui associe une valuation (tout court, c'est-à-dire non colorée) $\langle \cdot \rangle$ sur le corpoïde $\tilde{F}^\Gamma$, triviale sur $\tilde{k}^\Gamma$, qu'on définit par la formule $\langle \alpha \rangle = |\alpha|' / |\alpha|$ pour tout α non nul de $\tilde{F}^\Gamma$ (rappelons que pour un tel α on a $|\alpha| = \deg(\alpha)$, si bien que $|\alpha| \in \Gamma \subset \Delta$ et que diviser par $|\alpha|$ dans $|\tilde{F}|' \cdot \Delta$ a donc un sens).

Réciproquement, soit $\langle \cdot \rangle$ une valuation sur $\tilde{F}^\Gamma$, triviale sur $\tilde{k}^\Gamma$. On vérifie, en utilisant le fait que $\Delta = |\tilde{k}^\times| \cdot \Gamma$, qu'il existe une unique $\tilde{k}$ -valuation Δ -colorée $|\cdot|'$ sur $\tilde{F}$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $\alpha \in \tilde{F}^\times$ on ait

$$|\alpha|' \leq \gamma \iff (|\alpha| < \gamma) \text{ ou } (|\alpha| = \gamma \text{ et } \langle \alpha \rangle \leq 1).$$

Il résulte de la construction que pour tout $\delta \in \Delta$ et tout $\alpha \in \tilde{F}$ on a l'implication $|\alpha|' \leq \delta \Rightarrow |\alpha| \leq \delta$. Par conséquent, $|\cdot|'$ raffine $|\cdot|$.

2.3.5. — On a ainsi mis en bijection l'ensemble des $\tilde{k}$ -valuations Δ -colorées sur $\tilde{F}$ (à équivalence près) qui raffinent $|\cdot|$ et l'ensemble des valuations sur $\tilde{F}^\Gamma$ (à équivalence près) qui sont triviales sur $\tilde{k}^\Gamma$.

Compte-tenu de 2.3.3 on obtient une bijection entre l'ensemble des k -valuations Δ -colorées sur F (à équivalence près) qui raffinent $|\cdot|$ et l'ensemble des valuations sur $\tilde{F}^\Gamma$ (à équivalence près) qui sont triviales sur $\tilde{k}^\Gamma$. Si $|\cdot|'$ est une k -valuation Δ -colorée sur F et si $\langle \cdot \rangle$ désigne la valuation associée sur $\tilde{F}^\Gamma$, le lien entre les deux est entièrement décrit par l'équivalence

$$|a|' \leq \gamma \iff (|a| < \gamma) \text{ ou } (|a| = \gamma \text{ et } \langle \tilde{a} \rangle \leq 1)$$

valable pour tout $a \in F^\times$.

2.4. Compléments sur les valuations bridées. — On fixe un corps ultramétrique complet k , ce qui veut dire que k est muni d'une valuation *réelle* $|\cdot|: k \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ pour laquelle il est complet. On fixe également un sous-groupe Γ de $\mathbf{R}_{>0}$ tel que $|k^\times| \cdot \Gamma \neq \{1\}$: autrement dit, Γ est non trivial si k est trivialement valué. Dans ce qui suit, nous considérerons $|\cdot|$ comme une $|k^\times| \cdot \Gamma$ -valuation.

2.4.1. — Soit F une extension de k . Soit $|\cdot|$ une k -valuation $|k^\times| \cdot \Gamma$ -colorée et bridée sur F (comme F est un corps, cette dernière condition revient à demander que pour tout $\lambda \in F^\times$ il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $|\lambda| \leq \gamma$). Soit $\lambda \in |F^\times|$. L'ensemble

$$\{\alpha \in (|k^\times| \cdot \Gamma)^{\mathbf{Q}}, \alpha \leq |\lambda|\} \subset \mathbf{R}_{>0}$$

est non vide et majoré, et il admet donc une borne supérieure $|\lambda|^\#$ dans $\mathbf{R}_{>0}$. Il est immédiat que $|\cdot|^\#$ (étendue à F en posant $|0|^\# = 0$) est une $\mathbf{R}_{>0}$ -valuation sur F prolongeant la valuation structurale de k ; c'est donc une k -valuation $|k^\times| \cdot \Gamma$ -colorée et bridée sur F , dont $|\cdot|$ est un raffinement. Notons $\tilde{F}$ le corpoïde résiduel de $(F, |\cdot|^\#)$. La valuation $|\cdot|$ induit d'après 2.3.5 une valuation $|\cdot|^\flat$ sur $\tilde{F}^\Gamma$, triviale sur $\tilde{k}^\Gamma$.

Réciproquement, 2.3.5 permet d'associer à toute valuation réelle $|\cdot|^\#$ sur F prolongeant la valuation de k et toute valuation $|\cdot|^\flat$ sur $\tilde{F}^\Gamma$, triviale sur $\tilde{k}^\Gamma$ une k -valuation $|k^\times| \cdot \Gamma$ -colorée $|\cdot|$ sur F raffinant $|\cdot|^\#$, qui sera bridée par construction.

2.4.2. — Il découle de ce qui précède qu'il existe une bijection entre l'ensemble des k -valuations $|k^\times| \cdot \Gamma$ -colorées et bridées sur F et celui des couples $(|\cdot|^\#, |\cdot|^\flat)$ où $|\cdot|^\#$ est une valuation réelle sur F prolongeant la valuation de k et où $|\cdot|^\flat$ est une valuation sur la partie Γ -graduée du corpoïde résiduel de $(F, |\cdot|^\#)$, triviale sur $\tilde{k}^\Gamma$.

Le lien entre $(|\cdot|^\#, |\cdot|^\flat)$ et $|\cdot|$ est entièrement décrit par l'équivalence

$$|\lambda| \leq \gamma \iff (|\lambda|^\# < \gamma) \text{ ou } (|\lambda|^\# = \gamma \text{ et } |\tilde{\lambda}|^\flat \leq 1),$$

valable pour tout $\lambda \in F^\times$.

2.4.3. — Soit $|\cdot|$ une k -valuation $|k^\times| \cdot \Gamma$ -colorée et bridée sur F et soit $(|\cdot|^\#, |\cdot|^\flat)$ le couple qui lui correspond *via* la bijection du 2.4.2. Soit $\tilde{F}$ le corpoïde résiduel de $(F, |\cdot|^\#)$. Soit $\hat{F}$ le complété de K pour la valuation réelle $|\cdot|^\#$; celle-ci se prolonge canoniquement en une valuation réelle sur $\hat{F}$ que l'on note encore $|\cdot|^\#$, et dont le

corpoïde résiduel est encore $\tilde{F}$. Au couple $(|\cdot|^\#, |\cdot|^\flat)$ relatif à l'extension $\hat{F}$ de k correspond alors en vertu de 2.4.2 une k -valuation $|k^\times| \cdot \Gamma$ -colorée et bridée $|\cdot|$ sur $\hat{F}$, qui prolonge la valuation $|\cdot|$ de F – nous dirons que c'est son prolongement canonique à $\hat{F}$. Celui-ci se décrit aisément. En effet, soit λ un élément non nul de $\hat{F}$, et soit λ_0 un élément de F tel que $|\lambda - \lambda_0|^\# < |\lambda|^\#$; il résulte alors immédiatement des définitions que $|\lambda| = |\lambda_0|$. Notons qu'en conséquence $|\hat{F}^\times| = |F^\times|$.

2.4.4. Le cas d'une k -algèbre. — Soit A une k -algèbre. Une k -valuation $(|k^\times| \cdot \Gamma)$ -colorée x sur A est bridée si et seulement si la valuation $(|k^\times| \cdot \Gamma)$ -colorée $|\cdot|$ de $\kappa(x)$ est bridée. Si c'est le cas, il lui correspond un couple $(|\cdot|^\#, |\cdot|^\flat)$ par la bijection de 2.4.2. Le complété de $\kappa(x)$ pour la valuation réelle $|\cdot|^\#$ sera noté $\mathcal{H}(x)$, et le prolongement canonique de $|\cdot|$ à $\mathcal{H}(x)$ sera encore noté $|\cdot|$ (2.4.3). On désignera par $\widehat{\mathcal{H}(x)}$ le corpoïde résiduel de $\mathcal{H}(x)$ relatif à sa valuation réelle $|\cdot|^\#$.

L'application $a \mapsto |a(x)|^\#$ est une k -valuation $(|k^\times| \cdot \Gamma)$ -colorée et bridée sur A , que nous noterons $x^\#$. Avec nos conventions on a donc $|a(x)|^\# = |a(x^\#)|$. Quant à la valuation résiduelle $|\cdot|^\flat$, nous la verrons comme un point de l'espace de Zariski-Riemann $\mathbf{P}_{\widehat{\mathcal{H}(x^\#)}^\Gamma / \tilde{k}^\Gamma}$ des valuations sur le corpoïde $\widehat{\mathcal{H}(x^\#)}^\Gamma$ qui sont triviales sur $\tilde{k}^\Gamma$, et nous la noterons $x^\flat$. Si a est un élément de A tel que $|a(x^\#)| \in \Gamma$, la notation $|a(x^\#)(x^\flat)|$ a donc un sens. Comme elle est passablement indigeste, nous l'abrègerons en $|a(x^\flat)|$.

Soit $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme de k -algèbres et soit y une valuation $(|k^\times| \cdot \Gamma)$ -colorée et bridée sur B . La k -valuation $(|k^\times| \cdot \Gamma)$ -colorée qu'elle induit sur A est alors elle-même bridée.

3. Espaces domaniaux et géométrie linéaire par morceaux

Le but de cette section est de décrire la théorie des espaces linéaires par morceaux abstraits dont nous nous servons ici. Nous avons adopté (suivant en cela Berkovich) le point de vue *multiplicatif*, consistant à voir $\mathbf{R}_{>0}$ comme un espace vectoriel réel, sa loi de groupe étant la multiplication, et sa multiplication externe l'exponentiation; cela nous permettra d'éviter une profusion de symboles $\exp$ et $\log$ qui alourdiraient les notations sans aucune utilité mathématique.

Nous avons par ailleurs choisi de faire une présentation faisceautique de la théorie, qui nous a *in fine* a semblé plus adaptée à la définition et l'étude des squelettes que la présentation plus traditionnelle par cartes et atlas, développée par Berkovich dans [Ber04] et reprise dans [Duc12]; cette présentation est en partie inspirée par le formalisme des «espaces tropicaux» développé par Antoine Chambert-Loir et le premier auteur dans leur travail en cours [CLD12].

3.1. Les espaces domaniaux. — Avant d'en venir aux espaces linéaires par morceaux proprement dite nous allons introduire une notion plus générale, celle d'*espace domanial enrichi*, qui s'avèrera très commode pour décrire les relations entre la géométrie de Berkovich et la géométrie linéaire par morceaux, qui sont au cœur de la théorie des squelettes.

3.1.1. Brefs rappels de topologie générale. — Rappelons qu'une application continue $f: Y \rightarrow X$ est dit *propre* si et seulement si elle est universellement fermée, c'est-à-dire si et seulement si pour tout espace topologique Z et toute application continue $Z \rightarrow Y$, l'application continue induite $Y \times_X Z \rightarrow Z$ est fermée. On démontre que f est propre si et seulement si f est fermée à fibres *quasi-compactes* (nous ne faisons aucune hypothèse de séparation *a priori*).

Si f est propre $f^{-1}(K)$ est quasi-compact pour toute partie quasi-compacte K de X . La réciproque est vraie lorsque X est localement compact (rappelons qu'un espace localement compact est *par définition* séparé).

Si X possède une base de voisinages compacts (sans être nécessairement séparé), l'application f est propre et séparée si et seulement si $f^{-1}(K)$ est compacte pour toute partie compacte K de X .

3.1.2. — Si E est une partie d'un espace topologique X , on dit qu'une famille (E_i) de sous-ensembles de E est un *G-recouvrement* de E si tout point x de E possède un voisinage *dans* E de la forme $\bigcup_{i \in I} E_i$ où I est un ensemble fini d'indices tels que $x \in \bigcap_{i \in I} E_i$. Donnons deux exemples importants de G-recouvrements :

- ◊ si U est un ouvert de X , tout recouvrement ouvert de U en est un G-recouvrement ;
- ◊ si (F_i) est une famille localement finie de fermés de X et si l'on pose $F = \bigcup_i F_i$ alors F est un fermé de X dont les F_i constituent un G-recouvrement.

3.1.3. Définition. — Un *espace domanial* est un espace topologique X dont tout point possède une base de voisinages compacts et qui est muni d'un ensemble de parties, les *domaines* de X , vérifiant les propriétés suivantes :

- (a) tout ouvert de X est un domaine ;
- (b) l'intersection d'une famille finie de domaines de X est un domaine de X ;
- (c) tout domaine de X est G-recouvert par des domaines compacts ;
- (d) toute partie de X qui est G-recouverte par des domaines de X est un domaine de X .

3.1.4. — Soit X un espace domanial. Soit V un domaine de X . Choisissons un recouvrement (U_i) de X par des ouverts séparés. Chacun des $U_i \cap V$ est un domaine de X , donc est G-recouvert par des domaines compacts de X , qui ont fermés dans l'espace séparé U_i . Il s'ensuit que chacun des $V \cap U_i$ est localement fermé dans U_i puis que V est localement fermé dans X .

Le domaine V hérite d'une structure naturelle d'espace domanial : ses domaines sont simplement les domaines de X contenus dans V .

Si x est un point de X , un *voisinage domanial* de x est simplement un voisinage de x qui est aussi un domaine de X . Si U est un voisinage ouvert de x , il existe un voisinage ouvert séparé U' de x dans U , et un G-recouvrement de U' par des domaines compacts ; en particulier, il existe une famille finie (V_i) de domaines compacts de X contenus dans U' et contenant x dont la réunion V est un voisinage de x dans U' . Comme U' est séparé les V_i sont fermés dans U' et V est donc un domaine compact de X . Ainsi tout point de X possède-t-il une base de voisinages domaniaux compacts.

On fait de la catégorie des domaines de X (les flèches étant les inclusions) un site en décrétant que les familles couvrantes sont les G -recouvrements ; on l'appelle le site domanial, et sa topologie est appelée la topologie domaniale, ou encore la G -topologie de X .

3.1.5. — On fait de la classe des espaces domaniaux une catégorie, en définissant un morphisme d'espaces domaniaux de Y vers X comme une application continue $f: Y \rightarrow X$ telle que $f^{-1}(V)$ soit un domaine de Y pour tout domaine V de X . Un tel morphisme induit un morphisme entre les sites domaniaux de Y et X .

3.1.6. — Soit X un espace domanial et soit Z une partie localement fermée de X . L'ensemble Z hérite d'une structure domaniale naturelle, dite induite, pour laquelle une partie T de Z est un domaine si et seulement si T est G -recouverte par des parties de la forme $V \cap Z$ où V est un domaine de X . Lorsque Z est un domaine de X , cette structure domaniale coïncide avec celle de 3.1.4. L'inclusion de Z dans X est un morphisme d'espaces domaniaux et $Z \hookrightarrow X$ est l'objet final de la catégorie des espaces domaniaux munis d'un morphisme vers X dont l'image ensembliste est contenue dans Z .

On déduit de cette caractérisation fonctorielle que si T est une partie localement fermée de Z , les structures domaniales sur T héritées de X et de Z coïncident.

3.1.7. Définition. — Un espace domanial *enrichi* est un espace domanial X muni d'un faisceau de fonctions continues à valeurs dans $\mathbf{R}_{>0}$ sur son site domanial.

Un morphisme d'espaces domaniaux enrichis $f: (Y, \Lambda_Y) \rightarrow (X, \Lambda_X)$ est un morphisme d'espaces domaniaux $f: Y \rightarrow X$ tel que pour tout domaine U de X , pour tout domaine V de $f^{-1}(U)$ et toute $\varphi \in \Lambda_X(U)$, la fonction $\varphi \circ (f|_V)$ appartient à $\Lambda_Y(V)$.

3.1.8. Commentaires et premières propriétés. — Si (X, Λ) est un espace domanial enrichi, tout domaine V de X peut être vu naturellement comme un espace domanial enrichi, *via* $\Lambda|_V$. Plus généralement, soit Z une partie localement fermée de X munie de sa structure domaniale induite (3.1.6) et soit i l'inclusion de Z dans X . Pour tout domaine T de Z notons $\Lambda_Z(T)$ l'ensemble des applications continues de T vers $\mathbf{R}_{>0}$ qui sont G -localement de la forme $u|_{V \cap T}$ où V est un domaine de X et u un élément de $\Lambda(V)$; il est immédiat que Λ_Z est un faisceau sur le site domanial de Z , faisant de ce dernier un espace domanial enrichi ; nous dirons la structure d'espace domanial enrichi ainsi construite sur Z est héritée de celle de X . Par construction, i est un morphisme d'espaces domaniaux enrichis de (Z, Λ_Z) vers (X, Λ) , et $i: Z \hookrightarrow X$ est l'objet final de la catégorie des espaces domaniaux enrichis munis d'un morphisme vers X dont l'image ensembliste est contenue dans Z .

On déduit de cette caractérisation fonctorielle que si T est une partie localement fermée de Z , les structures domaniales enrichies sur T héritées de X et de Z coïncident.

3.2. Espaces linéaires par morceaux. — Nous allons maintenant donner un premier exemple majeur d'espaces domaniaux enrichis. On fixe un couple $c = (K, \Delta)$ où K est un sous-corps de $\mathbf{R}$ et Δ un sous- K -espace vectoriel de $\mathbf{R}_{>0}$. Ce couple représente les paramètres avec lesquels nos espaces linéaires par morceaux seront définis : K est l'ensemble des exposants possibles de nos applications monomiales (c'est-à-dire

affines, avec notre point de vue multiplicatif) et Δ celui de leurs termes constants. Dans les applications que nous avons en vue, K sera toujours égal à $\mathbf{Q}$.

3.2.1. Les c -polytopes. — Une application φ de $\mathbf{R}_{>0}^n$ vers $\mathbf{R}_{>0}^m$ est dite c -affine si chacune de ses composantes est de la forme

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto ax_1^{e_1} \dots x_n^{e_n}$$

où les e_i appartiennent à K et a à Δ . Un c -polytope de $\mathbf{R}_{>0}^n$ est une partie de $\mathbf{R}_{>0}^n$ qui est définie par une condition de la forme

$$\bigvee_i \bigwedge_j \varphi_{ij} \leq 1$$

où les φ_{ij} sont des applications c -affines de $\mathbf{R}_{>0}^n$ vers $\mathbf{R}_{>0}$.

3.2.2. — Une c -cellule de $\mathbf{R}_{>0}^n$ est un c -polytope de ce dernier qui est non vide et peut être défini par une conjonction finie d'inégalités $\bigwedge_i \varphi_i \leq 1$, où les φ_i sont c -affines. (On peut démontrer que cela revient à demander qu'il soit convexe et non vide).

Le bord ∂C d'une c -cellule C est son bord topologique dans le sous-espace affine $\langle C \rangle$; son intérieur $\overset{\circ}{C}$ est son intérieur topologique dans $\langle C \rangle$. Si C est décrite par une conjonction $\bigwedge_i \varphi_i \leq 1$ comme ci-dessus, ∂C est le c -polytope décrit par la condition

$$\bigvee_{j \in J} \left((\varphi_j = 1) \wedge \bigwedge_{i \neq j} \varphi_i \leq 1 \right),$$

où J est l'ensemble des indices j tels que φ_j ne soit pas identiquement égale à 1 sur P .

Une c -cellule ouverte de $\mathbf{R}_{>0}^n$ est une partie de la forme $\overset{\circ}{C}$ où C est une c -cellule, qui est uniquement déterminée (c'est l'adhérence de $\overset{\circ}{C}$).

3.2.3. Remarque. — Soient n et m deux entiers, soit φ une application c -affine de $\mathbf{R}_{>0}^n$ vers $\mathbf{R}_{>0}^m$ et soit C une c -cellule de $\mathbf{R}_{>0}^n$. L'image $\varphi(C)$ est une c -cellule de $\mathbf{R}_{>0}^m$ (par des changements convenables de coordonnées on se ramène au cas d'une projection, et l'on procède alors par un calcul explicite); si φ est injective, elle induit un isomorphisme c -linéaire par morceaux de C sur $\varphi(C)$.

3.2.4. Décompositions c -cellulaires des polytopes. — Si P est un c -polytope quelconque de $\mathbf{R}_{>0}^n$, il possède une *décomposition c -cellulaire finie* $\mathcal{C}$, c'est-à-dire un ensemble fini de c -cellules contenues dans P , qui recouvrent P , et telles que :

- ◇ ∂C est pour toute $C \in \mathcal{C}$ une union finie d'éléments de $\mathcal{C}$;
- ◇ si C et D appartiennent à $\mathcal{C}$ alors $C \cap D$ est une union finie d'éléments de $\mathcal{C}$;
- ◇ si C et D appartiennent à $\mathcal{C}$ et si $C \subset D$ alors $C = D$ ou $C \subset \partial D$.

Plus précisément, donnons-nous un ensemble fini $\mathcal{P}$ de c -polytopes de $\mathbf{R}_{>0}^n$. Choisissons une famille finie (ψ_i) de fonctions c -affines sur $\mathbf{R}_{>0}^n$ telle que chacun des c -polytopes appartenant à $\mathcal{P}$ soit décrit par une conjonction et disjonction d'inégalités de la forme $\psi_i \leq 1$ pour un certain i et soit $\mathcal{C}$ la décomposition cellulaire de $\mathbf{R}_{>0}^n$

constituée des c -cellules décrites par une conjonction de la forme

$$\bigwedge_i \psi_i \bowtie_i 1$$

où $\bowtie_i \in \{\leq, \geq, =\}$ (nous dirons que c'est la décomposition cellulaire induite par la famille (ψ_i)). Chaque polytope de $\mathcal{P}$ est alors réunion de cellules appartenant à $\mathcal{C}$.

Si Q est une partie de $\mathbf{R}_{>0}^n$ qui s'écrit comme combinaison booléenne de c -polytopes appartenant à $\mathcal{P}$ il est alors immédiat que l'on peut écrire $Q = \coprod_{C \in \mathcal{D}} \mathring{C}$ pour un certain sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$.

3.2.5. Espaces c -linéaires par morceaux : le cas plongé. — Une partie de $\mathbf{R}_{>0}^n$ est dite c -linéaire par morceaux si elle s'écrit comme une réunion localement finie de c -polytopes. Les parties c -linéaires par morceaux de $\mathbf{R}_{>0}^n$ satisfont les axiomes (a), (b), (c) et (d) de la définition 3.1.3, ce qui veut dire qu'elles définissent une structure d'espace domanial sur $\mathbf{R}_{>0}^n$, dite c -linéaire par morceaux, dont elles sont précisément les domaines.

Si P est une partie c -linéaire par morceaux de $\mathbf{R}_{>0}^n$, nous dirons qu'une application $\varphi: P \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ est c -linéaire par morceaux s'il existe un G-recouvrement (P_i) de P par des c -polytopes tel que $\varphi|_{P_i}$ soit c -affine pour tout i ; notons que si c'est le cas, φ est continue puisque cette propriété se teste G-localement.

Nous noterons $\Lambda_c(P)$ l'ensemble des applications c -linéaires par morceaux de P vers $\mathbf{R}_{>0}$. Si Q est une partie c -linéaire par morceaux de $\mathbf{R}_{>0}^n$ contenue dans P , alors $\varphi|_Q \in \Lambda_c(Q)$ pour toute $\varphi \in \Lambda_c(P)$, et l'appartenance à $\Lambda_c(P)$ d'une application de P vers $\mathbf{R}_{>0}$ est par définition une propriété G-locale. Il s'ensuit que $P \mapsto \Lambda_c(P)$ est un faisceau d'applications continues à valeurs dans $\mathbf{R}_{>0}$ pour la G-topologie de $\mathbf{R}_{>0}^n$, qui fait dès lors de ce dernier un espace domanial enrichi.

La dimension d'une partie c -linéaire par morceaux P de $\mathbf{R}_{>0}^n$ est $\sup \dim \langle C \rangle$, où C parcourt l'ensemble des c -cellules contenues dans P (pour ces questions de dimension, on optera pour la convention $\sup \emptyset = -\infty$). On peut se limiter à calculer le supremum sur un G-recouvrement donné de P par des c -cellules (par exemple sur une décomposition c -cellulaire donnée si P est un polytope).

3.2.6. Définition (Espaces c -linéaires par morceaux abstraits)

Un *espace c -linéaire par morceaux* est un espace domanial enrichi X possédant un G-recouvrement (X_i) par des domaines tels que pour tout i , il existe un entier n_i , une partie c -linéaire par morceaux P_i de $\mathbf{R}_{>0}^{n_i}$ et un isomorphisme $X_i \simeq P_i$ d'espaces c -linéaires domaniaux enrichis.

Un morphisme d'espaces c -linéaires par morceaux est un morphisme d'espaces domaniaux enrichis.

3.2.7. Exemple. — Soit n un entier et soit P une partie linéaire par morceaux de $\mathbf{R}_{>0}^n$. Muni de sa structure d'espace domanial enrichi définie en 3.2.1, P est par construction un espace c -linéaire par morceaux.

Soit m un entier et soit Q une partie c -linéaire par morceaux de $\mathbf{R}_{>0}^m$. Un morphisme d'espaces c -linéaires par morceaux de P vers Q est une application de P vers $Q \subset \mathbf{R}_{>0}^m$ dont toutes les composantes sont c -linéaires par morceaux.

3.2.8. Dimension d'un espace c -linéaire par morceaux. — Soit X un espace c -linéaire par morceaux. Convenons de dire que X est *plongeable* s'il est isomorphe à un sous-espace c -linéaire par morceaux P de $\mathbf{R}_{>0}^n$ pour un certain n . Si c'est le cas $\dim P$ ne dépend alors que de X et sera appelé la dimension de X .

En général, on définit la dimension de X comme le supremum des dimensions de ses sous-espaces linéaires par morceaux plongeables ; ce supremum vaut $-\infty$ si X est vide, appartient à $\mathbf{Z}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ sinon, et il est fini dès que X est compact et non vide ; il peut par ailleurs être calculé par rapport à une famille donnée de sous-espaces c -linéaires par morceaux plongeables qui G -recouvre X . Cette définition est compatible avec la précédente si X est plongeable.

Si x est un point de X on définit la dimension de X en x , notée $\dim_x X$, comme le minimum des $\dim V$ où V est un voisinage c -linéaire par morceaux compact de x . La dimension de X est égale au supremum des $\dim_x X$ pour x parcourant X . On dira que X est *purement de dimension n* (pour un certain entier n) si $\dim_x X = n$ pour tout $x \in X$.

3.2.9. Extension des paramètres de définition. — Soit X un espace c -linéaire par morceaux. Les parties domaniales de X seront appelées *sous-espaces c -linéaires par morceaux* de X , son faisceau structural sera noté Λ_c , et ses sections seront appelées applications c -linéaires par morceau. Cette terminologie et cette notation sont compatibles avec celles déjà introduites au 3.2.1 dans le cas plongé.

Nous conservons le c en indice dans la notation du faisceau structural pour rappeler quels sont les paramètres avec lesquels sont définis les polytopes (multiplicatifs) sur lesquels tout est modelé. Mais il est possible d'élargir l'ensemble des paramètres autorisés.

Plus précisément, donnons-nous un couple $d = (L, \Upsilon)$ où L est un sous-corps de $\mathbf{R}$ contenant K et Υ un sous- L -espace vectoriel de $\mathbf{R}_{>0}$ contenant Δ . Pour tout n , toute partie c -linéaire par morceaux P de $\mathbf{R}_{>0}^n$ est *a fortiori* d -linéaire par morceaux, et $\Lambda_c(P) \subset \Lambda_d(P)$.

Ces considérations plongées admettent la déclinaison abstraite que voici. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties V de X possédant la propriété suivante : il existe une partie c -linéaire par morceaux U de X contenant V , un entier n et un isomorphisme d'espaces c -linéaires par morceaux $\iota: U \simeq P$ où P est une partie c -linéaire par morceaux de $\mathbf{R}_{>0}^n$, tels que $\iota(V)$ soit une partie d -linéaire par morceaux de $\mathbf{R}_{>0}^n$. Si $V \in \mathcal{E}$ et si ι est comme ci-dessus, l'ensemble des applications de V dans $\mathbf{R}_{>0}$ de la forme $f \circ \iota$ ou $f \in \Lambda_d(\iota(V))$ ne dépend que de V , et sera noté $\Lambda_d(V)$. On définit alors comme suit une nouvelle structure domaniale enrichie sur X , dont le faisceau structural est noté Λ_d :

- ◇ ses domaines sont les parties de X qui sont G -recouvertes par des éléments de $\mathcal{E}$;
- ◇ si V est un domaine au sens ci-dessus, $\Lambda_d(V)$ est l'ensemble des applications f de V vers $\mathbf{R}_{>0}$ telles que $f|_W \in \Lambda_d(W)$ pour toute partie W de V appartenant à $\mathcal{E}$.

Cette structure domaniale enrichie fait de X un espace d -linéaire par morceaux, que l'on dira déduit de l'espace c -linéaire par morceaux initial par extension des paramètres.

3.2.10. Lemme. — *Soit X un espace c -linéaire par morceaux et soit Z une partie localement fermée de X , munie de sa structure domaniale enrichie héritée de celle de X (3.1.8). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *le sous-ensemble Z de X en est une partie c -linéaire par morceaux ;*
- (ii) *l'espace domanial enrichi Z est un espace c -linéaire par morceaux.*

Démonstration. — L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est claire. Supposons que (ii) soit vérifiée. Par définition, il existe un G -recouvrement de Z de la forme $(V_i \cap Z)_i$, où chaque V_i est une partie c -linéaire par morceaux de X et, pour tout i , un isomorphisme c -linéaire par morceaux $\varphi_i: (V_i \cap Z) \simeq P_i$ où P_i est une partie c -linéaire par morceaux de $\mathbf{R}_{>0}^{n_i}$ pour un certain n_i . De plus, quitte à raffiner le recouvrement, on peut supposer que pour tout indice i , il existe un isomorphisme c -linéaire par morceaux $\psi_i: V_i \simeq Q_i$ où Q_i est une partie c -linéaire par morceaux de $\mathbf{R}_{>0}^{m_i}$ pour un certain m_i , et que l'isomorphisme φ_i est induit par la restriction à $Z \cap V_i$ de n_i fonctions c -linéaires par morceaux sur V_i ; en adjoignant à ces dernières les m_i fonctions qui définissent ψ_i , on peut finalement supposer que φ_i est induit par la restriction de ψ_i à $Z \cap V_i$. Dans ce cas P_i est contenu dans Q_i et $V_i \cap Z = \psi_i^{-1}(P_i)$, si bien que $V_i \cap Z$ est une partie c -linéaire par morceaux de V_i , donc de X . Comme ceci vaut pour tout i , le sous-ensemble Z de X en est bien une partie c -linéaire par morceaux. $\square$

3.2.11. Lemme. — *Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme propre (comme application continue) d'espaces c -linéaires par morceaux.*

- (1) *L'image $f(Y)$ est un sous-espace c -linéaire par morceaux (nécessairement fermé) de X .*
- (2) *Si de plus f est injective, f induit un isomorphisme de Y sur $f(Y)$.*

Démonstration. — Les deux assertions sont G -locales sur X , ce qui permet de le supposer compact. L'espace Y est alors quasi-compact.

Montrons (1). Comme Y est quasi-compact, il est réunion d'un nombre fini de domaines compacts. Il suffit alors de montrer que l'image de chacun de ces domaines est une partie c -linéaire par morceaux de C , ce qui permet de se ramener au cas où Y est également compact. En raisonnant à nouveau G -localement sur X et sur Y , on se ramène ensuite au cas où tous deux sont plongeables et l'on conclut à l'aide de la remarque 3.2.3.

Montrons maintenant (2). Au vu de (1) l'image $f(Y)$ est une partie c -linéaire par morceaux compacte de X ; quitte à remplacer X par $f(Y)$ on peut supposer que f est surjective. Tout G -recouvrement fini (Y_i) de Y par des parties c -linéaires par morceaux compactes induit alors un recouvrement $(f(Y_i))$ de X , et les $f(Y_i)$ sont c -linéaires par morceaux d'après (1), et compacts. Ceci permet de raisonner G -localement sur Y aussi bien que sur X , et partant de supposer que X est un c -polytope compact de $\mathbf{R}_{>0}^m$ et Y une c -cellule compacte de $\mathbf{R}_{>0}^n$ (pour n et m convenables) et que f est c -affine. On conclut alors à l'aide une fois encore de la remarque 3.2.3. $\square$

3.3. Quotient d'un espace c -linéaire par morceaux sous l'action d'un groupe fini. — Nous nous proposons maintenant de démontrer que le quotient d'un espace c -linéaire par morceaux (séparé) X sous l'action d'un groupe fini G a une structure c -linéaire par morceaux naturelle, qui en fait un quotient catégorique de X par G (théorème 3.3.3). Pour ce faire nous établirons tout d'abord une variante nettement plus faible de ce résultat (lemme 3.3.2), qui dit essentiellement que X/G est définissable dans le langage des K -espaces vectoriels ordonnés à paramètres dans Δ .

3.3.1. — Commençons par introduire quelques notations. Soit n un entier. Nous noterons $D(\mathbf{R}_{>0}^n)$ la sous-algèbre de Boole de $\mathcal{P}(\mathbf{R}_{>0}^n)$ engendrée par les c -polytopes ; remarquons que les éléments compacts de $D(\mathbf{R}_{>0}^n)$ sont précisément les c -polytopes compacts de $\mathbf{R}_{>0}^n$ (on peut le voir en considérant une décomposition cellulaire ouverte de P , cf. 3.2.4). Si $P \in D(\mathbf{R}_{>0}^n)$, nous désignerons par $D(P)$ la sous-algèbre de Boole $\mathcal{P}(P) \cap D(\mathbf{R}_{>0}^n)$ de $\mathcal{P}(P)$. Lorsque P est un c -polytope compact, $D(P)$ est aussi la sous-algèbre de Boole de $\mathcal{P}(P)$ engendrée par les c -polytopes compacts contenus dans P .

Nous emploierons également la notation $D(X)$ lorsque X est un espace c -linéaire par morceaux abstrait *compact*, pour désigner la sous-algèbre de Boole de $\mathcal{P}(X)$ engendrée par les sous-espaces c -linéaires par morceaux compacts de X .

3.3.2. Lemme. — *Soit X un espace c -linéaire par morceaux compact et soit G un groupe fini agissant sur X par automorphismes c -linéaires par morceaux. Il existe une partition $\mathbf{P}$ de X en éléments de $D(X)$ possédant les propriétés suivantes :*

- (a) *pour tout $V \in \mathbf{P}$ et tout $g \in G$ l'image $g(V)$ appartient à $\mathbf{P}$;*
- (b) *pour tout $V \in \mathbf{P}$ et tout $g \in G$ ou bien $g(v) = v$ pour tout $v \in V$ ou bien $V \cap g(V) = \emptyset$;*
- (c) *pour tout $V \in \mathbf{P}$ il existe une partie c -linéaire par morceaux compacte V' de X contenant V et un isomorphisme f_V de V' sur un c -polytope compact de $\mathbf{R}_{>0}^{n_V}$ (pour un certain n_V) qui identifie V à une cellule ouverte de $\mathbf{R}_{>0}^{n_V}$;*
- (d) *tout $V \in \mathbf{P}$ de dimension égale à $\dim X$ est un ouvert de X .*

Démonstration. — Commençons par choisir un G -recouvrement fini de X par des sous-espaces c -linéaires par morceaux compacts et plongeables. En considérant des combinaisons booléennes convenables des éléments de ce recouvrement, on obtient une première partition $\mathbf{Q}$ de X en éléments de $D(X)$ qui possède la propriété suivante : pour tout $V \in \mathbf{Q}$, il existe une partie c -linéaire par morceaux compacte V' de X contenant V et un isomorphisme c -linéaire par morceaux f_V entre V' et une partie c -linéaire par morceaux compacte de $\mathbf{R}_{>0}^{n_V}$ pour un certain n_V ; l'image $f_V(V)$ appartient alors à $D(g_V(V'))$. De plus, on peut toujours supposer, quitte à agrandir les n_V et à composer les f_V avec des translations convenables (par des vecteurs dont les composantes appartiennent à Δ) que les n_V sont tous égaux à un même entier n , et les $f_V(V)$ deux à deux disjoints. La concaténation $f := \coprod_{V \in \mathbf{Q}} (f_V)_{|V}$ définit alors une bijection de X sur un certain $E \in D(\mathbf{R}_{>0}^n)$. De plus il résulte de la construction de

f que si Y est une partie de X alors $Y \in D(X)$ si et seulement si $f(Y)$ appartient à $D(E)$.

L'action de G sur X en induit une *via* f sur E , par bijections définissables dans le langage des groupes abéliens ordonnés, à paramètres dans Δ . On munit $\mathbf{R}_{>0}^n$ de l'ordre lexicographique. Soit F le sous-ensemble de E formé des point x qui sont minimaux au sein de leur orbite sous G ; le sous-ensemble F de E appartient à $D(E)$. Si m est un entier, on note F_m l'ensemble des points de F dont l'orbite contient exactement m éléments; et pour toute application ensembliste $\varphi: G \rightarrow \{1, \dots, m\}$, on désigne par $F_{m,\varphi}$ le sous-ensemble de F_m formé des points x tels que $g(x)$ soit le $\varphi(g)$ -ième point de l'orbite de X (toujours pour l'ordre lexicographique sur $\mathbf{R}_{>0}^n$). L'ensemble des $F_{m,\varphi}$ non vides constitue une partition finie de F en éléments de $D(E)$. Fixons m et φ tels que $F_{m,\varphi}$ soit non vide. Il existe alors une partition finie $P_{m,\varphi}$ de $F_{m,\varphi}$ en c -cellules ouvertes telles que pour toute $C \in P_{m,\varphi}$ les propriétés suivantes soient satisfaites :

- (a) pour tout $g \in G$ la restriction de g à C est c -affine, et il existe $V \in Q$ telle que $g(C) \subset f_V(V')$;
- (b) si $\dim C = \dim X$ alors $f^{-1}(C)$ est un ouvert de X .

En effet, il est facile en vertu de 3.2.4 de construire une première partition $R_{m,\varphi}$ de $F_{m,\varphi}$ satisfaisant (a). Considérons une cellule ouverte C de $R_{m,\varphi}$. L'image réciproque $f^{-1}(C)$ est alors une partie c -linéaire par morceaux compacte de X , et son bord topologique dans X est de ce fait contenu dans une partie c -linéaire par morceaux de dimension $\dim X - 1$ (on le vérifie G -localement sur X , ce qui permet de se ramener au cas où ce dernier est un c -polytope compact de $\mathbf{R}_{>0}^m$ pour un certain m , dans lequel c'est clair). Il s'ensuit (là encore à l'aide de 3.2.4) que si C est une cellule de dimension $\dim X$ de $R_{m,\varphi}$ elle possède elle-même une partition finie S_C en cellules ouvertes telles que pour toute $D \in S_C$ de dimension $\dim X$ l'image réciproque $f^{-1}(D)$ soit ouverte dans X . Il en résulte qu'on peut raffiner la partition $R_{m,\varphi}$ pour obtenir une partition $P_{m,\varphi}$ de $F_{m,\varphi}$ possédant les propriétés requises.

Soit alors P l'ensemble des parties V de X possédant la propriété suivante : il existe m et φ tels que $F_{m,\varphi}$ soit non vide, il existe A appartenant à $P_{m,\varphi}$ et g appartenant à G tels que $f(V) = g(A)$. Par construction, P est une partition de X répondant aux conditions de l'énoncé. $\square$

3.3.3. Théorème. — *Soit X un espace c -linéaire par morceaux et soit G un groupe fini agissant sur X par automorphismes c -linéaires par morceaux. On suppose que toute orbite de G sur X est contenue dans un ouvert séparé de X . Soit p l'application quotient de X vers X/G et soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des parties c -linéaires par morceaux compactes de X telles que $p|_V$ soit injective et telles que $\bigcup_{g \in G} g(V)$ soit séparé.*

- (A) *Les éléments de $\mathcal{V}$ constituent un G -recouvrement de X .*
- (B) *Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des parties V de X/G telles que $p^{-1}(V)$ soit un domaine de X . Pour tout $V \in \mathcal{D}$, soit $\Lambda_c(V)$ l'ensemble des applications u de V vers $\mathbf{R}_{>0}$ telles que $u \circ p \in \Lambda_c(p^{-1}(V))$. La donnée de $\mathcal{D}$ et de $V \mapsto \Lambda_c(V)$ fait du quotient topologique X/G un espace domanial enrichi, qui est c -linéaire par morceaux et s'identifie via p au quotient catégorique de X par G dans la catégorie des espaces domaniaux enrichis.*

- (C) *La structure d'espace domanial enrichi sur X/G définie ci-dessus est la seule telle que p induise un isomorphisme de V sur un domaine de X/G pour tout $V \in \mathcal{V}$. C'est aussi la seule qui fasse de p un morphisme d'espaces c -linéaires par morceaux.*

Démonstration. — Nous allons commencer par (A). Il suffit de démontrer que X possède un G -recouvrement par des parties c -linéaires par morceaux G -invariantes et satisfaisant elles-mêmes (A). Pour tout $x \in X$ l'orbite Gx est contenue dans un ouvert séparé U , et même dans un ouvert séparé G -invariant (considérer $\bigcap_{g \in G} g(U)$), ce qui permet de se ramener au cas où X est séparé. Tout point x de X possède alors un voisinage c -linéaire par morceaux compact et G -invariant : il suffit en effet de considérer $\bigcup_{g \in V} g(V)$ où V est un voisinage c -linéaire par morceaux compact arbitraire de X . Cela permet de se ramener au cas où X est compact et non vide ; soit d sa dimension. On raisonne par récurrence forte sur d , et l'on suppose donc (A) vraie pour tous les espaces c -linéaires par morceaux compacts de dimension $< d$. Choisissons une partition P de X satisfaisant les conclusions du lemme 3.3.2. Notons P_d (resp. $P_{<d}$) l'ensemble des éléments V de P qui sont de dimension d (resp. $< d$).

Posons $Y = \bigcup_{V \in P_{<d}} V$. Le complémentaire de Y dans X est égal à $\bigcup_{V \in P_d} V$, qui est ouvert d'après nos hypothèses sur P . Par conséquent Y est fermé, et peut donc se récrire $Y = \bigcup_{V \in P_{<d}} \bar{V}$. Or, là encore en vertu de nos hypothèses sur P , l'adhérence $\bar{V}$ est pour tout $V \in P$ une partie c -linéaire par morceaux compacte de X , qui est isomorphe à une c -cellule fermée de dimension $\dim V$. Il s'ensuit que Y est une partie c -linéaire par morceaux compacte de X ; par construction, Y est de dimension $< d$ et est stable sous G . D'après l'hypothèse de récurrence, Y possède un recouvrement fini par des éléments de $\mathcal{V}$. Il suffit dès lors pour conclure de démontrer que pour tout $V \in P_d$, l'adhérence $\bar{V}$ possède un recouvrement fini par des éléments de $\mathcal{V}$.

Fixons $V \in P_d$. Par choix de P , il existe une partie c -linéaire par morceaux compacte V' de X contenant V et un isomorphisme f de V' sur un c -polytope compact de $\mathbf{R}_{>0}^n$ (pour un certain n), tel que $f(V)$ soit une c -cellule ouverte C . Le bord ∂V de V dans X est alors égal à $f^{-1}(\partial C)$ et est en conséquence une partie c -linéaire par morceaux compacte de Y ; il existe donc un recouvrement fini (W_i) de ∂V par des éléments de $\mathcal{V}$. Posons $D_i = f(W_i)$ pour tout i .

Toujours d'après les propriétés satisfaites par la partition P , si g est un élément de G alors ou bien $g(V) \cap V = \emptyset$, ou bien $g(v) = v$ pour tout $v \in V$. Par conséquent, $p|_V$ est injectif. Et puisque ∂V est contenu dans Y qui est stable sous G , on ne peut avoir $p(w) = p(v)$ pour un couple $(v, w) \in V \times \partial V$. Il suffit donc pour conclure d'exhiber un recouvrement fini (V_j) de V par des parties c -linéaires par morceaux compactes telles que pour tout j l'on ait $V_j \cap \partial V \subset W_{i(j)}$ pour un certain entier $i(j)$. En utilisant f , on voit qu'il suffit d'exhiber un recouvrement fini de $\bar{C}$ par des c -cellules compactes C_j telles que pour tout j l'on ait $C_j \cap \partial C \subset D_{i(j)}$ pour un certain entier $i(j)$. Pour ce faire, on peut raffiner (D_j) et donc supposer que (D_j) est une décomposition c -cellulaire de ∂C , puis ne conserver que les D_j de dimension $d-1$ (qui recouvrent ∂C). Pour toute paire $\{a, b\}$ d'indices distincts on choisit une forme c -affine φ_{ab} tel que l'hyperplan d'équation $\varphi = 1$ sépare D_a et D_b , et ne contienne aucune de ces deux c -cellules. Soit $\mathcal{C}$ la décomposition c -cellulaire de $\mathbf{R}_{>0}^n$ définie par la famille $(\varphi_{ab})_{a,b}$

et soit $\mathcal{C}'$ l'ensemble des parties de la forme $P \cap C$ avec $P \in \mathcal{C}$. Par construction $C = \bigcup_{Q \in \mathcal{C}'} Q$, et pour tout $Q \in \mathcal{C}'$ il existe j tel que $Q \cap \partial C \subset D_j$, ce qui achève la démonstration de (A).

Montrons maintenant (B). On a vu au début de la preuve de (A) que tout point de X possède un voisinage ouvert G -invariant, et, au sein de ce voisinage, un second voisinage c -linéaire par morceaux compact lui aussi G -invariant. Il s'ensuit aussitôt que $\mathcal{D}$ fait de l'espace topologique quotient X/G un espace domanial, et il est immédiat que $V \mapsto \Lambda_v(V)$ est un faisceau pour la G -topologie sur X/G ; par conséquent, $(X/G, \mathcal{D}, \Lambda_c)$ est un espace domanial enrichi, et il résulte des définitions que $p: X \rightarrow X/G$ est un morphisme G -invariant d'espaces domaniaux enrichis. Si φ est un morphisme G -invariant de X vers un espace domanial enrichi Z , il se factorise de manière unique par une application continue de X/G vers Z , qui est un morphisme d'espaces domaniaux enrichis par définition de la structure domaniale enrichie sur X/G . Par conséquent p fait bien de X/G le quotient catégorique de X par G dans la catégorie des espaces domaniaux enrichis.

Soit V appartenant à $\mathcal{V}$. L'image réciproque $p^{-1}(p(V)) = \bigcup_{g \in G} g(V)$ est alors une partie c -linéaire par morceaux de X , si bien que $p(V)$ est un domaine compact de X/G ; puisque $p|_V$ est injective et que V est compact, p induit un homéomorphisme de V sur $p(V)$. Soit E une partie de $p(V)$. Pour que E soit un domaine de $p(V)$ (c'est-à-dire de X/G), il faut et il suffit que $p^{-1}(E) \cap V$ soit un domaine de V . Cette condition est en effet clairement nécessaire. Vérifions qu'elle est suffisante. Supposons donc que $p^{-1}(E) \cap V$ est un domaine de V . Il possède alors un G -recouvrement par des domaines compacts E_i de V . Comme p induit un homéomorphisme de V sur $p(V)$, les $p(E_i)$ forment un G -recouvrement de $p(E)$. De plus on a pour tout i l'égalité $p^{-1}(p(E_i)) = \bigcup_g g(E_i)$, si bien que $p^{-1}(p(E_i))$ est un domaine compact de X . En conséquence chacun des $p(E_i)$ est un domaine compact de X/G , et $p(E)$ est en conséquence lui-même un domaine compact de X/G .

Soit E un domaine de $p(V)$ et soit u une application de E vers $\mathbf{R}_{>0}$. Posons $F = p^{-1}(E) \cap V$ et $v = u \circ p|_F$. L'application u appartient à $\Lambda_c(E)$ si et seulement si v appartient à $\Lambda_c(F)$. C'est en effet clairement nécessaire. Supposons maintenant que v appartient à $\Lambda_c(F)$ et montrons que $u \in \Lambda_c(E)$. On peut raisonner G -localement sur E , donc le supposer compact. Dans ce cas $p^{-1}(E)$ est G -recouvert par les domaines $\bigcup_{g \in G} g(F)$, et pour tout g la restriction de $u \circ p$ à $g(F)$ est égale à $v \circ g^{-1}$, et appartient donc à $\Lambda_c(g(F))$. Il s'ensuit que $u \circ p$ appartient à $\Lambda_c(p^{-1}(E))$, et donc que $u \in \Lambda_c(E)$.

Par conséquent, p induit un isomorphisme d'espaces domaniaux enrichis de V sur $p(V)$; en particulier, $p(V)$ est un espace c -linéaire par morceaux.

Enfin comme tout point de X possède, comme on l'a vu au début de la preuve de (A), un voisinage c -linéaire par morceaux compact et G -invariant qui est une union finie d'éléments de $\mathcal{V}$, les domaines de X/G de la forme $p(V)$ avec $V \in \mathcal{V}$ constituent un G -recouvrement de X/G . Par conséquent ce dernier est c -linéaire par morceaux, ce qui achève de montrer (B); et sa structure domaniale enrichie est entièrement déterminée par celle des $p(V)$ pour $V \in \mathcal{V}$, ce qui montre la première assertion de (C); la seconde en découle au vu de l'assertion (2) du lemme 3.2.11. $\square$

4. Géométrie analytique : généralités

Comme en 2.4, nous désignons par k un corps ultramétrique complet et par Γ un sous-groupe de $\mathbf{R}_{>0}$ tel que $\Gamma \cdot |k^\times| \neq \{1\}$; nous utiliserons les conventions de 2 en matière d'algèbre commutative graduée.

4.1. Rappels et conventions. — Nous travaillerons avec la théorie des espaces k -analytiques *au sens de Berkovich*, et plus précisément de l'article [Ber93].

4.1.1. — Nous utiliserons librement dans ce contexte la théorie de la dimension (voir [Duc07]), celle des composantes irréductibles ([Duc09], section 4), tout ce qui a trait aux propriétés usuelles d'algèbre commutative ([Duc09], section 3 et [Duc18], chapitre 2), et la théorie de la platitude ([Duc18], notamment le chapitre 4).

Si X est un espace k -analytique et si x est un point de X , le corps résiduel complété de x sera noté $\mathcal{H}(x)$, et $\widehat{\mathcal{H}(x)}$ désignera son corps résiduel (qui est $\mathbf{R}_{>0}$ -gradué). Pour tout morphisme $f: Y \rightarrow X$ entre espaces k -analytiques, la fibre de f en x pourra être notée $f^{-1}(x)$ aussi bien que Y_x ; c'est un espace $\mathcal{H}(x)$ -analytique. La dimension locale $\dim_y Y_x$ sera également notée $\dim_y f$ et appelée dimension de f en y , ou dimension relative de Y sur X en y .

Nous noterons $d_k(x)$ le degré de transcendance de $\widehat{\mathcal{H}(x)}$ sur $\tilde{k}$, qui peut également se décrire en termes plus classiques comme la somme du degré de transcendance résiduel (au sens usuel) de $\mathcal{H}(x)$ sur k et du rang rationnel de $|\mathcal{H}(x)^\times|/|k^\times|$. L'intérêt de cet invariant est l'égalité $\dim X = \sup_{x \in X} d_k(x)$.

4.1.2. — Nous nous servirons également de la notion d'espace k -analytique Γ -strict introduite au chapitre 3 de [Duc18]. Informellement, un espace est Γ -strict s'il admet une description dont tous les paramètres réels appartiennent à Γ . Ainsi tout espace k -analytique est $\mathbf{R}_{>0}$ -strict, et si la valuation de k n'est pas triviale, un espace k -analytique est $\{1\}$ -strict si et seulement s'il est strict. (La condition que $|k^\times| \cdot \Gamma \neq \{1\}$ sert à garantir que tout point d'un espace k -affinoïde Γ -strict a une base de voisinages affinoïdes Γ -stricts).

4.1.3. — Nous utiliserons librement la variante Γ -graduée de la théorie des réductions de germes d'espaces analytiques due à Temkin lorsque $\Gamma = \mathbf{R}_{>0}$ ([Tem04] et [Duc18], chapitre 3). Indiquons simplement ici que si (X, x) est un germe d'espace k -analytique Γ -strict et séparé, sa réduction $\widehat{(X, x)}^\Gamma$ est un ouvert quasi-compact et non vide de $\mathbf{P}^{\widehat{\mathcal{H}(x)}^\Gamma / \tilde{k}^\Gamma}$ (rappelons que cette dernière notation désigne l'espace des valuations sur $\widehat{\mathcal{H}(x)}^\Gamma$ qui sont triviales sur $\tilde{k}^\Gamma$).

4.2. La structure d'anneau local sur un espace Γ -strict. —

4.2.1. — Si X est un espace affinoïde Γ -strict nous dirons qu'un domaine affinoïde V de X est Γ -rationnel si V peut être défini par une condition de la forme

$$|f_1| \leq \lambda_1 |g| \text{ et } \dots \text{ et } |f_n| \leq \lambda_n |g|$$

où g et les f_i sont des fonctions analytiques sur X sans zéro commun sur X et où les λ_i sont des éléments de Γ .

Supposons que ce soit le cas. Le fait que les f_i et g ne s'annulent pas simultanément sur X assure que $g|_V$ est inversible. Mais cela entraîne aussi, par compacité de X , que si ε est un élément suffisamment petit de $\mathbf{R}_{>0}$ l'ensemble des points x de X tels que $|g(x)| \leq \varepsilon$ et $|f_i(x)| \leq \varepsilon$ pour tout i est vide. Il en résulte que si l'on se donne une fonction analytique g' sur X suffisamment proche de g et, pour tout i , une fonction analytique f'_i sur X suffisamment proche de f_i , les f'_i et g' n'ont pas de zéro commun sur X et le domaine affinoïde Γ -rationnel défini par la condition

$$|f'_1| \leq \lambda_1 |g'| \text{ et } \dots \text{ et } |f'_n| \leq \lambda_n |g'|$$

coïncide avec V .

4.2.2. — Nous utiliserons à plusieurs reprises la version Γ -stricte du théorème de Gerritzen-Grauert : si X est un espace k -affinoïde Γ -strict, tout domaine affinoïde Γ -strict de X est une union finie de domaines Γ -rationnels. À l'aide de ce résultat on démontre que si X est un espace k -analytique Γ -strict et compact et si Y est un sous-espace analytique fermé de X , tout domaine analytique Γ -strict et compact de Y est de la forme $V \cap Y$ pour un certain domaine analytique Γ -strict et compact V de X . (Sur tous ces points on pourra par exemple consulter [Duc21a], 1.18, lemme 1.19 et remarque 1.20).

4.2.3. — Soit X un espace k -analytique Γ -strict. On définit le site X_G^Γ comme suit :

- ◊ ses objets sont les domaines analytiques Γ -stricts de X , et ses flèches les inclusions ;
- ◊ ses familles couvrantes sont les G -recouvrements.

Ce site raffine le site topologique de X : tout ouvert de X en est un domaine analytique Γ -strict, et tout recouvrement ouvert d'un ouvert de X en est un G -recouvrement.

4.2.4. Invariance radicielle de la G -topologie. — Supposons le corps k de caractéristique $p > 0$, soit X un espace k -analytique Γ -strict et soit F une extension complète de k dans laquelle la fermeture radicielle de k est dense. Soit π la flèche $X_F \rightarrow X$. On sait que le morphisme π induit un homéomorphisme entre les espaces topologiques sous-jacents à X_F et X , et on a un résultat analogue relatif aux G -topologies Γ -strictes. Plus précisément, soit V une partie de X_F . Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

- (i) V est un domaine analytique Γ -strict de X_F ;
- (ii) $\pi(V)$ est un domaine analytique Γ -strict de X .

En effet, l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) provient de l'égalité $V = \pi^{-1}(\pi(V))$, due à l'injectivité de π . Supposons maintenant que (i) soit vérifiée, et montrons (ii). L'assertion est locale sur X_G^Γ , ce qui permet de supposer X affinoïde ; posons $A = \mathcal{O}_X(X)$. Notre assertion est également locale sur V_G^Γ puisque l'homéomorphisme π préserve les G -recouvrements. Par conséquent on peut supposer que V est affinoïde et même, en vertu du théorème de Gerritzen-Grauert (4.2.2) que c'est un domaine Γ -rationnel de X_F . Choisissons une description de V par une conjonction d'inégalités

$$|f_1| \leq \lambda_1 |g| \text{ et } \dots \text{ et } |f_n| \leq \lambda_n |g|$$

où g et les f_i sont des fonctions analytiques sur X_F sans zéro commun sur X_F et où les λ_i sont des éléments de Γ . Comme on peut perturber légèrement g et les f_i sans que cela change le domaine V décrit par les inégalités ci-dessus (4.2.1), on peut supposer par notre hypothèse sur F qu'ils appartiennent tous à $\mathcal{A} \hat{\otimes}_k k^{1/p^m}$ pour un certain m puis, en les remplaçant tous, ainsi que les λ_i , par leur puissance p^m -ième, qu'ils appartiennent à A . Mais $\pi(V)$ est alors le domaine Γ -rationnel de X défini par la «même» conjonction d'inégalités que V .

4.2.5. Structure domaniale sur un espace analytique. — Soit X un espace k -analytique Γ -strict. L'ensemble des domaines analytiques Γ -stricts de X munit l'espace topologique sous-jacent à X d'une structure domaniale, dite Γ -strictement analytique (ou éventuellement analytique si $\Gamma = \mathbf{R}_{>0}$). Le site domanial correspondant est celui que nous avons noté X_G^Γ .

On dispose ainsi d'un foncteur de la catégorie des espaces analytiques Γ -stricts vers celle des espaces domaniaux.

Si Y est un sous-espace analytique fermé de X , la structure domaniale sur Y induite par la structure domaniale Γ -strictement analytique de X coïncide en vertu de 4.2.2 avec la structure domaniale Γ -strictement analytique de Y .

Supposons k de caractéristique $p > 0$ et soit F une extension complète de k dans laquelle la fermeture radicielle de k est dense. Il résulte de 4.2.4 que π induit un isomorphisme d'espaces domaniaux entre X_F et X , lorsque ceux-ci sont munis de leurs structures domaniales Γ -strictement analytiques.

4.2.6. Structure domaniale enrichie sur un espace analytique. — Soit X un espace k -analytique Γ -strict. On dispose sur ce dernier d'une structure d'espace domanial, décrite à l'exemple 4.2.5. On en fait un espace domanial enrichi en le munissant du faisceau $(\Gamma \cdot |\mathcal{O}_X^\times|)^{\mathbf{Q}}$ (c'est-à-dire de la faisceautisation sur le site X_G^Γ du préfaisceau $V \mapsto (\Gamma \cdot |\mathcal{O}_X^\times(V)|)^{\mathbf{Q}}$). Nous dirons que la structure domaniale enrichie correspondante est la structure domaniale enrichie Γ -strictement k -analytique.

On dispose ainsi d'un foncteur de la catégorie des espaces analytiques Γ -stricts vers celle des espaces domaniaux enrichis.

Si Y est un sous-espace analytique fermé de X , sa structure domaniale enrichie Γ -strictement k -analytique coïncide avec la structure domaniale enrichie héritée de celle X : c'est une conséquence de l'assertion analogue pour les structures domaniales (non enrichies) et du fait que si V est un domaine affinoïde Γ -strict de X , toute fonction analytique f sur $Y \cap V$ se relève en une fonction analytique sur V , inversible au voisinage de $Y \cap V$ lorsque f est inversible.

4.2.7. Invariance par extension radicielle. — Supposons k de caractéristique $p > 0$, soit X un espace k -analytique Γ -strict et soit F une extension complète de k dans laquelle la clôture radicielle de k est dense. Soit π le morphisme canonique $X_F \rightarrow X$. Nous avons vu que π induit un isomorphisme entre les espaces domaniaux X_F et X . Mais c'est en fait même un isomorphisme d'espaces domaniaux enrichis (les structures en jeu étant bien entendu les structures Γ -strictement analytiques). Pour le voir, il suffit en effet de vérifier que si V est un domaine affinoïde Γ -strict de X et si f est une fonction analytique inversible sur V_F , alors $|f| = \lambda \circ \pi$ pour une certaine

section λ de $(\Gamma \cdot |\mathcal{O}_X^\times|)^{\mathbf{Q}}$. Or comme $|f|$ ne change pas par petite perturbation de la fonction inversible f , on peut supposer que celle-ci appartient à $\mathcal{O}_X(V) \hat{\otimes}_k k^{1/p^n}$ pour un certain n . Mais f^{p^n} appartient dans ce cas à $\mathcal{O}_X(V)$, et l'assertion souhaitée est alors évidente.

4.3. Squelettes d'un espace analytique. — Nous allons utiliser systématiquement la géométrie c -linéaire par morceaux développée ci-dessus à la sous-section 3.2, mais en fixant désormais la valeur de c qui sera pour toute la suite égale à $(\mathbf{Q}, (|k^\times| \cdot \Gamma)^{\mathbf{Q}})$.

4.3.1. — Si X est un espace k -analytique Γ -strict, il possède une structure naturelle d'espace domanial enrichi (4.2.6).

Si Σ est une partie localement fermée de X , elle hérite donc d'une structure domaniale enrichie (3.1.8). Concrètement, un domaine de Σ en est un sous-ensemble G -recouvert par des parties de la forme $V \cap \Sigma$ où V est un domaine analytique Γ -strict de X , et le faisceau structural de Σ est le sous-faisceau domanial de $\mathcal{C}^0(\cdot, \mathbf{R}_{>0})$ engendré par les $r \cdot |f|_{\Sigma \cap V}^q : \Sigma \cap V \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ où V est un domaine analytique Γ -strict de X , où f une fonction analytique inversible sur V , où r est un élément de $\Gamma^{\mathbf{Q}}$ et q un rationnel.

4.3.2. Définition. — Soit X un espace k -analytique Γ -strict et soit Σ une partie localement fermée de X . On dit que Σ est un c -squelette de X si sa structure d'espace domanial enrichi décrite en 4.3.1 en fait un espace c -linéaire par morceaux.

4.3.3. — Soit X un espace k -analytique Γ -strict et soit Σ une partie localement fermée de X .

Si Σ est un c -squelette de X , une partie localement fermée T de Σ est un c -squelette de X si et seulement si c'est une partie c -linéaire par morceaux de Σ : cela résulte du lemme 3.2.10.

4.3.3.1. — Si Y est un sous-espace analytique fermé de X contenant Σ , alors Σ est un c -squelette de X si et seulement si c'est un c -squelette de Y : cela résulte du fait que la formation de la structure domaniale enrichie Γ -strictement k -analytique est compatible aux immersions fermées, comme expliqué à la fin de l'exemple 4.2.6.

4.3.3.2. — Supposons que Σ soit un c -squelette et soit $x \in \Sigma$. Soit d la dimension de Σ en x . Il existe alors un domaine analytique Γ -strict et compact V de X contenant x et une famille finie de fonctions inversibles $(f_1, \dots, f_n)$ sur V telles que le n -uplet $|f| := (|f_1|, \dots, |f_n|)$ induise un isomorphisme $(\Sigma \cap V) \simeq P$ où P est un c -polytope compact de $\mathbf{R}_{>0}^n$ de dimension d en $|f|(x)$. Soit W un voisinage analytique Γ -strict compact de x dans V . L'image $|f|(W)$ est un c -polytope compact de $\mathbf{R}_{>0}^n$ ([Duc12], théorème 1.2), qui contient le voisinage $|f|(W \cap \Sigma)$ de $|f|(x)$ dans P . Il est donc de dimension $\geq d$. Ceci valant pour tout W , il résulte du théorème 3.4 de [Duc12] que $d_k(x) \geq d$.

4.3.4. Fonctorialité des c -squelettes. — Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme d'espaces k -analytiques, soit T un c -squelette de Y et soit Σ un c -squelette de X tel que $f(T)$ soit contenue dans Σ . Par propriété universelle de la structure domaniale enrichie induite,

l'application $T \rightarrow \Sigma$ induite par f est un morphisme d'espaces domaniaux enrichis, c'est-à-dire ici une application c -linéaire par morceaux.

4.3.5. — La définition de c -squelette que nous venons de donner est étroitement apparentée à celle de [Duc12], sans lui être équivalente. La différence de fond est que nous exigeons dans [Duc12] que tout point x d'un c -squelette de X soit d'Abhyankar de rang maximal, c'est-à-dire satisfasse l'égalité $d_k(x) = \dim_x X$. Nous ne demandons rien de tel ici, et ce relâchement est crucial pour pouvoir espérer des résultats de stabilité par image directe un tant soit peu généraux (penser déjà au cas d'une immersion fermée, en l'occurrence traité plus haut en 4.3.3.1).

Nous allons maintenant donner un critère qui nous sera très utile en pratique pour montrer qu'une partie d'un espace k -analytique Γ -strict en est un c -squelette.

4.3.6. Lemme. — *Soit X un espace k -analytique Γ -strict et soit Σ une partie localement fermée de X . Notons $\mathcal{O}_X(\Sigma)$ la colimite des $\mathcal{O}_X(V)$ où V parcourt l'ensemble des domaines analytiques Γ -stricts de X contenant Σ . Supposons qu'il existe un sous-ensemble E de $\mathcal{O}_X(\Sigma)^\times$ et une famille finie $(f_1, \dots, f_n)$ d'éléments de E satisfaisant les propriétés suivantes :*

(A) *pour toute famille finie $(g_1, \dots, g_s)$ d'éléments de E , la famille*

$$(|f_1|, \dots, |f_n|, |g_1|, \dots, |g_s|)$$

induit un homéomorphisme de Σ sur une partie c -linéaire par morceaux de $\mathbf{R}_{>0}^{n+s}$;

(B) *pour tout $x \in \Sigma$, le sous-groupe de $\mathcal{H}(x)^\times$ engendré par les $h(x)$ pour $h \in E$ est dense.*

Le sous-ensemble Σ de X est alors un c -squelette.

Démonstration. — L'hypothèse (A) assure en particulier que $|f| := (|f_1|, \dots, |f_n|)$ induit un homéomorphisme de Σ sur une partie c -linéaire par morceaux P de $\mathbf{R}_{>0}^m$. On munit Σ de sa structure d'espace c -linéaire par morceaux $\mathbf{L}$ déduite de celle de P via $|f|$, et nous allons montrer que cette structure coïncide avec sa structure domaniale enrichie $\mathbf{D}$.

4.3.6.1. Identité des structures domaniales. — Soit T une partie de Σ .

Supposons que T est c -linéaire par morceaux au sens de $\mathbf{L}$; nous allons montrer que c'est un domaine au sens de $\mathbf{D}$. Par définition, T s'écrit $|f|_{|\Sigma}^{-1}(Q)$ pour une certaine partie Q de P qui est c -linéaire par morceaux, ce qui veut dire que Q est une union localement finie de c -polytopes ; comme une union localement finie de domaines fermés au sens de $\mathbf{D}$ est un domaine au sens de $\mathbf{D}$, on peut supposer que Q est un c -polytope. Mais alors $T = |f|_{|\Sigma}^{-1}(P)$ est décrit en tant que sous-ensemble de Σ par une combinaison booléenne finie d'inégalités de la forme $a \prod |f_i|_{|\Sigma}^{r_i} \leq 1$, où $a \in (\Gamma \cdot |k^\times|)^{\mathbf{Q}}$ et où les r_i sont rationnels. C'est donc l'intersection de Σ avec un domaine analytique Γ -strict de X , et c'est dès lors un domaine au sens de $\mathbf{D}$.

Réciproquement, supposons que T est un domaine au sens de $\mathbf{D}$, nous allons montrer que T est c -linéaire par morceaux au sens de $\mathbf{L}$. Cette assertion étant G -locale sur T , on peut supposer que $T = V \cap \Sigma$ pour un certain domaine affinoïde Γ -strict

V de X , et il suffit de s'assurer que pour tout $x \in T$ il existe un voisinage ouvert U de x dans Σ tel que $U \cap T$ soit c -linéaire par morceaux relativement à L . Soit donc $x \in T$. Le point x appartient alors à V . Comme ce dernier est affinoïde et Γ -strict, sa réduction à la Temkin est de la forme $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)/\tilde{k}}} \{a_1, \dots, a_m\}$; en relevant les a_i dans $\mathcal{H}(x)$ puis en utilisant (B), on en déduit l'existence d'éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ de $\langle E \rangle$, tous définis sur un même domaine analytique Γ -strict W contenant Σ , et d'un voisinage ouvert Ω de x dans W tel que $V \cap \Omega$ soit défini comme le lieu de validité sur Ω d'une conjonction d'inégalités de la forme $|\alpha|_i \leq r_i$, où chaque r_i appartient à Γ . Posons $U = \Omega \cap \Sigma$. C'est un voisinage ouvert de x dans Σ , et $T \cap U$ est défini comme sous-ensemble de U par la conjonction des inégalités $|\alpha_i|_U \leq r_i$. Il suffit pour conclure de s'assurer que pour tout i , la fonction $|\alpha_i|_\Sigma$ est c -linéaire par morceaux au sens de L . Comme α_i appartient à $\langle E \rangle$, il suffit finalement de démontrer que $|g|_\Sigma$ est c -linéaire par morceaux au sens de L pour toute $g \in E$. Mais c'est une conséquence immédiate de l'hypothèse (A).

4.3.6.2. Identité des faisceaux structuraux. — Soit T un domaine de Σ (pour l'une ou l'autre des structures L et D , par ce qui précède leurs domaines sont les mêmes). Soit λ une application continue de T vers $\mathbf{R}_{>0}$.

Supposons que λ est une section du faisceau structural relatif à D . Montrons que λ est c -linéaire par morceaux relativement à L . L'assertion étant G -locale, on peut supposer que T est égal $V \cap \Sigma$ pour un certain domaine analytique Γ -strict V de X , et que $\lambda = r \cdot |g|_\Sigma^q$ pour une certaine fonction analytique inversible g sur V , un certain $r \in \Gamma^{\mathbf{Q}}$ et un certain $q \in \mathbf{Q}$. En raisonnant localement et en utilisant l'hypothèse (B) on peut de surcroît supposer que g appartient à $\langle E \rangle$, puis à E . Mais il résulte alors de (A) que $|g|_\Sigma$ est c -linéaire par morceaux au sens de L , et il en va de même de $r \cdot |g|_\Sigma^q$.

Soit $\mu: T \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ une section c -linéaire par morceaux relativement à L . Montrons que μ est une section du faisceau structural relatif à D . L'assertion étant G -locale sur T , on peut supposer que μ est de la forme $a \cdot |f_1|_T^{r_1} \cdots |f_n|_T^{r_n}$ où $a \in (\Gamma \cdot |k^\times|)^{\mathbf{Q}}$ et où les r_i sont rationnels. Et μ est alors par définition une section du faisceau structural relatif à D . $\square$

5. Exemples de squelettes

Nous allons maintenant présenter quelques exemples fondamentaux de c -squelettes, qui avaient déjà été étudiés par le premier auteur dans [Duc12]. Le théorème 5.1.3 ci-dessous, dont la preuve occupe la plus grande partie de cette section, est essentiellement le théorème 5.1 de *loc. cit.*. Nous avons choisi d'en redonner une démonstration adaptée aux définitions et conventions du présent article, avec de surcroît une simplification : en fin de preuve, nous substituons à un calcul un peu ingrat et *ad hoc* de [Duc12] (voir 5.6 et le lemme 5.7 de *loc. cit.*) l'utilisation d'une variante graduée d'un «lemme de normalisation de Noether torique» de Maclagan et Sturmfels ; cette simplification est elle-même tirée du travail en révision [CLD12] d'Antoine Chambert-Loir et du premier auteur.

5.1. Images réciproques du squelette standard de $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$: les énoncés. —

5.1.1. Le c -squelette standard de $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$. — Soit n un entier. Nous désignerons par $S_{n,k}$ le sous-ensemble de $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$ égal à $\{\eta_r\}_{r \in \mathbf{R}_{>0}^n}$, où η_r désigne la (semi)-norme

$$\sum a_I T^I \mapsto \max |a_I| r^I$$

(en notation multi-indicielle). En tant qu'image de la section continue $r \mapsto \eta_r$ de $|T| : (\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n \rightarrow \mathbf{R}_{>0}^n$, le sous-ensemble S_n de $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$ en est une partie fermée. Il est immédiat que les hypothèses (A) et (B) du lemme 4.3.6 sont satisfaites lorsqu'on prend $X = (\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$, $\Sigma = S_{n,k}$, $E = k[T] \setminus \{0\}$ et $f_i = T_i$ pour tout i ; par conséquent, $S_{n,k}$ est un c -squelette.

5.1.2. — Soit L une extension complète de k . Il est immédiat que la flèche naturelle $(\mathbf{G}_{m,L}^{\text{an}})^n \rightarrow (\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$ induit un homéomorphisme $S_{n,L} \simeq S_{n,k}$. Par ailleurs, il résulte de la définition qu'un point x de X appartient à $S_{n,k}$ si et seulement si les $T_i(x)$ sont tous non nuls, et si les $\widetilde{T_i(x)}$ forment une famille d'éléments de $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ algébriquement indépendants sur $\tilde{k}$. Il s'ensuit que si $\tilde{L}$ est algébrique sur $\tilde{k}$ (c'est par exemple le cas dès que la fermeture algébrique de k est dense dans L) alors $S_{n,L}$ est l'image réciproque de $S_{n,k}$ sur $(\mathbf{G}_{m,L}^{\text{an}})^n$.

5.1.3. Théorème ([Duc12], th. 5.1). — Soit n un entier, soit X un espace k -analytique de dimension au plus n et soient $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ des morphismes de X vers $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$. Pour toute extension complète L de k , on pose $\Sigma_L = \bigcup_i \varphi_i^{-1}(S_{n,L})$ et l'on note c_L le couple $(\mathbf{Q}, (\Gamma \cdot |L^\times|)^{\mathbf{Q}})$ (on a donc $c_k = c$).

- (1) Le fermé Σ_k de X en est un c -squelette.
- (2) On a $\dim_x \Sigma_k = n$ en tout point x appartenant à $\Sigma_k \setminus \partial X$.
- (3) Pour tout i , l'application du c -squelette $\varphi_i^{-1}(S_{n,k})$ vers $S_{n,k}$ induite par φ est c -linéaire par morceaux et à fibres discrètes.
- (4) Pour toute extension complète L de k l'application naturelle de Σ_L vers Σ_k est c_L -linéaire par morceaux, surjective, propre, ouverte et à fibres finies.
- (5) Si X est compact il existe une extension finie séparable F de k telle que l'application naturelle de Σ_L vers Σ_F soit un isomorphisme c_L -linéaire par morceaux pour toute extension complète L de F .

5.2. Preuve du théorème 5.1.3 dans le cas où $m = 1$. — On suppose que $m = 1$ et l'on écrit φ au lieu de φ_1 . L'étude de ce cas particulier est en fait le cœur de la preuve, et comprend un nombre important d'étapes.

5.2.1. — Nous allons tout d'abord expliquer comment nous réduire au cas d'un corps de base parfait. Il n'y a rien à faire si k est de caractéristique nulle. Supposons maintenant qu'il est de caractéristique $p > 0$ et que le théorème a été démontré sur un corps parfait. Il est alors en particulier vrai pour la perfection complétée $\widehat{k^{1/p^\infty}}$ de k .

Le squelette $S_{n, \widehat{k^{1/p^\infty}}}$ est l'image réciproque de $S_{n,k}$ sur $(\mathbf{G}_{m, \widehat{k^{1/p^\infty}}}^{\text{an}})^n$, si bien que $\Sigma_{\widehat{k^{1/p^\infty}}}$ est l'image réciproque de Σ_k sur $X_{\widehat{k^{1/p^\infty}}}$. Il s'ensuit en vertu de 4.2.7 que

$S_{n, \widehat{k^{1/p^\infty}}} \rightarrow S_{n,k}$ et $\Sigma_{\widehat{k^{1/p^\infty}}} \rightarrow \Sigma_k$ sont des isomorphismes d'espaces domaniaux enrichis. Puisque $\Sigma_{\widehat{k^{1/p^\infty}}}$ est par hypothèse un espace c -linéaire par morceaux, on en déduit que Σ_k est c -linéaire par morceaux : c'est donc un c -squelette, isomorphe à $\Sigma_{\widehat{k^{1/p^\infty}}}$ (nous ferons dans la suite de la preuve référence à ce fait en parlant d'*invariance radicielle*). Et si x est un point de $\Sigma_k \setminus \partial X$, son unique antécédent x' sur $X_{\widehat{k^{1/p^\infty}}}$ est situé sur $\Sigma_{\widehat{k^{1/p^\infty}}} \setminus \partial X_{\widehat{k^{1/p^\infty}}}$, et $\Sigma_{\widehat{k^{1/p^\infty}}}$ est par hypothèse de dimension n en x' ; par conséquent, Σ_k est de dimension n en x .

On dispose d'un diagramme commutatif mettant en jeu quatre espaces c -linéaires par morceaux,

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{\widehat{k^{1/p^\infty}}} & \longrightarrow & S_{n, \widehat{k^{1/p^\infty}}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma_k & \longrightarrow & S_{n,k} \end{array},$$

dans lequel les deux flèches verticales sont des isomorphismes c -linéaires par morceaux, et dont la flèche horizontale du haut est c -linéaire par morceaux à fibres discrètes, puisque le théorème vaut sur $\widehat{k^{1/p^\infty}}$; il s'ensuit que $\Sigma_k \rightarrow S_{n,k}$ est c -linéaire par morceaux à fibres discrètes.

Soit L une extension complète de k . Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{\widehat{L^{1/p^\infty}}} & \longrightarrow & \Sigma_{\widehat{k^{1/p^\infty}}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma_L & \longrightarrow & \Sigma_k \end{array}$$

met en jeu quatre espaces c_L -linéaires par morceaux (concernant la colonne de droites, on a procédé à une extension des paramètres de définition, cf. 3.2.9), ses deux flèches verticales sont des isomorphismes par invariance radicielle, et sa flèche horizontale du haut est c_L -linéaire par morceaux à fibres finies puisque le théorème vaut sur $\widehat{k^{1/p^\infty}}$. Par conséquent, la flèche horizontale du bas est elle aussi c_L -linéaire par morceaux à fibres finies.

Enfin, supposons que X est compact. Comme le théorème vaut sur $\widehat{k^{1/p^\infty}}$, il existe une extension finie séparable E de $\widehat{k^{1/p^\infty}}$ pour laquelle l'énoncé (5) est satisfait. Le lemme de Krasner assure l'existence d'une extension finie séparable F de k telle que $E \simeq \widehat{F^{1/p^\infty}}$. Soit L une extension complète de F . Dans la catégorie des espaces c_L -linéaires par morceaux on dispose du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{\widehat{L^{1/p^\infty}}} & \longrightarrow & \Sigma_E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma_L & \longrightarrow & \Sigma_F \end{array},$$

dans laquelle les flèches verticales sont des isomorphismes par invariance radicielle, et dans laquelle la flèche horizontale du haut en est un par choix de E . La flèche horizontale du bas est donc également un isomorphisme.

La validité du théorème sur le corps $\widehat{k^{1/p^\infty}}$ entraîne donc sa validité sur k . Il est par conséquent licite de supposer k parfait, ce que nous ferons désormais.

5.2.2. — Les assertions (1), (2), (3) et (4) étant locales sur X , on peut le supposer compact (et il n'y a donc plus lieu de spécifier cette hypothèse dans (5)). Soit $x \in X$. Il suffit de démontrer que (1), (3), (4) et (5) valent sur un voisinage analytique compact et Γ -strict de X , et que $\dim_x \Sigma_k = n$ si $x \in \Sigma_k \cap \partial X$. Si $x \notin \Sigma_k$ on peut supposer quitte à restreindre X que Σ_k est vide, auquel cas il n'y a rien à démontrer. On suppose à partir de maintenant que $x \in \Sigma_k$. Puisque $\varphi(x) \in S_{n,k}$ on a $d_k(x) \geq d_k(\varphi(x)) = n$, et comme $\dim_x X \leq n$ il vient $d_k(x) = n$ et $\dim_x X = n$.

On peut de plus supposer que X est affinoïde. C'est en effet clair pour les assertions (1), (3), (4) et (5) qui sont locales sur X_G^Γ . Et en ce qui concerne la dimension de Σ_k en x lorsque $x \notin \partial X$, on remarque que si $x \notin \partial X$ alors x possède un voisinage affinoïde Γ -strict dans X , par lequel on peut remplacer X .

5.2.3. Algébrisation de la situation. — Si $Y \hookrightarrow X$ est une nilimmersion, le théorème vaut pour X si et seulement s'il vaut pour Y (voir les considérations à la fin de l'exemple 4.2.6; notons que $x \in \partial X$ si et seulement si $x \in \partial Y$). Par conséquent, on peut supposer X réduit.

L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est artinien puisque $d_k(x) = \dim_x X = n$; étant réduit, c'est un corps. Il est en particulier régulier. L'espace X est donc régulier en x , et est dès lors quasi-lisse en x puisque k est parfait. Quitte à restreindre X , on peut donc supposer que c'est un domaine affinoïde de $\mathcal{X}^{\text{an}}$ pour un certain k -schéma $\mathcal{X}$ de type fini, lisse, intègre et de dimension n ([Duc12], 0.21), et ∂X est alors le bord topologique de X dans $\mathcal{X}^{\text{an}}$.

Le morphisme $\varphi: X \rightarrow (\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$ est donné par n fonctions analytiques inversibles $f_1, \dots, f_n$. Si $g_1, \dots, g_n$ sont des fonctions analytiques inversibles sur X telles que $|f_i - g_i| < |f_i|$ identiquement sur X pour tout indice i , alors $\widetilde{g_i(y)} = \widetilde{f_i(y)}$ pour tout $y \in X$ et tout i , et en un point y de X la famille des $\widetilde{g_i(y)}$ est algébriquement indépendante sur $\widetilde{k}$ si et seulement si c'est le cas de celle des $\widetilde{f_i(y)}$. Autrement dit, si ψ désigne le morphisme de X vers $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$ induit par les g_i alors $\psi^{-1}(S_{n,k})$ est égal à Σ_k , si bien qu'on peut remplacer φ par ψ . Par approximation des f_i on peut donc, quitte à restreindre X autour de x , supposer que φ est la restriction à X de l'analytification d'un morphisme de $\mathcal{X}$ vers $\mathbf{G}_{m,k}^n$, encore noté φ , et dont les composantes sont encore notées $f_1, \dots, f_n$. Remarquons que φ est dominant, puisque $\varphi(x) \in S_{n,k}$ par hypothèse.

Pour toute extension complète L de k on notera désormais Σ_L l'image réciproque $\varphi^{-1}(S_{n,L})$ sur $\mathcal{X}_L^{\text{an}}$ tout entier. Nous allons montrer que Σ_k est un c -squelette de $\mathcal{X}^{\text{an}}$ purement de dimension n , que $\Sigma_k \rightarrow S_{n,k}$ est c -linéaire par morceaux à fibres finies, que $\Sigma_L \rightarrow \Sigma_k$ est c_L -linéaire par morceaux, surjective, propre, ouverte et à fibres finies pour toute extension complète L de k , et qu'il existe une extension finie séparable F de k telle que la flèche de changement de base $\Sigma_L \rightarrow \Sigma_F$ soit un isomorphisme pour toute extension complète L de F . Cela permettra de conclure, par intersection avec X (qui n'interviendra désormais plus, non plus que x).

Remarquons que $d_k(y) = n$ pour tout $y \in \Sigma_k$, si bien que tout point de Σ_k est situé au-dessus du point générique de $\mathcal{X}$: on pourra donc dans la suite remplacer $\mathcal{X}$ par n'importe lequel de ses ouverts de Zariski non vides, et toute fonction rationnelle non nulle sur $\mathcal{X}$ appartient ainsi à $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\text{an}}}(\Sigma_k)^\times$.

Si K désigne la fermeture algébrique de k dans $\mathcal{O}(\mathcal{X})$, le morphisme φ se factorise par $\mathbf{G}_{m,K}^n$, et Σ_k peut tout aussi bien se décrire comme $\varphi^{-1}(S_{n,K})$ sur $\mathcal{X}^{\text{an}}$. De plus, pour toute extension complète L de k , le schéma $\mathcal{X}_L$ est une union disjointe finie de schémas de la forme $\mathcal{X} \times_K E$ où E est une extension complète de K . On peut dès lors pour démontrer le théorème remplacer k par K , c'est-à-dire supposer $\mathcal{X}$ géométriquement intègre.

5.2.4. Description détaillée de Σ_k . — Commençons par introduire un peu de vocabulaire. Soit $(h_1, \dots, h_\ell)$ une famille de fonctions rationnelles non nulles sur $\mathcal{X}$. Nous dirons que $(h_1, \dots, h_\ell)$ est Σ_k -fidèle si la restriction de $(|h_1|, \dots, |h_\ell|)$ à Σ_k est injective, et qu'il est *admissible* s'il existe un ouvert de Zariski non vide $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$ tel que $(h_1, \dots, h_\ell)$ induise une immersion fermée de $\mathcal{U}$ dans $\mathbf{G}_{m,k}^{n+\ell}$; dans ce cas $|h| := (|h_1|, \dots, |h_\ell|)$ est une application propre de $\mathcal{U}^{\text{an}}$ vers $\mathbf{R}_{>0}^m$, et sa restriction au fermé Σ_k de $\mathcal{U}^{\text{an}}$ est encore propre.

La famille $(h_1, \dots, h_\ell)$ peut toujours être complétée en une famille admissible. En effet, choisissons un ouvert affine non vide $\mathcal{V}$ de $\mathcal{X}$ tel que les h_i soient définies et inversibles sur $\mathcal{V}$. Choisissons une famille $a_1, \dots, a_r$ de fonctions non nulles engendrant la k -algèbre $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{V})$. Si $\mathcal{U}$ désigne l'ouvert d'inversibilité simultanée des a_i sur $\mathcal{V}$ alors les $a_i^{\pm 1}$ engendrent $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$, et $(h_1, \dots, h_\ell, a_1, \dots, a_r, a_1^{-1}, \dots, a_r^{-1})$ induit par conséquent une immersion fermée de $\mathcal{U}$ dans $\mathbf{G}_{m,k}^{\ell+r}$.

Par ailleurs, il est clair que si $(h_1, \dots, h_\ell)$ est Σ_k -fidèle, alors $(h_1, \dots, h_\ell, h)$ est encore Σ_k -fidèle pour toute fonction rationnelle non nulle h sur $\mathcal{X}$.

L'ingrédient essentiel de notre preuve est le théorème 2.8 (1) de [Duc12] qui assure l'existence d'une famille finie $g_1, \dots, g_\ell$ de fonctions rationnelles non nulles sur $\mathcal{X}$ qui séparent les prolongements à $\kappa(\mathcal{X})$ de toute valuation de Gauß sur son sous-corps $k(f_1, \dots, f_n)$; par construction, $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_\ell)$ est Σ_k -fidèle. Par ce qui précède il est loisible, quitte à agrandir la famille des g_i , de supposer de plus que $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_\ell)$ est admissible.

Soit $(h_1, \dots, h_p)$ une famille finie de fonctions rationnelles non nulles sur $\mathcal{X}$. Nous allons montrer que $(|f_1|, \dots, |f_n|, |g_1|, \dots, |g_\ell|, |h_1|, \dots, |h_p|)$ induit un homéomorphisme entre Σ_k et un c -polytope de $\mathbf{R}_{>0}^{n+\ell+p}$ purement de dimension n : il s'ensuivra en vertu du lemme 4.3.6 que Σ_k est un squelette, purement de dimension n ; La restriction de $(|f_1|, \dots, |f_n|, |g_1|, \dots, |g_\ell|, |h_1|, \dots, |h_p|)$ à Σ_k est injective et propre, puisque c'est déjà le cas pour $(|f_1|, \dots, |f_n|, |g_1|, \dots, |g_\ell|)$. Il suffit donc de montrer que l'image de Σ_k sous $(|f_1|, \dots, |f_n|, |g_1|, \dots, |g_\ell|, |h_1|, \dots, |h_p|)$ est un c -polytope de $\mathbf{R}_{>0}^{n+\ell+p}$. Ce dernier point peut se vérifier après agrandissement de la famille des h_i , ce qui autorise à supposer que $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_\ell, h_1, \dots, h_p)$ est admissible; pour simplifier les notations, on peut alors inclure les h_i dans la famille des g_i . En restreignant $\mathcal{X}$ si besoin, on se ramène au cas où $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_\ell)$ induit une immersion fermée de $\mathcal{X}$ vers $\mathbf{G}_{m,k}^{n+\ell}$. Posons $\tau := (|f_1|, \dots, |f_n|, |g_1|, \dots, |g_\ell|)$. C'est

une application propre de $\mathcal{X}^{\text{an}}$ vers $\mathbf{R}_{>0}^{n+\ell}$, et il reste à montrer que $\tau(\Sigma_k)$ est un c -polytope purement de dimension n .

D'après le théorème 1.2 de [Duc12], il existe un c -polytope P de dimension $\leq n$ de $\mathbf{R}_{>0}^{n+\ell}$ tel que $\tau(\mathcal{X}^{\text{an}}) = P$. Soit $\pi: \mathbf{R}_{>0}^{n+m} \rightarrow \mathbf{R}_{>0}^n$ la projection sur les n premières coordonnées. Soit Q l'ensemble des points z de P tels que l'image de tout voisinage c -polytopal de z dans P par π soit de dimension n . C'est un c -polytope purement de dimension n : si l'on choisit une décomposition cellulaire $\mathcal{C}$ de P , c'est la réunion des cellules $C \in \mathcal{C}$ telles que $\dim C = n$ et $\pi|_C$ soit injectif ; remarquons que $\pi: Q \rightarrow \mathbf{R}_{>0}^n$ est à fibres finies.

Nous allons démontrer que $\tau(\Sigma_k) = Q$. Pour cela, nous allons utiliser la caractérisation suivante de Σ_k , fournie par le théorème 3.4 de [Duc12], en posant $|f| = (f_1, \dots, f_n)$: c'est l'ensemble des points y de $\mathcal{X}^{\text{an}}$ tels que pour tout voisinage analytique Γ -strict compact V de y dans $\mathcal{X}^{\text{an}}$, l'image $|f|(V)$ (qui est un c -polytope de $\mathbf{R}_{>0}^n$ d'après le théorème 1.2 de [Duc12]) soit de dimension n .

Soit $z \in P \setminus Q$. Par définition, il existe un voisinage c -polytopal compact R de z dans P dont la projection sur $\mathbf{R}_{>0}^n$ est de dimension $< n$. L'image réciproque $\tau^{-1}(R)$ est un domaine analytique Γ -strict compact de $\mathcal{X}^{\text{an}}$, dont l'image sous $|f|$ est un c -polytope de dimension $< n$. Par conséquent, l'intérieur topologique de $\tau^{-1}(R)$ dans $\mathcal{X}^{\text{an}}$ ne rencontre pas Σ_k . Il s'ensuit que l'intérieur topologique de R dans P ne rencontre pas $\tau(\Sigma_k)$. En particulier, $z \notin \Sigma_k$ et $\Sigma_k \subset Q$.

Réciproquement, soit $z \in Q$ et soit R un voisinage c -polytopal compact de z dans P . Par définition de Q , l'image de R dans $\mathbf{R}_{>0}^n$ est de dimension n . Par conséquent, $|f|(\tau^{-1}(R))$ est de dimension n . Ceci implique que le domaine analytique compact et Γ -strict $\tau^{-1}(R)$ rencontre Σ_k , et partant que R rencontre $\tau(\Sigma_k)$. Ceci valant pour tout R , le point z est adhérent à $\tau(\Sigma_k)$. Par propriété de $\tau|_{\Sigma_k}$, le point z appartient à $\tau(\Sigma_k)$.

On a donc bien $\tau(\Sigma_k) = Q$, si bien que Σ_k est un c -squelette purement de dimension n , comme annoncé. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_k & \xrightarrow{\tau} & Q \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S_{n,k} & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{R}_{>0}^n \end{array}$$

les flèches horizontales sont des isomorphismes c -linéaires par morceaux, et la projection π est à fibres finies. Il s'ensuit que $\Sigma_k \rightarrow S_{n,k}$ est c -linéaire par morceaux et à fibres finies.

5.2.5. Propriétés supplémentaires de la flèche $\Sigma_k \rightarrow S_{n,k}$. — Le morphisme φ étant dominant, il existe un ouvert non vide $\mathcal{U}$ de $\mathbf{G}_{m,k}^n$ tel que $\varphi^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ soit fini et plat de degré > 0 ; ceci entraîne que $\varphi^{-1}(\mathcal{U}^{\text{an}}) \rightarrow \mathcal{U}^{\text{an}}$ est propre, ouvert, surjectif et à fibres finies ; puisque $S_{n,k} \subset \mathcal{U}^{\text{an}}$, on en déduit que $\Sigma_k \rightarrow S_{n,k}$ est propre, ouvert, surjectif (et à fibres finies, ce que nous savions déjà).

5.2.6. Effet de l'extension des scalaires. — Soit maintenant L une extension compète de k . Conservons les notations $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_\ell$ introduites au paragraphe 5.2.4. Le raisonnement qu'on y suit montre qu'il existe une famille finie de fonctions rationnelles

$b_1, \dots, b_r$ sur $\mathcal{X}_L$ sur $\mathcal{X}_L$ telles que $(|f_1|, \dots, |g_1|, \dots, |g_\ell|, |b_1|, \dots, |b_r|)$ induise un homéomorphisme entre Σ_L et un c -polytope Π de $\mathbf{R}_{>0}^{n+m+r}$, homéomorphisme qui définit la structure c_L -linéaire par morceaux de Σ_L (si les g_i séparent encore les prolongements à $\kappa(\mathcal{X}_L)$ des valuations de Gauß sur $L(f_1, \dots, f_n)$ on peut prendre pour (b_j) la famille vide ; mais en général, on a besoin de fonctions supplémentaires). On déduit alors du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_L & \longrightarrow & \Pi \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma_k & \longrightarrow & Q \end{array},$$

dont la flèche verticale de droite est induite par la projection sur les $n + m$ premières coordonnées et dont les flèches horizontales sont des isomorphismes, que $\Sigma_L \rightarrow \Sigma_k$ est c_L -linéaire par morceaux. L'application $S_{n,L} \rightarrow S_{n,k}$ est bijective, et $\Sigma_L \rightarrow S_{n,L}$ est à fibres finies ; il s'ensuit que $\Sigma_L \rightarrow S_{n,k}$ est à fibres finies, et il en va *a fortiori* de même de $\Sigma_L \rightarrow \Sigma_k$. Soit y un point de Σ_k et soit s son image sur $S_{n,k}$; remarquons que $\mathcal{H}(y)$ est une extension finie de $\mathcal{H}(s)$ (5.2.5). Soit t l'unique antécédent de s sur $S_{n,L}$. L'ensemble des antécédents de y sur Σ_L s'identifie alors à $\mathcal{M}(\mathcal{H}(y) \otimes_{\mathcal{H}(s)} \mathcal{H}(t))$, qui est non vide ; ainsi, $\Sigma_L \rightarrow \Sigma_k$ est surjective. Remarquons par ailleurs que cette application est propre car Σ_L est fermé dans $\mathcal{X}_L^{\text{an}}$, lequel est topologiquement propre sur $\mathcal{X}^{\text{an}}$. Il reste à s'assurer qu'elle est ouverte ; ce sera fait à la fin du paragraphe suivant.

5.2.7. Stabilisation après une extension finie et conclusion. — La stabilisation de Σ_k après une extension finie séparable de k provient de ce qui précède et de l'existence d'une extension finie séparable F de k et d'une famille finie de fonctions rationnelles non nulles sur $\mathcal{X}_F$ séparant *universellement* (c'est-à-dire après toute extension valuée de F) les prolongements des valuations de Gauß de $F(f_1, \dots, f_n)$ à $\kappa(\mathcal{X}_F)$ ([Duc12], théorème 2.8 b). Remarquons que Σ_F est l'image réciproque de Σ_k sur $\mathcal{X}_F^{\text{an}}$, et que le morphisme fini et plat $\mathcal{X}_F^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{X}^{\text{an}}$ est ouvert ; par conséquent, $\Sigma_F \rightarrow \Sigma_k$ est ouverte.

Soit L une extension complète quelconque de k et soit M une extension complète composée de F et L . Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_M & \longrightarrow & \Sigma_L \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma_F & \longrightarrow & \Sigma_k \end{array}$$

la flèche verticale de gauche est un homéomorphisme, la flèche horizontale du haut est surjective, et la flèche horizontale du bas est ouverte. Il s'ensuit que $\Sigma_L \rightarrow \Sigma_k$ est ouverte.

5.3. Preuve du théorème 5.1.3 dans le cas général. — On ne suppose plus désormais que $m = 1$, et l'on reprend donc les notations $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ de l'énoncé.

5.3.1. — Il suffit de démontrer que Σ_k est un c -squelette : les assertions (2), (3), (4) et (5) découleront alors du fait qu'elles valent dans le cas $m = 1$ (qu'on vient de traiter) et que Σ_k est réunion finie de ses parties c -linéaires par morceaux fermées $\varphi_i^{-1}(S_{n,k})$. On peut supposer (en raisonnant G -localement) que X est affinoïde.

Il suffit même simplement de montrer que Σ_k est contenu dans un c -squelette T . Supposons en effet que ce soit le cas. On sait par le cas $m = 1$ déjà traité que chacun des $\varphi_j^{-1}(S_{n,k})$ est un c -squelette, donc est une partie c -linéaire par morceaux fermée de T . Leur réunion est alors une partie c -linéaire par morceaux de T , donc un c -squelette.

5.3.2. — Chacun des φ_i est donné par n fonctions analytiques inversibles $f_{i1}, \dots, f_{in}$. Renombrons pour simplifier les f_{ij} avec un seul indice, ce qui fournit une famille $(f_1, \dots, f_N)$ de fonctions inversibles sur X . L'ensemble Σ_k est alors contenu dans l'ensemble T des points x de X tels que le degré de transcendance de $(\widetilde{f_i(x)})_i$ sur $\tilde{k}$ soit égal à n . Notons que T est fermé (c'est la réunion des images réciproques de $S_{n,k}$ sous tous les morphismes de X vers $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$ définis par les différents n -uplets qu'on peut extraire de $(f_1, \dots, f_N)$). Nous allons montrer par récurrence sur N que T est un c -squelette. Si $N < n$ alors T est vide, et si $N = n$ alors T est un c -squelette par le cas $n = 1$ déjà traité.

Supposons $N > n$ et le résultat vrai pour $N - 1$. Soit $x \in T$. Par définition, le degré de transcendance de $(\widetilde{f_i(x)})_i$ sur $\tilde{k}$ est égal à n . Posons $a_i = \widetilde{f_i(x)}$ pour tout i . Une application de l'avatar gradué du «lemme de normalisation de Noether torique» de MacLagan et Sturmfels ([MS15]) assure alors l'existence d'une matrice $M = (m_{ij})$ de $\mathbf{GL}_N(\mathbf{Z})$ telle que si l'on pose $b_i = \prod_j a_j^{m_{ij}}$ pour tout i , la propriété suivante soit satisfaite : il existe $d > 0$ et des monômes $c_{d-1}, \dots, c_0$ en $b_1, \dots, b_{N-1}$, à exposants entiers relatifs, tels que $b_N^d + c_{d-1}b_N^{d-1} + \dots + c_0 = 0$. Posons $g_i = \prod_j f_j^{m_{ij}}$ pour tout i . Par ce qui précède, il existe des monômes $\mu_{d-1}, \dots, \mu_0$ en $g_1, \dots, g_{N-1}$, à exposants entiers relatifs, tels que $|g_N^d(x) + \mu_{d-1}(x)g_N^{d-1}(x) + \dots + \mu_0(x)| < \max_i |\mu_i(x)g_N^i(x)|$ (en posant $\mu_d = 1$). Le lieu de validité de l'inégalité $|g_N^d + \mu_{d-1}g_N^{d-1} + \dots + \mu_0| < \max_i |\mu_i g_N^i|$ est donc un voisinage ouvert U de x . Par construction, $\widetilde{g_N(y)}$ est algébrique sur $\tilde{k}(g_i(y))_{1 \leq i \leq N-1}$ pour tout $y \in U$. Il s'ensuit (la famille des g_i se déduisant de celle des f_i par une transformation monomiale inversible) que si $y \in U$ les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $y \in T$;
- (ii) le degré de transcendance de $(\widetilde{g_i(y)})_{1 \leq i \leq N}$ sur $\tilde{k}$ est égal à n ;
- (iii) le degré de transcendance de $(\widetilde{g_i(y)})_{1 \leq i \leq N-1}$ sur $\tilde{k}$ est égal à n .

La propriété (iii) couplée à l'hypothèse de récurrence montre alors que $U \cap T$ est un c -squelette. Ceci valant quel que soit $x \in T$, le fermé T de X est bien un c -squelette. $\square$

6. L'espace friable associé à un espace domanial

Nous nous proposons d'associer à un espace domanial un espace topologique possédant une base d'ouverts compacts, que nous appellerons *l'espace friable* associé.

6.1. Brefs rappels sur les filtres. — Nous allons commencer par quelques rappels sur les filtres. On fixe un ensemble X et une sous-algèbre de Boole $\mathbf{B}$ de $\mathcal{P}(X)$.

6.1.1. Définition. — Un *filtre* d'éléments de $\mathbf{B}$ est un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathbf{B}$ tel que :

- (a) $\mathcal{F}$ est stable par intersections finies ;
- (b) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
- (c) si V appartient à $\mathcal{F}$ et si W est un élément de $\mathbf{B}$ contenant V alors W appartient à $\mathcal{F}$.

Un *ultrafiltre* d'éléments de $\mathbf{B}$ est un filtre d'éléments de $\mathbf{B}$ qui est maximal pour l'inclusion.

6.1.2. Remarque. — L'axiome (a) entraîne que tout filtre d'éléments de $\mathbf{B}$ contient X (considérer l'intersection vide). Si X est lui-même vide, on obtient une contradiction avec l'axiome (b) : si X est vide, il n'existe donc pas de filtres d'éléments de $\mathbf{B}$.

6.1.3. Remarque. — Si $\mathcal{F}$ est un filtre d'éléments de $\mathbf{B}$ et si $V \in \mathcal{F}$ alors $X \setminus V$ ne peut appartenir à $\mathcal{F}$, sans quoi $\emptyset = V \cap (X \setminus V)$ appartiendrait à $\mathcal{F}$.

6.1.4. — Soit $\mathcal{F}$ un filtre d'éléments de $\mathbf{B}$. On déduit du lemme de Zorn que $\mathcal{F}$ est contenu dans un ultrafiltre d'éléments de $\mathbf{B}$.

Soit V un élément de $\mathbf{B}$ n'appartenant pas à $\mathcal{F}$. Supposons que $X \setminus V$ n'appartient pas non plus à $\mathcal{F}$. Pour tout $U \in \mathcal{F}$ l'intersection $U \cap V$ est alors non vide : en effet dans le cas contraire U serait contenu dans $X \setminus V$ qui appartiendrait donc à $\mathcal{F}$, contredisant nos hypothèses. L'ensemble des éléments de $\mathbf{B}$ contenant une partie de la forme $U \cap V$ avec $U \in \mathcal{F}$ est alors un filtre d'éléments de $\mathbf{B}$ contenant strictement $\mathcal{F}$. On en déduit que si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre alors $V \in \mathcal{F}$ ou $(X \setminus V) \in \mathcal{F}$ pour tout $V \in \mathbf{B}$.

Réciproquement, si $V \in \mathcal{F}$ ou $(X \setminus V) \in \mathcal{F}$ pour tout $V \in \mathbf{B}$ alors $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre : en effet soit $\mathcal{G}$ un filtre d'éléments de $\mathbf{B}$ contenant $\mathcal{F}$ et soit $V \in \mathcal{G}$; si V n'appartenait pas à $\mathcal{F}$ alors $X \setminus V$ appartiendrait à $\mathcal{F}$ et partant à $\mathcal{G}$, ce qui est absurde puisque $V \in \mathcal{G}$ (remarque 6.1.3).

En conséquence, $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si $V \in \mathcal{F}$ ou $(X \setminus V) \in \mathcal{F}$ pour tout $V \in \mathbf{B}$.

Supposons que ce soit le cas et soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments de $\mathbf{B}$ dont la réunion V appartient à $\mathcal{F}$. Il existe alors i tel que $V_i \in \mathcal{F}$. En effet dans le cas contraire chacun des $X \setminus V_i$ appartiendrait à $\mathcal{F}$ puisque ce dernier est un ultrafiltre, si bien que leur intersection $X \setminus V$ appartiendrait également à $\mathcal{F}$, ce qui est absurde, là encore en vertu de la remarque 6.1.3.

6.1.5. Exemple. — Si $x \in X$, l'ensemble des $V \in \mathbf{B}$ tels que $x \in V$ est un ultrafiltre d'éléments de $\mathbf{B}$; un tel ultrafiltre est dit *principal*.

6.1.6. — Notons $\tilde{X}$ l'ensemble des ultrafiltres d'éléments de B . On peut le voir comme un sous-ensemble de $\{0,1\}^B$, et on le munit de la topologie induite par la topologie produit. Compte-tenu des axiomes qui caractérisent les filtres, et du fait qu'un filtre $\mathcal{F}$ d'éléments de B est un ultrafiltre si et seulement si $V \in \mathcal{F}$ ou $(X \setminus V) \in \mathcal{F}$ pour tout $V \in B$, on voit que $\tilde{X}$ est fermé dans $\{0,1\}^B$; c'est donc un espace topologique compact totalement discontinu. Les parties de $\tilde{X}$ de la forme $\{\mathcal{F} \in \tilde{X}, V \in \mathcal{F}\}$ où V parcourt B sont exactement les ouverts compacts de $\tilde{X}$, et forment une base de sa topologie.

On dispose d'une application naturelle de X dans $\tilde{X}$, qui envoie un point x sur l'ultrafiltre principal correspondant. Elle est injective si et seulement si B sépare les points de X .

6.1.7. — Soit V un élément de B . L'intersection $\mathcal{P}(V) \cap B$ est une sous-algèbre de Boole de $\mathcal{P}(V)$. Si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre d'éléments de B contenant V , l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}(V) \cap B$ appartenant à $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre d'éléments de $\mathcal{P}(V) \cap B$. Si $\mathcal{G}$ est un ultrafiltre d'éléments de $\mathcal{P}(V) \cap B$, l'ensemble des éléments de B contenant un élément de $\mathcal{G}$ est un ultrafiltre d'éléments de B .

Ces constructions établissent un homéomorphisme entre l'ouvert compact de $\tilde{X}$ constitué des ultrafiltres contenant V , et l'espace $\tilde{V}$ des ultrafiltres d'éléments de $\mathcal{P}(V) \cap B$.

6.1.8. — Le plus souvent, nous préférons penser à un élément de $\tilde{X}$ comme à un point auquel *correspond* un ultrafiltre, plutôt que comme à un ensemble de parties de X , et nous emploierons donc plus volontiers la notation x (ou y , ou $z \dots$) que $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{G}$, ou $\mathcal{H}$) pour désigner un élément de $\tilde{X}$.

Si V est un élément de B , nous identifions $\tilde{V}$ à un ouvert compact de $\tilde{X}$ via l'homéomorphisme décrit en 6.1.7; la flèche $V \mapsto \tilde{V}$ établit une bijection de B sur l'ensemble des ouverts compacts de $\tilde{X}$.

Avec ces conventions, l'ultrafiltre correspondant à un point x de $\tilde{X}$ est l'ensemble des éléments V de B tels que $x \in \tilde{V}$.

Si B sépare les points de X nous utiliserons l'injection naturelle $X \hookrightarrow \tilde{X}$ pour identifier X à un sous-ensemble de $\tilde{X}$. On a alors $V = \tilde{V} \cap X$ pour tout $V \in B$; en particulier, X est dense dans $\tilde{X}$.

6.1.9. — Soit Y un ensemble et soit C une sous-algèbre de Boole de $\mathcal{P}(Y)$. Soit $\tilde{Y}$ l'espace des ultrafiltres d'éléments de C , et soit $f: Y \rightarrow X$ une application telle que $f^{-1}(V) \in C$ pour tout $V \in B$. L'application f induit une application continue $\tilde{f}$ de $\tilde{Y}$ vers $\tilde{X}$: en termes d'ultrafiltres, elle envoie un ultrafiltre $\mathcal{G}$ d'éléments de C sur l'ensemble des $V \in B$ tels que $f^{-1}(V) \in \mathcal{G}$; en termes plus topologiques, elle envoie un point y de $\tilde{Y}$ sur l'unique élément de l'intersection des ouverts compacts $\tilde{V}$, où V parcourt l'ensemble des éléments de B tels que $y \in \widetilde{f^{-1}(V)}$. Autrement dit, $\tilde{f}$ est caractérisée par le fait que $\tilde{f}^{-1}(\tilde{V}) = \widetilde{f^{-1}(V)}$ pour tout $V \in B$.

Il découle de la construction de $\tilde{f}$ que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X} \end{array}$$

est commutatif. Si $\mathbf{B}$ sépare les points de X et si $\mathbf{C}$ sépare les points de Y l'application $\tilde{f}$ apparaît donc, modulo les plongements naturels de X dans $\tilde{X}$ et de Y dans $\tilde{Y}$, comme un prolongement de f .

6.2. Le cas d'un espace domanial compact. — On fixe un espace domanial compact X .

6.2.1. — Nous noterons $D^c(X)$ l'ensemble des domaines compacts de X , et $D(X)$ la sous-algèbre de Boole de $\mathcal{P}(X)$ engendrée par $D^c(X)$; nous désignerons par $\tilde{X}$ l'ensemble des ultrafiltres d'éléments de $D(X)$. C'est un espace topologique compact et totalement discontinu, que nous appellerons l'*espace friable* associé à X .

Si $V \in D(X)$ nous noterons $\tilde{V}$ l'ensemble des ultrafiltres d'éléments de $D(X)$ contenu dans V , que nous identifierons à un ouvert compact de $\tilde{X}$ (6.1.8).

Les éléments de $D(X)$ séparent les points de X (c'est déjà le cas des éléments de $D^c(X)$), si bien que l'on dispose d'une injection naturelle $X \hookrightarrow \tilde{X}$ d'image dense. Elle n'est pas continue en général : on a en effet $\tilde{V} \cap X = V$ pour tout $V \in D(X)$, et un tel V peut très bien n'être pas ouvert.

6.2.2. — Soit $x \in \tilde{X}$ et soit $\mathbf{E}$ l'ensemble des éléments V de $D(X)$ tels que $x \in \tilde{V}$. L'intersection d'une famille finie d'éléments de $\mathbf{E}$ appartient à $\mathbf{E}$ et est en particulier non vide. Il en résulte par compacité que $U := \bigcap_{V \in \mathbf{E}} \bar{V}$ est non vide. Le compact U est en fait un singleton. En effet, soient y et z deux points distincts de X . Soit V un voisinage domanial compact de y dans $X \setminus \{z\}$ et soit W le complémentaire de V . Puisque $X = V \sqcup W$ on a $\tilde{X} = \tilde{V} \sqcup \tilde{W}$; en particulier x appartient à $\tilde{V}$ ou à $\tilde{W}$, si bien que $V \in \mathbf{E}$ ou $W \in \mathbf{E}$; dans le premier cas $z \notin U$ puisque $z \notin \bar{V}$, et dans le second cas $y \notin U$ puisque $y \notin \bar{W}$; ainsi y et z ne peuvent appartenir tous deux à U , qui est dès lors un singleton, comme annoncé. Son unique point sera noté $\rho_X(x)$.

6.2.3. — Par construction, ρ_X est une rétraction de l'inclusion $X \hookrightarrow \tilde{X}$. Si V appartient à $D^c(X)$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & \hookrightarrow & \tilde{X} \\ \rho_V \downarrow & & \downarrow \rho_X \\ V & \hookrightarrow & X \end{array}$$

est commutatif; on pourra donc se permettre d'écrire ρ au lieu de ρ_X , ce que nous ferons le plus souvent.

Soit x un point de $\tilde{X}$ et soit V un voisinage domanial compact de $\rho(x)$; soit U le complémentaire de V dans X . Par construction, $\rho(x)$ n'appartient pas à $\bar{U}$, ce qui entraîne que x ne peut appartenir à $\tilde{U}$; par conséquent, x appartient à $\tilde{V}$. Ainsi, $\tilde{V}$

est un voisinage ouvert de x , dont l'image par ρ est contenue dans V (et même égale à V tout entier). Il en résulte que ρ est continue.

6.2.4. — Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme d'espaces domaniaux compacts. Si V appartient à $D^c(X)$ alors $f^{-1}(V)$ appartient à $D^c(Y)$. Il s'ensuit que $f^{-1}(V)$ appartient à $D(Y)$ pour tout $V \in D(X)$, et f se prolonge par conséquent en une application continue $\tilde{f}$ de $\tilde{Y}$ vers $\tilde{X}$. Il résulte des constructions que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X} \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

commute.

6.2.5. *Cas d'une partie localement fermée.* — Soit E une partie compacte de X . Elle hérite d'une structure domaniale naturelle, pour laquelle l'inclusion de E dans X est un morphisme (3.1.6). On dispose par ce qui précède d'une application continue naturelle de $\tilde{E}$ vers $\tilde{X}$. Cette application induit un homéomorphisme entre $\tilde{E}$ et une partie compacte de $\tilde{X}$.

En effet, nous allons montrer que $\tilde{E}$ s'injecte dans $\tilde{X}$, ce qui permettra de conclure par compacité. Soient donc x et y deux points distincts de $\tilde{E}$. Quitte à échanger x et y , on peut supposer qu'il existe $W \in D^c(E)$ tel que $x \in \tilde{W}$ et $y \notin \tilde{W}$. Par définition de la structure d'espace domanial sur E et par compacité de W , il existe une famille finie de domaines compacts (V_i) de X tels que $W = \bigcup W_i$ où l'on a posé $W_i = V_i \cap E$. Il existe alors i tel que $x \in \tilde{W}_i$, et y n'appartient pas à $\tilde{W}_i \subset \tilde{W}$. Par la définition même de l'application de $\tilde{E}$ vers $\tilde{X}$ l'ouvert compact $\tilde{V}_i$ de $\tilde{X}$ contient l'image de x mais pas celle de y , ce qui montre que ces deux images sont distinctes.

Nous nous permettrons donc d'identifier $\tilde{E}$ à une partie compacte de $\tilde{X}$. Modulo cet abus on a $\rho(x) \in E$ pour tout $x \in \tilde{E}$ et $\tilde{E} \cap X = E$.

6.3. Espace friable associé à un espace domanial général. — Soit X un espace domanial; on ne le suppose plus compact (ni même séparé). Nous désignons encore par $D^c(X)$ l'ensemble des domaines compacts de X . L'ensemble $D^c(X)$ est naturellement ordonné par inclusion, et cofiltrant (l'intersection de deux éléments de $D^c(X)$ n'appartient pas forcément à $D^c(X)$, l'espace X n'étant pas supposé séparé; mais elle est G-recouverte par des éléments de $D^c(X)$).

Si V est un élément de $D^c(X)$ nous noterons $\tilde{V}$ l'espace friable associé, et $\rho: \tilde{V} \rightarrow V$ la rétraction continue naturelle de $V \hookrightarrow \tilde{V}$ (voir la sous-section 6.2 ci-dessus pour ces différentes notions).

6.3.1. — Nous noterons $\check{X}$ la colimite topologique des $\tilde{V}$ pour V parcourant $D^c(X)$. C'est un espace topologique qui s'identifie à ce que nous avons déjà noté $\tilde{X}$ lorsque X est compact, et que nous appellerons encore l'espace friable associé à X . Pour tout domaine V de X , la flèche naturelle $\tilde{V} \rightarrow \check{X}$ est une immersion ouverte, et les $\tilde{V}$ pour

$V \in D^c(X)$ forment une base d'ouverts compacts de $\check{X}$. Si X est séparé $\check{X}$ est séparé, et les $\check{V}$ en constituent donc une base d'ouverts fermés.

Notre choix de la notation $\check{X}$ plutôt que $\tilde{X}$, malgré la coïncidence des deux objets dans le cas compact, s'explique ainsi. Si V est un domaine compact de X , si W est un domaine compact de V et si l'on pose $U = V \setminus W$, alors $\tilde{U}$ a été défini à la sous-section 6.2 : c'est l'espace des ultrafiltres de parties de $D(V)$ contenues dans U , qui s'identifie à un ouvert compact de $\tilde{V}$. Quant à $\check{U}$, c'est la réunion des $\check{Z}$ où Z parcourt l'ensemble des domaines compacts de U ; c'est donc un ouvert de $\check{U}$, qui est strict dès que U n'est pas compact.

6.3.2. — Lorsque V parcourt $D^c(X)$, les inclusions naturelles $V \hookrightarrow \check{V}$ et leurs rétractions continues $\rho: \check{V} \rightarrow V$ se recollent en une injection $X \hookrightarrow \check{X}$ et une rétraction continue $\rho: \check{X} \rightarrow X$ de cette dernière.

6.3.3. Fonctorialité. — Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme d'espaces domaniaux. Soit W un domaine compact de Y et soit V un domaine compact de X tel que $f(W) \subset V$. L'application f induit une application $\check{f}$ de $\check{W}$ vers $\check{V}$. Lorsque V et W varient les applications continues ainsi définies se recollent en une application continue $\check{f}$ de $\check{Y}$ vers $\check{X}$. On vérifie par réduction au cas compact que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \check{Y} & \xrightarrow{\check{f}} & \check{X} \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

est commutatif.

6.3.4. Cas d'une partie localement fermée. — Soit E une partie localement fermée de X . Elle hérite d'une structure domaniale naturelle, pour laquelle l'inclusion de E dans X est un morphisme. On dispose dès lors d'une application naturelle de $\check{E}$ vers $\check{X}$. Cette application induit un homéomorphisme entre $\check{E}$ et une partie localement fermée de $\check{X}$, fermée si E est fermé dans X .

En effet, choisissons un ouvert U de X dans lequel E est fermé. On peut pour montrer l'assertion remplacer X par U , et partant supposer E fermé dans X . Il suffit alors de prouver que $\check{E} \times_{\check{X}} \check{V} \rightarrow \check{V}$ induit un homéomorphisme entre $\check{E} \times_{\check{X}} \check{V}$ et une partie fermée de $\check{V}$ pour tout domaine compact V de X . Mais pour un tel domaine, $\check{E} \times_{\check{X}} \check{V}$ est par construction l'espace friable associé à $E \cap V$; on se ramène ainsi au cas où X est compact, et où E est une partie compacte de X , qui a été traité en 6.2.5.

6.3.5. Raffinement de la structure domaniale. — Supposons données deux structures domaniales ayant même espace topologique sous-jacent X , que nous notons X_1 et X_2 . On suppose que $D(X_2) \subset D(X_1)$, ce qui signifie précisément que l'identité de X induit un morphisme d'espaces domaniaux $X_1 \rightarrow X_2$. On dispose alors en particulier d'une application continue $\check{X}_1 \rightarrow \check{X}_2$, qui est propre : si V est un domaine compact de

X_1 , dont on note V_1 et V_2 les structures domaniales induites par celles de X_1 et X_2 , l'image réciproque du compact $\check{V}_1$ sur $\check{X}_2$ s'identifie au compact $\check{V}_2$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \check{V}_1 & \longrightarrow & \check{V}_2 \\ \uparrow & \nearrow & \\ V & & \end{array}$$

étant commutatif, l'image de la flèche $\check{V}_1 \rightarrow \check{V}_2$ contient le sous-ensemble dense V de $\check{V}_2$. Cette image étant compacte, c'est $\check{V}_2$ tout entier. Il s'ensuit que $\check{X}_1 \rightarrow \check{X}_2$ est surjective.

6.3.6. Remarque. — On peut démontrer (nous ne nous servons pas de ce fait) que $\check{X}$ est en bijection avec l'ensemble P des points du topos associé au site domanial de X . Cette bijection n'est pas un homéomorphisme : la topologie sur $\check{X}$ héritée de son identification avec P est la topologie engendrée par les $\check{V}$ où V est un domaine compact de X , qui est moins fine que celle que nous utilisons ici : si W et V sont deux domaines compacts de X avec $W \subset V$ alors $\check{V} \setminus \check{W}$ sera toujours ouvert pour la topologie friable considérée ici, mais pas en général pour la topologie induite par celle de P .

7. Espaces friables en géométrie analytique

Nous nous proposons maintenant d'étudier en détail l'espace $\check{X}$ lorsque X est un espace k -analytique Γ -strict, et de montrer qu'il s'identifie à l'espace de Huber-Kedlaya (muni de sa topologie constructible). C'est en fait par la construction de ce dernier que nous allons commencer, dans le cas affinoïde.

7.1. Espace Γ -adique associé à un espace k -affinoïde Γ -strict. — Soit X un espace k -affinoïde Γ -strict ; on le munit de sa structure domaniale Γ -strictement k -analytique. Le but de ce qui suit est de définir l'espace Γ -adique $X^{\Gamma\text{-ad}}$ associé à X en termes purement valuatifs, puis de montrer qu'il s'identifie à l'espace friable $\check{X}$. Nous allons utiliser librement les définitions et notations de 2.4.

7.1.1. Description ensembliste de $X^{\Gamma\text{-ad}}$. — Notons A l'algèbre des fonctions analytiques sur X . Comme X est Γ -strict, la semi-norme spectrale $\|\cdot\|_\infty$ de A est à valeurs dans le monoïde $(|k^\times| \cdot \Gamma)^{\mathbf{Q}} \cup \{0\}$, et nous dirons qu'une k -valuation $|k^\times| \cdot \Gamma$ -colorée x sur A est *bornée* si $|a(x)| \leq \|a\|_\infty$ pour tout $a \in A$. Pour que x soit bornée, il suffit en fait que $|a(x)| \leq \|a\|_\infty$ pour tout $a \in A$ telle que $\|a\|_\infty \in \Gamma$. Supposons en effet que ce soit le cas, et soit $b \in A$. Si $\|b\|_\infty = 0$ alors b est nilpotente si bien que $b(x) = 0$, et $|b(x)|$ est bien majoré par $\|b\|_\infty = 0$. Sinon il existe un entier $n \geq 0$, un élément λ de $k^\times$ et un élément r de Γ tels que $\|b\|_\infty^n = r|\lambda|$. Si l'on pose $a = b^n/\lambda$ on a donc $\|a\|_\infty \in \Gamma$. Par hypothèse ceci entraîne que $|a(x)| \leq \|a\|_\infty$, d'où il suit immédiatement que $|b(x)| \leq \|b\|_\infty$.

Nous définissons $X^{\Gamma\text{-ad}}$ comme l'ensemble des classes d'équivalence de k -valuations $|k^\times| \cdot \Gamma$ -colorées, bridées et bornées sur A .

7.1.2. Liens avec la réduction de Temkin. — Tout point de X est en particulier une k -valuation $|k^\times| \cdot \Gamma$ -colorée bornée et bridée sur A , et peut donc être vu comme appartenant à $X^{\Gamma\text{-ad}}$; nous considérerons désormais par ce biais X comme un sous-ensemble de $X^{\Gamma\text{-ad}}$. Par ailleurs si x est point de $X^{\Gamma\text{-ad}}$, il lui correspond un couple $(x^\#, x^\flat)$ où $x^\#$ est une k -valuation Γ -colorée réelle sur A et $x^\flat$ une $\tilde{k}^\Gamma$ -valuation sur $\widetilde{\mathcal{H}(x)}^\Gamma$, et comme le passage de x à $x^\#$ préserve les inégalités larges, $x^\#$ est bornée : c'est donc un point de X . L'application $x \mapsto x^\#$ est une rétraction de l'inclusion X dans $X^{\Gamma\text{-ad}}$, puisqu'un point ξ de $X \subset X^{\Gamma\text{-ad}}$ correspond au couple (ξ, θ) où θ est la valuation triviale sur $\widetilde{\mathcal{H}(\xi)}^\Gamma$.

Soit $\xi \in X$, soit ω une valuation sur $\widetilde{\mathcal{H}(\xi)}^\Gamma$ et soit x la k -valuation $|k^\times| \cdot \Gamma$ -colorée bridée sur A correspondant au couple (ξ, ω) . La valuation x appartient à $X^{\Gamma\text{-ad}}$ si et seulement si $|a(x)| \leq \|a\|_\infty$ pour tout élément $a \in A$ dont la semi-norme spectrale appartient à Γ . Mais cela revient à demander que $|\alpha(\omega)| \leq 1$ pour tout α appartenant à l'image de $\tilde{A}$ dans $\widetilde{\mathcal{H}(\xi)}^\Gamma$, c'est-à-dire encore que $\omega \in (\widetilde{X, \xi})^\Gamma$. La fibre en ξ de l'application $X^{\Gamma\text{-ad}} \rightarrow X$ est donc ensemblistement la réduction de Temkin Γ -graduée du germe (X, ξ) .

7.1.3. Fonctorialité. — Soit $Y = \mathcal{M}(B)$ un espace k -affinoïde Γ -strict et soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme. Soit y un point de $Y^{\Gamma\text{-ad}}$. L'application $f^*: A \rightarrow B$ contracte les semi-normes spectrales. Il s'ensuit que la k -valuation $|k^\times| \cdot \Gamma$ -colorée et bridée $a \mapsto |f^*(a)(y)|$ sur A est bornée, et appartient dès lors à $X^{\Gamma\text{-ad}}$. Ainsi f induit-il une application $Y^{\Gamma\text{-ad}} \rightarrow X^{\Gamma\text{-ad}}$, qu'on notera $f^{\Gamma\text{-ad}}$ ou, le plus souvent, simplement f s'il n'y a pas de risque de confusion.

7.1.4. Domaines affinoïdes. — Soit $D^{\text{aff}}(X)$ l'ensemble des domaines affinoïdes Γ -stricts de X ; c'est une partie de l'ensemble $D^c(X)$ de tous les domaines analytiques compacts et Γ -stricts de X . En vertu de 7.1.2, pour tout $V \in D^{\text{aff}}(X)$ la flèche naturelle de $V^{\Gamma\text{-ad}}$ vers $X^{\Gamma\text{-ad}}$ induite par le morphisme $V \hookrightarrow X$ identifie $V^{\Gamma\text{-ad}}$ au sous-ensemble de $X^{\Gamma\text{-ad}}$ formé des points x tels que $x^\# \in V$ et $x^\flat \in (\widetilde{V, x^\#})^\Gamma$. Il en résulte que la flèche $D^{\text{aff}}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X^{\Gamma\text{-ad}})$, $V \mapsto V^{\Gamma\text{-ad}}$ commute aux unions et intersections finies, puis que cette flèche s'étend d'une unique manière en une flèche $V \mapsto V^{\Gamma\text{-ad}}$ de $D^c(X)$ vers $\mathcal{P}(X^{\Gamma\text{-ad}})$ commutant aux unions et intersections finies. Pour tout $V \in D^c(X)$, le sous-ensemble $V^{\Gamma\text{-ad}}$ de $X^{\Gamma\text{-ad}}$ est formé des points x tels que $x^\# \in V$ et $x^\flat \in (\widetilde{V, x^\#})^\Gamma$.

Soit $x \in X^{\Gamma\text{-ad}}$ et soit $V \in D^{\text{aff}}(X)$ tel que $x \in V^{\Gamma\text{-ad}}$. Chacune des notations $x^\#, x^\flat, \mathcal{H}(x)$ et $\mathcal{H}(x^\#)$ désigne un objet qui ne dépend pas du fait que x soit vu comme point de $V^{\Gamma\text{-ad}}$ ou de $X^{\Gamma\text{-ad}}$, et nous pourrions donc les employer sans aucun risque de confusion (notons par contre que la notation $\kappa(x)$ serait ambiguë ici, le morphisme $A \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$ n'ayant aucune raison de préserver les corps résiduels *schématiques*, et nous ne l'utiliserons pas).

7.1.5. Un exemple explicite. — Soit V un domaine affinoïde Γ -rationnel de X . Choisissons-en une description par une conjonction d'inégalités

$$|f_1| \leq \lambda_1 |g| \text{ et } \dots \text{ et } |f_n| \leq \lambda_n |g|$$

où g et les f_i sont des fonctions analytiques sur X sans zéro commun et où les λ_i sont des éléments de Γ .

Soit x un point de $X^{\Gamma\text{-ad}}$. Il appartient à $V^{\Gamma\text{-ad}}$ si et seulement si $x^\# \in V$ et $x^\flat \in \widetilde{(V, x^\#)}^\Gamma$. La première condition revient à demander que $|f_i(x^\#)| \leq \lambda_i |g(x^\#)|$ pour tout i (ce qui entraîne l'inversibilité de $g(x^\#)$, les f_i et g étant sans zéro commun), et la seconde revient à demander que $|(f_i/g)(x^\flat)| \leq 1$ pour tout i tel que $|f_i(x^\#)| = \lambda_i |g(x^\#)|$, c'est-à-dire encore que $|(f_i/g)(x)| \leq \gamma$ pour tout i tel que $|f_i(x^\#)| = \lambda_i |g(x^\#)|$. Il en résulte que $x \in V^{\Gamma\text{-ad}}$ si et seulement si $|f_i(x)| \leq \lambda_i |g(x)|$ pour tout i ; autrement dit, on peut décrire $V^{\Gamma\text{-ad}}$ comme sous-ensemble de $X^{\Gamma\text{-ad}}$ par la même conjonction d'inégalités que V comme sous-ensemble de X .

7.2. Identification de $X^{\Gamma\text{-ad}}$ à $\tilde{X}$. — On désigne toujours par X un espace k -affinoïde Γ -strict.

7.2.1. — Rappelons que $D(X)$ désigne la sous-algèbre de Boole de $\mathcal{P}(X)$ engendrée par $D^c(X)$. L'application $V \mapsto V^{\Gamma\text{-ad}}$ de $D^c(X)$ dans $\mathcal{P}(X^{\Gamma\text{-ad}})$ commutant aux unions et intersections finies, elle s'étend de manière unique en un morphisme d'algèbres de Boole de $D(X)$ vers $\mathcal{P}(X^{\Gamma\text{-ad}})$ que nous allons noter $V \mapsto \overline{V^{\Gamma\text{-ad}}}$ (cette notation est pour le moment à considérer comme d'un seul tenant; elle est justifiée par la remarque 7.3.4 plus bas). Si $V \in D^c(X)$ et si U désigne son complémentaire alors $\overline{V^{\Gamma\text{-ad}}} = V^{\Gamma\text{-ad}}$ et $\overline{U^{\Gamma\text{-ad}}} = X^{\Gamma\text{-ad}} \setminus V^{\Gamma\text{-ad}}$.

7.2.2. Proposition. — *La formule*

$$x \mapsto \{V \in D(X), x \in \overline{V^{\Gamma\text{-ad}}}\}$$

établit une bijection de $X^{\Gamma\text{-ad}}$ sur l'ensemble $\tilde{X}$ des ultrafiltres d'éléments de $D(X)$.

Démonstration. — Pour tout $x \in X^{\Gamma\text{-ad}}$; nous noterons $\Phi(x)$ l'ensemble des éléments V de $D(X)$ tels que $x \in \overline{V^{\Gamma\text{-ad}}}$. Il est immédiat que $\Phi(x)$ est pour tout $x \in X^{\Gamma\text{-ad}}$ un ultrafiltre d'éléments de $D(X)$. On a donc bien défini une application $\Phi: X^{\Gamma\text{-ad}} \rightarrow \tilde{X}$, et il reste à montrer qu'elle est bijective.

Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre d'éléments de $D(X)$. Nous allons construire un antécédent de $\mathcal{F}$ par Φ , puis montrer qu'il est unique. Dans ce qui suit, le domaine analytique Γ -strict de X décrit par une certaine combinaison booléenne entre normes de fonctions analytiques sera simplement désigné par la combinaison en question placée entre accolades.

Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des éléments f de A vérifiant la propriété suivante : *il existe $r \in |k^\times| \cdot \Gamma$ tel que $\{|f| \geq r\}$ appartienne à $\mathcal{F}$* ; nous dirons alors d'un tel r qu'il est *adapté à f* . Remarquons que si r est adapté à f il en va de même de tout élément $s \leq r$ de $|k^\times| \cdot \Gamma$ parce que $\{|f| \geq s\} \supset \{|f| \geq r\}$ et que $\mathcal{F}$ est un filtre. Remarquons aussi que $\mathcal{E}$ est stable par produit : si r est adapté à f et s à g alors rs est adapté à fg puisque

$$\{|fg| \geq rs\} \supset \{|f| \geq r\} \cap \{|g| \geq s\}.$$

On définit sur $\mathcal{E}^2 \times \Gamma$ une relation $\mathcal{R}$ par la formule suivante : $(f, g, \lambda) \mathcal{R} (u, v, \mu)$ si et seulement s'il existe un élément $r \in |k^\times| \cdot \Gamma$ adapté à la fois à f, g, u et v tel que

$$\{|f| \geq r \text{ et } |g| \geq r \text{ et } |u| \geq r \text{ et } |v| \geq r \text{ et } |f/g|\lambda = |u/v|\mu\}$$

appartienne à $\mathcal{F}$. Notons que si c'est le cas, alors

$$\{|f| \geq s \text{ et } |g| \geq s \text{ et } |u| \geq s \text{ et } |v| \geq s \text{ et } |f/g|\lambda = |u/v|\mu\}$$

appartient encore à $\mathcal{F}$ pour tout autre $s \in |k^\times| \cdot \Gamma$ adapté à la fois à f, g, u et v : cela provient du fait que

$$\{|f| \geq s \text{ et } |g| \geq s \text{ et } |u| \geq s \text{ et } |v| \geq s \text{ et } |f/g|\lambda = |u/v|\mu\}$$

contient

$$\{|f| \geq r \text{ et } |g| \geq r \text{ et } |u| \geq r \text{ et } |v| \geq r \text{ et } |f/g|\lambda = |u/v|\mu\}$$

si $s \leq r$, et que

$$\{|f| \geq s \text{ et } |g| \geq s \text{ et } |u| \geq s \text{ et } |v| \geq s \text{ et } |f/g|\lambda = |u/v|\mu\}$$

est l'intersection de

$$\{|f| \geq r \text{ et } |g| \geq r \text{ et } |u| \geq r \text{ et } |v| \geq r \text{ et } |f/g|\lambda = |u/v|\mu\}$$

et de l'élément

$$\{|f| \geq s \text{ et } |g| \geq s \text{ et } |u| \geq s \text{ et } |v| \geq s\}$$

de $\mathcal{F}$ sinon.

Il s'ensuit immédiatement que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, et que la formule

$$((f, g, \lambda), (u, v, \mu)) \mapsto (fu, gv, \lambda\mu)$$

passse au quotient et fait de $G := \mathcal{E}^2 \times \Gamma / \mathcal{R}$ un groupe abélien, dont le neutre est $(1, 1, 1)$, et dans lequel l'inverse de (f, g, λ) est (g, f, λ^{-1}) . Le groupe $|k^\times| \cdot \Gamma$ se plonge naturellement dans G par la formule $(r, \lambda) \mapsto (a, 1, \lambda)$ où a est n'importe quel élément de $k^\times$ tel que $|a| = r$ (on vérifie aussitôt que le terme de droite ne dépend pas du choix de a). Soit $\leq$ la relation sur $\mathcal{E}^2 \times \Gamma$ définie par la condition que $(f, g, \lambda) \leq (u, v, \mu)$ s'il existe $r \in |k^\times| \cdot \Gamma$ adapté à f, g, u et v et tel que

$$\{|f| \geq r \text{ et } |g| \geq r \text{ et } |u| \geq r \text{ et } |v| \geq r \text{ et } |f/g|\lambda \leq |u/v|\mu\}$$

appartienne à $\mathcal{F}$ (par un raisonnement analogue à celui tenu ci-dessus, une fois que c'est vrai pour un certain r , cela reste vrai pour tout s adapté à f, g, u et v). Cette relation passe au quotient par $\mathcal{R}$, et on vérifie qu'elle fait de G un groupe abélien ordonné; le plongement $|k^\times| \cdot \Gamma \hookrightarrow G$ est croissant et fait donc de G un groupe $|k^\times| \cdot \Gamma$ -coloré, qui est bridé par construction : si f et g appartiennent à $\mathcal{E}$ alors f n'est pas nilpotent et (f, g, λ) est majoré par $\|f\|_\infty \lambda / r$ où r est n'importe quel élément de $|k^\times| \cdot \Gamma$ adapté à g .

L'application de A dans $G \cup \{0\}$ qui envoie f sur 0 si $f \notin \mathcal{E}$ et sur $(f, 1, 1)$ sinon est alors une k -valuation $|k^\times| \cdot \Gamma$ -colorée bridée et bornée sur A , et elle définit donc un point x de $X^{\Gamma\text{-ad}}$. Par construction, si V est un domaine affinoïde Γ -rationnel de X alors $x \in V^{\Gamma\text{-ad}}$ si et seulement si $V \in \mathcal{F}$, et x est le seul point de $X^{\Gamma\text{-ad}}$ à posséder cette propriété. Comme $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre et comme les éléments de $D^c(X)$ sont exactement les unions finies de domaines affinoïdes Γ -rationnels, il s'ensuit que pour

tout $V \in D^c(X)$ le point x appartient à $V^{\Gamma\text{-ad}}$ si et seulement si $V \in \mathcal{F}$, et que x est le seul point de $X^{\Gamma\text{-ad}}$ à posséder cette propriété ; il s'ensuit pour des raisons formelles que pour tout $V \in D(X)$ le point x appartient à $\overline{V^{\Gamma\text{-ad}}}$ si et seulement si $V \in \mathcal{F}$, et que x est le seul point de $X^{\Gamma\text{-ad}}$ à posséder cette propriété ; autrement dit, $\Phi^{-1}(\mathcal{F}) = \{x\}$. $\square$

7.2.3. Description de $X^{\Gamma\text{-ad}}$ comme espace topologique. — La bijection construite ci-dessus entre $X^{\Gamma\text{-ad}}$ et $\tilde{X}$ permet de munir $X^{\Gamma\text{-ad}}$ d'une topologie en faisant un espace compact totalement discontinu, dont les ouverts fermés sont les éléments de l'algèbre de Boole engendrée par les $V^{\Gamma\text{-ad}}$ pour $V \in D^c(X)$.

Si $\Gamma = \{1\}$ (resp. $\Gamma = \mathbb{R}_{>0}$) l'espace topologique $X^{\Gamma\text{-ad}}$ s'identifie à l'espace adique (resp. l'espace de valuations réifiées) associées à X par Huber [Hub93] (resp. Kedlaya, [Ked]) muni de sa topologie constructible. (Pour alléger l'écriture nous écrirons X^{ad} au lieu de $X^{\{1\}\text{-ad}}$).

7.3. Définition de $X^{\Gamma\text{-ad}}$ dans le cas général. — On désigne maintenant par X un espace k -analytique Γ -strict quelconque.

7.3.1. — On définit l'espace topologique $X^{\Gamma\text{-ad}}$ comme la colimite topologique de $V^{\Gamma\text{-ad}}$ pour V parcourant l'ensemble des domaines affinoïdes Γ -stricts de X .

Remarquons qu'il n'y a pas de conflits de notation : si X est affinoïde et si V est un domaine analytique compact et Γ -strict de X , les espaces $X^{\Gamma\text{-ad}}$ et $V^{\Gamma\text{-ad}}$ au sens que nous venons de définir sont les mêmes que ceux déjà introduits plus haut.

En vertu de la proposition 7.2.2 et par la définition même de la topologie sur $V^{\Gamma\text{-ad}}$ lorsque V est un domaine affinoïde Γ -strict de X , l'espace $X^{\Gamma\text{-ad}}$ s'identifie à la colimite topologique des $\tilde{V}$ lorsque V parcourt l'ensemble des domaines affinoïdes Γ -stricts de X , qui n'est autre que la colimite topologique des $\tilde{V}$ lorsque V parcourt $D^c(X)$ (chaque élément de $D^c(X)$ étant une union finie d domaines affinoïdes Γ -stricts). Autrement dit, $X^{\Gamma\text{-ad}}$ s'identifie naturellement à $\check{X}$.

7.3.2. — Il résulte de 7.1.2 que $X^{\Gamma\text{-ad}}$ s'identifie naturellement comme ensemble à $\{(\xi, \omega)\}_{\xi \in X, \omega \in \widehat{(X, \xi)}^\Gamma}$; si $x \in X^{\Gamma\text{-ad}}$ le couple (ξ, ω) correspondant sera noté $(x^\#, x^b)$ comme dans le cas affinoïde.

7.3.3. — Si Δ est un sous-groupe de $\mathbf{R}_{>0}$ contenant Γ l'espace X est également Δ -strict, et l'on dispose d'une application continue propre et surjective $X^{\Delta\text{-ad}} \rightarrow X^{\Gamma\text{-ad}}$ (6.3.5). À titre d'exemple, décrivons brièvement les fibres de $X^{\mathbf{R}_{>0}\text{-ad}} \rightarrow X^{\text{ad}}$ lorsque X est une k -courbe stricte. Ce sont alors toutes des singletons, sauf éventuellement au-dessus des points de type 3 de X : la fibre en un tel x contient en effet x lui-même mais également un point par branche issue de x ; et il y a deux branches issues de x si ce dernier est intérieur, il y en a une si x appartient à ∂X sans être un point isolé, et aucune si x est isolé.

7.3.4. Remarque. — Supposons X affinoïde, et soit V un domaine affinoïde et Γ -strict de X . Soit U le complémentaire de V dans X . L'ensemble $\overline{U^{\Gamma\text{-ad}}}$ défini en 7.2.1 est alors précisément l'adhérence de $U^{\Gamma\text{-ad}}$ dans $X^{\Gamma\text{-ad}}$. En effet comme $\overline{U^{\Gamma\text{-ad}}}$ est compact, il suffit de vérifier que $U^{\Gamma\text{-ad}}$ est dense dans $\overline{U^{\Gamma\text{-ad}}}$. Soit donc $x \in \overline{U^{\Gamma\text{-ad}}}$

et soit W un élément de $D(X)$ tel que $x \in \overline{W^{\Gamma\text{-ad}}}$. On a alors $x \in \overline{U^{\Gamma\text{-ad}}} \cap \overline{W^{\Gamma\text{-ad}}}$. La partie $W \cap U$ est donc un élément non vide de $D(X)$, qui contient par conséquent un domaine affinoïde Γ -strict compact non vide Y . Mais alors $Y^{\Gamma\text{-ad}}$ est une partie non vide de $U^{\Gamma\text{-ad}}$ qui est contenue dans $\overline{W^{\Gamma\text{-ad}}}$, ce qui permet de conclure.

8. Espaces friables en géométrie linéaire par morceaux

Soit Δ un sous-groupe divisible non trivial de $\mathbf{R}_{>0}$ et soit c le couple $(\mathbf{Q}, \Delta)$ (en pratique nous appliquerons ceci avec $\Delta = (|k^\times| \cdot \Gamma)^{\mathbf{Q}}$). Nous nous proposons de donner une description «valuative» de $\check{X}$, dans un sens qui sera précisé, analogue à celle exhibée dans le cas des espaces analytiques.

8.1. L'espace des types. — Nous allons tout d'abord présenter (dans le contexte c -linéaire par morceaux) une construction classique en théorie des modèles, l'*espace des types*, qui redonnera l'espace friable dans le cas des c -polytopes compacts.

8.1.1. — Soit n un entier et soit F l'ensemble des formules du premier ordre dans le langage des groupes abéliens ordonnés à paramètres dans Δ , en n variables libres $x_1, \dots, x_n$. Concrètement, une formule Φ appartenant à F est construite à partir des quantificateurs et connecteurs logiques standard ainsi que des symboles $1, \cdot, (\cdot)^{-1}$ et $\leq, <, \geq, >$ relatifs à la structure de groupe abélien ordonné, et met en jeu d'une part un certain nombre de variables quantifiées, d'autre part certaines variables non quantifiées parmi $x_1, \dots, x_n$, ainsi que des paramètres appartenant à Δ . Par exemple si $n = 3$ et si r est un élément fixé de Δ ,

$$\forall x \exists y \exists z (x_1 x_2^3 \leq xyz) \text{ ou } (yz^{-3} > r \text{ et } x_3 y^{-1} = z^2 x)$$

est une formule appartenant à F .

Si H est un groupe abélien divisible ordonné Δ -coloré et si $(h_1, \dots, h_n)$ sont des éléments de H on obtient pour toute $\Phi \in F$, en substituant h_i à x_i quel que soit i , une formule $\Phi(h_1, \dots, h_n)$ sans variables libres et à paramètres dans H , dont la valeur de vérité dans le groupe abélien ordonné H est bien définie.

8.1.2. — La théorie des groupes abéliens divisibles ordonnés non triviaux admet l'élimination des quantificateurs dans le langage des groupes abéliens ordonnés. Il en résulte que pour toute $\Phi \in F$ il existe $\Psi \in F$ *sans quantificateurs*, telle que pour tout groupe abélien ordonné divisible Δ -coloré H et tout $(h_1, \dots, h_n) \in H^n$ on ait l'équivalence $\Phi(h_1, \dots, h_n) \iff \Psi(h_1, \dots, h_n)$ dans le groupe H .

Il s'ensuit que si H' est un groupe abélien ordonné Δ -coloré divisible contenant H alors pour toute formule $\Phi \in F$, l'énoncé $\Phi(h_1, \dots, h_n)$ vaut dans H si et seulement s'il vaut dans H' (car c'est évident si Φ est sans quantificateurs).

8.1.3. — On note $\mathbb{G}_n$ l'ensemble des «classes d'équivalence» de n -uplets $(h_1, \dots, h_n)$ où les h_i appartiennent à un groupe abélien ordonné divisible Δ -coloré H (qui n'est pas fixé) pour la relation d'équivalence définie par la condition suivante :

$$(h_1, \dots, h_n) \sim (h'_1, \dots, h'_n)$$

si et seulement si pour toute formule $\Phi \in \mathbf{F}$ on a

$$\Phi(h_1, \dots, h_n) \iff \Phi(h'_1, \dots, h'_n),$$

et il suffit de le vérifier lorsque Φ est de la forme $\varphi \leq r$ où φ est une fonction c -affine à exposants entiers et r un élément de Δ .

8.1.4. Remarque. — Bien que sa définition mette en jeu tous les groupes abéliens divisibles ordonnés Δ -colorés, $\mathbb{G}_n$ est bien un ensemble : on peut en effet l'identifier par construction à un sous-ensemble de $\mathbf{F}^{\{0,1\}}$.

Si Φ est un élément de $\mathbf{F}$, sa validité en un élément donné g de $\mathbb{G}_n$ est bien définie : elle se teste sur n'importe quel n -uplet représentant g .

8.1.5. Remarque. — Pour définir $\mathbb{G}_m$ on aurait pu tout aussi bien partir de l'ensemble $\mathbf{F}^{\mathbf{Q}}$ des formules en n variables libres $x_1, \dots, x_n$ à paramètres dans Δ dans le langage des groupes abéliens *divisibles* ordonnés, qui est le langage des groupes abéliens ordonnés auquel on adjoint les symboles d'élévation à une puissance rationnelle. Cela provient du fait que pour toute $\Phi \in \mathbf{F}^{\mathbf{Q}}$ il existe $\Psi \in \mathbf{F}$ telle que pour tout groupe abélien divisible ordonné Δ -coloré H et tout $(h_1, \dots, h_n) \in H^n$ on ait $\Phi(h_1, \dots, h_n) \iff \Psi(h_1, \dots, h_n)$.

8.1.6. — Soit $g \in \mathbb{G}_n$. Choisissons un groupe abélien ordonné divisible Δ -coloré H et un représentant $(h_1, \dots, h_n) \in H^n$ de g . Le groupe H n'est pas canonique, mais par définition de la relation d'équivalence utilisée pour définir $\mathbb{G}_n$, le sous-groupe de H engendré par Δ et les $h_i^{\mathbf{Q}}$ est bien défini à unique isomorphisme près comme groupe abélien ordonné divisible Δ -coloré muni d'un n -uplet $(h_1, \dots, h_n)$; nous noterons ce groupe $\Theta(g)$ et $(x_1(g), \dots, x_n(g))$ le n -uplet $(h_1, \dots, h_n)$.

Si $\varphi = a \prod x_i^{e_i}$ est une application c -affine (avec $a \in \Delta$ et les e_i dans $\mathbf{Q}$) nous noterons $\varphi(g)$ l'élément $a \prod x_i(g)^{e_i}$ de $\Theta(g)$.

8.1.7. — Soit $D(\mathbf{R}_{>0}^n)$ l'ensemble des parties de $\mathbf{R}_{>0}^n$ définissables comme le lieu de validité d'une formule Φ appartenant à $\mathbf{F}^{\mathbf{Q}}$ (ou à $\mathbf{F}$ si l'on préfère, voir la remarque 8.1.5 ci-dessus). C'est aussi la sous-algèbre de Boole de $\mathcal{P}(\mathbf{R}_{>0}^n)$ engendrée par les c -polytopes (cette notation est donc compatible avec celle introduite en 3.3.1). Si $P \in D(\mathbf{R}_{>0}^n)$ nous noterons $D(P)$ la sous-algèbre de Boole de $\mathcal{P}(P)$ formée des parties qui appartiennent à $D(\mathbf{R}_{>0}^n)$; lorsque P est un c -polytope compact, cette notation est compatible avec celle introduite en 6.2.1.

Soit $P \in D(\mathbf{R}_{>0}^n)$ et soit Φ une formule appartenant à $\mathbf{F}^{\mathbf{Q}}$ définissant P . Si Ψ est une autre formule appartenant à $\mathbf{F}^{\mathbf{Q}}$ et définissant P , la formule

$$\forall(x_1, \dots, x_n) \Phi \iff \Psi$$

ne comporte plus de variables libres et vaut sur $\mathbf{R}_{>0}^n$, et partant sur tout groupe abélien ordonné divisible et Δ -coloré (d'après 8.1.2). Le lieu de validité de Φ sur $\mathbb{G}_n$ ne dépend donc que de P et non du choix de Φ , et sera noté $\dot{P}$. Si $P = \mathbf{R}_{>0}^n$ alors $\dot{P} = \mathbb{G}_n$.

On remarque que P se plonge naturellement dans $\dot{P}$ (l'injectivité provient du fait que si p et q sont deux points distincts de P on peut trouver une application c -affine ψ telle que $\psi(p) < 1$ et $\psi(q) \geq 1$).

8.1.8. — Soit P appartenant à $D(\mathbf{R}_{>0}^n)$ et soit φ une application c -définissable de P vers $\mathbf{R}_{>0}$, dans le langage des groupes abéliens ordonnés et à paramètres dans Δ . Cela signifie qu'il existe une famille finie (P_i) d'éléments de $D(P)$ tels que $P = \bigcup P_i$ et, pour tout i une application c -affine φ_i de $\mathbf{R}_{>0}^n$ dans $\mathbf{R}_{>0}$, telles que $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ pour tout i et tout $x \in P_i$.

Soit g un point de $\dot{P}$. Il existe alors i tel que $g \in \dot{P}_i$, et l'élément $\varphi_i(g)$ de $\Theta(g)$ ne dépend pas du choix de i ; on le note $\varphi(g)$.

8.2. Types et ultrafiltres, valuations c -polytopales. — Nous nous proposons maintenant d'interpréter l'ensemble des types $\dot{P}$ comme un ensemble d'ultrafiltres, qui coïncidera avec l'espace friable associé à P lorsque ce dernier est compact; nous en donnerons également dans ce cas une description «valuative».

8.2.1. — Si P est un élément de $D(\mathbf{R}_{>0}^n)$ nous noterons $\tilde{P}$ l'ensemble des ultrafiltres d'éléments de $D(P)$. Si P est un c -polytope compact, la notation $\tilde{P}$ est compatible avec celle introduite en 6.2.1 dans le cadre des espaces domaniaux compacts généraux (le c -polytope P étant vu comme un espace domanial *via* sa structure linéaire par morceaux).

8.2.2. Proposition. — Soit P appartenant à $D(\mathbf{R}_{>0}^n)$. La formule

$$g \mapsto \{Q \in D(P), g \in \dot{Q}\}$$

établit une bijection entre $\dot{P}$ et $\tilde{P}$.

Démonstration. — Pour tout $g \in G$, notons $\Phi(g)$ l'ensemble des éléments Q de $D(P)$ tels que $g \in \dot{Q}$. Il est immédiat que $\Phi(g)$ est un ultrafiltre d'éléments de $D(P)$. Réciproquement soit $\mathcal{F}$ un tel ultrafiltre. Nous allons montrer qu'il existe un unique $g \in \dot{P}$ tel que $\mathcal{F} = \Phi(g)$.

Soit A le groupe des applications c -affines sur $\mathbf{R}_{>0}^n$, et soit B l'ensemble des éléments φ de A tels que $\{p \in P, \varphi(p) = 1\}$ appartienne à $\mathcal{F}$. C'est un sous-groupe de A (pour la stabilité par produit noter que $\{p \in P, \varphi(p)\psi(p) = 1\}$ contient l'intersection de $\{p \in P, \varphi(p) = 1\}$ et $\{p \in P, \psi(p) = 1\}$). Soit H le quotient A/B . C'est un groupe abélien divisible dans lequel Δ se plonge naturellement. Définissons sur A la relation $\leq$ en décrétant que $\varphi \leq \psi$ si $\{p \in P, \varphi(p) \leq \psi(p)\}$ appartient à $\mathcal{F}$. Cette relation passe au quotient par B et fait ainsi de H un groupe abélien divisible Δ -coloré ordonné. L'image g de $(x_1, \dots, x_n)$ dans H^n est alors un élément de $\mathbb{G}_n$, qui appartient à $\dot{P}$: en effet si P est défini par la formule

$$\bigvee_i \bigwedge_j \varphi_{ij} \bowtie_{ij} 1$$

où les φ_{ij} sont des applications c -affines et les $\bowtie_{ij}$ des symboles appartenant à $\{\leq, >\}$, le fait que $\mathcal{F}$ soit un ultrafiltre assure qu'il existe i tel que l'élément de $\mathcal{D}$ défini par la formule $\bigwedge_j \varphi_{ij} \bowtie_{ij} 1$ appartienne à $\mathcal{F}$, et cette formule est alors satisfaite en g , qui appartient dès lors à $\dot{P}$.

Vérifions que $\Phi(g) = \mathcal{F}$. Soit $Q \in \mathcal{D}_P$. Décrivons Q par une formule

$$\bigvee_a \bigwedge_b \psi_{ab} \bowtie^{ab} 1$$

où les ψ_{ab} sont des applications c -affines et les $\bowtie^{ab}$ des symboles appartenant à $\{\leq, >\}$. Le point g appartient à $\dot{Q}$ si et seulement il existe a tel que $\bigwedge_b \psi_{ab}(g) \bowtie^{ab} 1$. Mais par définition du groupe ordonné Δ -coloré H , cette dernière condition est satisfaite si et seulement si le sous-ensemble de P défini par la conjonction $\bigwedge_b \psi_{ab} \bowtie^{ab} 1$ appartient à $\mathcal{F}$. Puisque $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, il s'ensuit que $g \in \dot{Q}$ si et seulement si $Q \in \mathcal{F}$, ce qui montre que $\Phi(g) = \mathcal{F}$. Et il découle de la construction même de g que c'est le seul antécédent possible de $\mathcal{F}$ par Φ . $\square$

8.2.3. Remarque. — Soit P un élément de $D(\mathbf{R}_{>0}^n)$, que l'on suppose localement fermé dans $\mathbf{R}_{>0}^n$. C'est alors un espace c -linéaire par morceaux, qui possède donc un espace friable $\check{P}$. Celui-ci est par définition la colimite des espaces $\check{Q}$ où Q parcourt l'ensemble des c -polytopes compacts contenus dans P . Pour un tel Q l'espace $\check{Q}$ coïncide par définition avec $\dot{Q}$, qui s'identifie à $\dot{Q}$ par la proposition 8.2.2 ci-dessus. Il en résulte que $\check{P}$ s'identifie lui-même au sous-ensemble de $\check{P}$ égal à la réunion des $\check{Q}$ où Q parcourt l'ensemble des c -polytopes compacts de $\mathbf{R}_{>0}^n$ contenus dans P .

Supposons maintenant que $P = \mathbf{R}_{>0}^n$, auquel cas $\check{P} = \mathbb{G}_n$. On peut alors identifier $\check{P}$ au sous-ensemble $\bigcup \dot{Q}$ de $\mathbb{G}_n$ où Q parcourt l'ensemble des c -polytopes compacts de $\mathbf{R}_{>0}^n$. Par cofinalité, on peut en fait se contenter de faire parcourir à Q l'ensemble des pavés $[R^{-1}, R]^n$ pour $R \in \Delta \cap (1, +\infty)$. En conséquence, $\check{P}$ s'identifie à l'ensemble des $g \in \mathbb{G}_n$ tel qu'il existe $R > 1$ dans Δ pour lequel on a $R^{-1} \leq x_i(g) \leq R$ quel que soit i , c'est-à-dire encore à l'ensemble des $g \in \mathbb{G}_n$ tel que le groupe abélien ordonné Δ -coloré $\Theta(g)$ soit bridé.

8.2.4. — Soit P un c -polytope compact de $\mathbf{R}_{>0}^n$. Une *valuation c -polytopale* g sur P est une application $\Lambda_c(P) \rightarrow H$, où H est un groupe abélien divisible ordonné Δ -coloré, que l'on note $\psi \mapsto \psi(g)$ et qui possède la propriété suivante : si $\psi_1, \dots, \psi_m$ sont des éléments de $\Lambda_c(P)$, toute formule du langage des groupes ordonnés G -colorés satisfaite par $(\psi_1(p), \dots, \psi_m(p))$ pour tout $p \in P$ est encore satisfaite par $(\psi_1(g), \dots, \psi_m(g))$. On dit que deux telles valuations c -polytopales g et g' , à valeurs respectivement dans H et H' , sont équivalentes s'il existe un groupe abélien divisible Δ -coloré H'' , deux morphismes injectifs croissants de groupe Δ -colorés $H'' \hookrightarrow H$ et $H'' \hookrightarrow H'$, et une factorisation de g et g' par une même valuation c -polytopale à valeurs dans H'' .

Si g est une valuation c -polytopale sur P à valeurs dans un certain groupe abélien divisible ordonné Δ -coloré, l'ensemble des $\psi(g)$ pour $\psi \in \Lambda_c(P)$ est un sous-groupe divisible de H contenant Δ , qui est simplement le sous-groupe engendré par Δ et les $x_i(g)^{\mathbf{Q}}$. Il ne dépend à unique isomorphisme près que de la classe d'équivalence de g , et comme nous ne considérerons les valuations c -polytopales qu'à équivalence près, nous nous permettrons de le noter $\Theta(g)$.

Le paragraphe 8.1.8 permet d'associer à tout élément g de $\check{P}$ une application $\psi \mapsto \psi(g)$ définie sur un certain ensemble d'applications contenant $\Lambda_c(P)$, et sa

restriction à $\Lambda_c(P)$ est une valuation c -polytopale. Réciproquement si g est une valuation polytopale sur P , l'élément $(x_i(g), \dots, x_n(g))$ de $\Theta(g)$ définit un point de $\check{P}$, et ces deux constructions mettent en bijection $\check{P}$ avec l'ensemble des classes d'équivalence de valuations c -polytopales sur P ; nous identifierons désormais librement ces deux ensembles, et les notations $\Theta(g)$ de ce paragraphe et du paragraphe 8.1.8 ci-dessus sont bien compatibles modulo cette identification. L'avantage de la notion de valuation polytopale est qu'elle ne fait référence qu'à la structure c -linéaire par morceaux de P , et pas à sa description comme partie de $\mathbf{R}_{>0}^n$ (elle ne fait jouer aucun rôle particulier aux fonctions coordonnées x_i); elle garde un sens sur un espace c -linéaire par morceaux quelconque.

8.2.5. — Soit P un c -polytope compact. En combinant 8.2.4 et la proposition 8.2.2 on obtient une bijection entre l'ensemble des valuations c -polytopales sur P et $\check{P}$, qui lui-même est égal à $\check{P}$ puisque P est un espace c -linéaire par morceaux compact.

8.2.6. Remarque. — Soit P un espace c -linéaire par morceaux. Si P est compact et *plongeable* au sens de 3.2.8, il résulte de ce qui précède que $\check{P}$ s'identifie à l'ensemble des valuations c -polytopales sur P , dont la définition ne fait référence qu'à la structure abstraite d'espace c -linéaire par morceaux de P et ne nécessite pas de choix de plongement.

Ne faisons plus d'hypothèse sur P . Soit g un point de $\check{P}$. Par définition, g appartient à $\check{Q}$ pour un certain sous-espace c -linéaire par morceaux compact Q de P , que l'on peut supposer plongeable. On peut alors interpréter g comme une valuation c -polytopale sur Q . Il résulte des constructions (et d'une réduction immédiate au cas plongé) que $\Theta(g)$ ne dépend pas du choix de Q . Si φ est une application c -linéaire par morceaux définie sur une partie c -linéaire par morceaux R de P telle que $g \in \check{R}$ on peut choisir Q comme ci-dessus en demandant de plus que $Q \subset R$, ce qui permet de restreindre φ à Q et partant de donner un sens à l'élément $\varphi(g)$ de $\Theta(g)$; cet élément ne dépend pas du choix de Q (là encore, on le voit par réduction au cas plongé). On a donc défini une valuation c -polytopale $\varphi \mapsto \varphi(g)$ sur $\text{colim } \Lambda_c(R)$, la colimite étant prise sur l'ensemble des parties c -linéaires par morceaux R de P telles que $g \in \check{R}$.

8.3. Squelettes adiques. — On fixe un espace k -analytique Γ -strict X . On désigne à nouveau par c le couple $(\mathbf{Q}, (\Gamma \cdot |k^\times|)^{\mathbf{Q}})$.

8.3.1. — Soit Σ un c -squelette de X . Par définition, sa structure c -linéaire par morceaux est simplement la structure domaniale induite par la structure domaniale Γ -strictement analytique de X . Nous noterons $\Sigma^{\Gamma\text{-ad}}$ l'espace friable associé à l'espace domanial Σ . L'inclusion $\Sigma \hookrightarrow X$ permet d'identifier $\Sigma^{\Gamma\text{-ad}}$ à une partie localement fermée de $X^{\Gamma\text{-ad}}$, fermée si Σ est fermée; si $x \in \Sigma^{\Gamma\text{-ad}}$ alors $x^\# \in \Sigma$, et $\Sigma^{\Gamma\text{-ad}} \cap X = \Sigma$ (voir 6.3.4).

8.3.2. — Soit x un point de $\Sigma^{\Gamma\text{-ad}}$. Il résulte de notre étude générale de l'espace friable associé à un espace c -linéaire par morceaux (voir la sous-section 8 et plus particulièrement 8.2.4 et la remarque 8.2.6) qu'au point x est associé un groupe abélien divisible ordonné, $(|k^\times| \cdot \Gamma)^{\mathbf{Q}}$ -coloré et bridé $\theta(x)$ et une valuation c -polytopale $\lambda \mapsto \lambda(x)$, à valeurs dans $\theta(x)$ et dont le domaine de définition est $\text{colim } \Lambda_c(Q)$, la

colimite étant prise sur l'ensemble (filtrant) des parties c -linéaires par morceaux Q de Σ telles que $x \in Q^{\Gamma\text{-ad}}$.

Soit V un domaine analytique Γ -strict de X tel que $x \in V^{\Gamma\text{-ad}}$ et soit f une fonction analytique inversible sur V . L'intersection $V \cap \Sigma$ est une partie c -linéaire par morceaux de Σ , et la restriction de $|f|$ à $V \cap \Sigma$ est c -linéaire par morceaux. Le point x appartient à $(V \cap \Sigma)^{\Gamma\text{-ad}}$, si bien que $|f|(x)$ est un élément bien défini du groupe $\theta(x)$.

Il découle alors de nos constructions que

$$\theta(x) = (|\mathcal{H}(x)^\times| \cdot \Gamma)^{\mathbf{Q}} \text{ et } |f|(x) = |f(x)|.$$

8.3.3. Exemple (Le cas de $S_n^{\Gamma\text{-ad}}$). — Soit n un entier. L'espace c -linéaire par morceaux S_n est isomorphe à $\mathbf{R}_{>0}^n$ via $(|T_1|, \dots, |T_n|)$; modulo cette identification, on peut parler d'application c -affine sur S_n : c'est une application de S_n dans $\mathbf{R}_{>0}$ de la forme $a \prod |T_i|^{e_i}$ où $a \in (|k^\times| \cdot \Gamma)^{\mathbf{Q}}$ et où les r_i appartiennent à $\mathbf{Q}$.

Il résulte alors du lemme 8.2.2 et de la remarque 8.2.3 que la flèche $x \mapsto (|T_i(x)|)_i$ établit une bijection entre $S_n^{\Gamma\text{-ad}}$ et l'ensemble des n -uplets $(r_1, \dots, r_n)$ d'éléments d'un groupe abélien divisible $(|k^\times| \cdot \Gamma)$ -coloré et bridé, ces n -uplets étant considérés modulo la relation d'équivalence qui identifie deux n -uplets satisfaisant les mêmes inéquations monomiales à exposants rationnels et termes constants dans $|k^\times| \cdot \Gamma$. Soit $r = (r_1, \dots, r_n)$ un tel n -uplet; nous noterons η_r le point correspondant de $S_n^{\Gamma\text{-ad}} \subset (\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^{n, \Gamma\text{-ad}}$. Lorsqu'on considère $(r_1, \dots, r_n)$ à équivalence près, le groupe abélien ordonné $(|k^\times| \cdot \Gamma)$ -coloré et bridé dans lequel vivent les r_i est mal défini, mais son sous-groupe engendré par $(|k^\times| \cdot \Gamma)$ et les r_i est canonique, et nous le noterons $\Theta(r)$.

Nous allons maintenant décrire concrètement η_r , le point clef étant que toute application c -linéaire par morceaux de S_n dans $\mathbf{R}_{>0}$ peut être évaluée en η_r à partir des formules $|T_i(\eta_r)| = r_i$, la valeur obtenue étant un élément de $\Theta(r)$. Soit V un domaine analytique compact et Γ -strict de $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$ et soit f une fonction analytique inversible sur V . Posons $P = V \cap S_n$. Le compact P est une partie c -linéaire par morceaux de S_n et $|f|_P$ est c -linéaire par morceaux. En tant que c -polytope de $S_n \simeq \mathbf{R}_{>0}^n$, le compact P peut être décrit par une combinaison booléenne finie d'inégalités de la forme $\varphi \leq 1$ où φ est c -affine, et le point η_r appartient alors à $V^{\Gamma\text{-ad}}$ si et seulement si cette combinaison booléenne d'inégalités est satisfaite en η_r . Si c'est le cas $|f|_P(\eta_r)$ a un sens et $|f(\eta_r)|$ est précisément égal à l'élément $|f|_P(\eta_r)$ de $\Theta(r)$.

En particulier, supposons que f soit un polynôme de Laurent $\sum a_I T^I$ en $T_1, \dots, T_n$. On a alors $|f|_{S_n} = \max |a_I| \cdot |T^I|$, si bien que $|f(\eta_r)| = \max |a_I| r^I$. En fait cette formule caractérise le point η_r , et on peut même se contenter d'en supposer la validité pour les polynômes usuels (en degrés positifs). En effet, pour tout i , notons $r^\#$ la borne supérieure dans $\mathbf{R}_{>0}$ de $\{s \in (|k^\times| \cdot \Gamma)^{\mathbf{Q}}, s \leq r_i\}$ (qui existe puisque le groupe $|k^\times| \cdot \Gamma$ -coloré $\Theta(r)$ est bridé). Soit x un point de $((\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n)^{\Gamma\text{-ad}}$ tel que l'on ait $|\sum a_I T^I(x)| = \max |a_I| \cdot r^I$ pour tout polynôme $\sum a_I T^I \in k[T]$. On a alors par construction $|\sum a_I T^I(x^\#)| = \max |a_I| \cdot (r^\#)^I$ pour tout polynôme $\sum a_I T^I$; autrement dit, $x^\#$ est nécessairement égal au point $\eta_{r^\#}$ de S_n . Et comme l'image de $k[T]$ dans $\mathcal{H}(\eta_r^\#)$ engendre un sous-corps dense, l'application $\sum a_I T^I \mapsto |\sum a_I T^I(x)|$ détermine uniquement x (2.4.3), qui coïncide donc avec η_r .

8.3.4. Proposition. — Soit X un espace k -analytique Γ -strict de dimension $\leq n$ et soient $(f_1, \dots, f_n)$ des fonctions analytiques inversibles sur X . Soit φ le morphisme de X vers $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$ induit par les f_i et soit Σ le c -squelette $\varphi^{-1}(S_n)$. Soit $x \in X^{\Gamma\text{-ad}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le point x appartient à $\Sigma^{\Gamma\text{-ad}}$.
- (ii) La valuation x est d'Abhyankar et $f_1(x), \dots, f_n(x)$ est une base d'Abhyankar de $\mathcal{H}(x)$ sur k .

8.3.5. Remarque. — Au vu de l'exemple 8.3.3, l'assertion (ii) revient à demander que x appartienne à $\varphi^{-1}(S_n^{\Gamma\text{-ad}})$. La proposition peut donc se reformuler en disant simplement que $\Sigma^{\Gamma\text{-ad}} = \varphi^{-1}(S_n^{\Gamma\text{-ad}})$. (Par abus nous noterons encore φ l'application de $X^{\Gamma\text{-ad}}$ vers $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^{n,\Gamma\text{-ad}}$ induite par φ).

Démonstration. — Supposons que (i) soit satisfaite. Soit $P = \sum a_I T^I$ un polynôme à coefficients dans k , où $T = (T_1, \dots, T_n)$. Soit V_P le domaine analytique Γ -strict de X défini par la condition $|P(f)| = \max_I |a_I| \cdot |f|^I$ (où $f = (f_1, \dots, f_n)$). On a $\Sigma \subset V_P$ par définition de Σ , si bien que $\Sigma^{\Gamma\text{-ad}} \subset V_P^{\Gamma\text{-ad}}$. Puisque (i) est satisfaite par hypothèse, il s'ensuit que $x \in V_P^{\Gamma\text{-ad}}$, ce qui veut dire que $|P(f)(x)| = \max_I |a_I| \cdot |f(x)|^I$. Ceci valant pour tout P , l'assertion (ii) est satisfaite.

Supposons réciproquement que (ii) soit satisfaite. Pour montrer (i) on peut remplacer X par n'importe quel domaine affinoïde Γ -strict V de X tel que $x \in V^{\Gamma\text{-ad}}$, ce qui permet de supposer que X est affinoïde. L'assertion à prouver étant insensible aux phénomènes de nilpotence on peut supposer X réduit. Comme $x \in \Sigma^{\Gamma\text{-ad}}$, le point $x^\#$ appartient à Σ , si bien que $\varphi(x^\#)$ appartient à S_n . Ceci entraîne que φ est plat en $x^\#$, et on sait par ailleurs que $\varphi^{-1}(\varphi(x^\#))$ est fini. Quitte à remplacer X par un voisinage affinoïde Γ -strict V de $x^\#$ dans X (notons qu'on a automatiquement $x \in V^{\Gamma\text{-ad}}$) on peut donc supposer que φ est plat et que $\varphi^{-1}(\varphi(x^\#)) = \{x^\#\}$ (ensemblément). Comme φ est plat et X compact, $\varphi(X)$ est un domaine analytique compact et Γ -strict U de $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$. Soit T l'intersection $S_n \cap U$. Le morphisme φ induit une surjection c -linéaire par morceaux de Σ sur T , à fibres finies. Il existe alors une famille finie (Σ_j) de parties c -linéaires par morceaux compactes de Σ qui recouvrent ce dernier et sont telles que $\varphi|_{\Sigma_j}$ soit injective pour tout j . Quitte à raffiner ce recouvrement on peut supposer que chacun des Σ_j est de la forme $V_j \cap \Sigma$ où V_j est un domaine affinoïde Γ -rationnel de X . Pour tout j , posons $T_j = \varphi(\Sigma_j)$. Les T_j sont des parties c -linéaires par morceaux compactes de T et $T = \bigcup_j T_j$.

L'hypothèse (ii) implique que $\varphi(x)$ est d'Abhyankar et que $(|T_i(\varphi(x))|)_i$ en est une base d'Abhyankar. En vertu de l'exemple 8.3.3, cela revient à dire que $\varphi(x)$ appartient à $T^{\Gamma\text{-ad}}$. Comme $T = \bigcup T_j$, l'ensemble J des indices j tels que $\varphi(x) \in T_j^{\Gamma\text{-ad}}$ est non vide. Soit $j \in J$. Le morphisme φ induit un isomorphisme c -linéaire par morceaux $\Sigma_j \simeq T_j$. Il existe donc un unique antécédent de $\varphi(x)$ sur $\Sigma_j^{\Gamma\text{-ad}}$, que nous noterons x_j . Remarquons que pour un tel j on a $\varphi(x_j^\#) = x^\#$, ce qui entraîne que $x_j^\# = x^\#$ d'après nos hypothèses. Nous allons maintenant démontrer que x est égal à l'un des x_j , ce qui permettra de conclure.

Soit f une fonction analytique inversible définie sur un voisinage affinoïde Γ -strict Ω de $x^\#$ dans X . Comme $|\mathcal{H}(\varphi(x))^\times|^\mathbf{Q} = |\mathcal{H}(x)^\times|^\mathbf{Q}$ il existe $a \in k^\times$, des entiers relatifs

$e_1, \dots, e_n$ et un entier $N > 0$ tel que $|f^N(x)| = |a| \cdot |\prod T_i(\varphi(x))^{e_i}| = |a| \cdot |\prod f_i(x)^{e_i}|$. Soit V le domaine affinoïde Γ -strict de Ω défini par l'égalité $|f^N| = |a| \cdot \prod |f_i^{e_i}|$. Par construction, $V^{\Gamma\text{-ad}}$ contient x . Par platitude de φ , l'image $W := \varphi(V)$ est un domaine analytique compact et Γ -strict de U , qui contient $\varphi(x)$. Le point $\varphi(x)$ appartient donc à $(T \cap W)^{\Gamma\text{-ad}} = T^{\Gamma\text{-ad}} \cap W^{\Gamma\text{-ad}}$. Or $T \cap W$ est égal à $\varphi(\Sigma \cap V) = \bigcup_j \varphi(\Sigma_j \cap V)$, chacun des $\varphi(\Sigma_j \cap V)$ est un compact c -linéaire par morceaux Υ_j de T_j , et φ induit pour tout j un isomorphisme $\Sigma_j \cap V \simeq \Upsilon_j$. Le point $\varphi(x)$ appartient alors à $\Upsilon_j^{\Gamma\text{-ad}}$ pour un certain j , et est donc l'image d'un unique point x' de $(\Sigma_j \cap V)^{\Gamma\text{-ad}} \subset \Sigma_j^{\Gamma\text{-ad}}$; il s'ensuit que $j \in J$ et que $x' = x_j$. On a alors

$$|f^N(x)| = |a| \cdot \left| \prod T_i(\varphi(x))^{e_i} \right| = |a| \cdot \left| \prod f_i(x_j)^{e_i} \right| = |f^N|(x_j),$$

la dernière égalité résultant du fait que $x_j \in V^{\Gamma\text{-ad}}$, et de la définition de V . On en déduit que $|f(x)| = |f(x_j)|$. On a donc démontré que pour toute fonction analytique f définie et inversible au voisinage de $x^\#$ sur X , il existe $j \in J$ tel que $|f(x)| = |f(x_j)|$.

Nous allons maintenant conclure. Puisque $x_j^\# = x^\#$ pour tout $j \in J$, les valuations résiduelles x^b et x_j^b pour $j \in J$ sont toutes des valuations sur le corps résiduel $\widetilde{\mathcal{H}(x^\#)}^\Gamma$, qui induisent la même valuation $\varphi(x)^b$ sur $\widetilde{\mathcal{H}(\varphi(x^\#))}^\Gamma$. Or comme $\widetilde{\mathcal{H}(x^\#)}^\Gamma$ est une extension finie de $\widetilde{\mathcal{H}(\varphi(x^\#))}^\Gamma$, les extensions de $\varphi(x)^b$ à $\widetilde{\mathcal{H}(x^\#)}^\Gamma$ sont indépendantes, par la variante graduée d'un résultat classique de théorie des valuations. Comme il résulte de ce qui précède que pour tout α non nul dans $\widetilde{\mathcal{H}(x^\#)}^\times$ il existe $j \in J$ tel que $|\alpha(x^b)| = |\alpha(x_j^b)|$, on en déduit qu'il existe $j \in J$ tel que $x^b = x_j^b$, ce qui signifie que $x = x_j$. $\square$

8.3.6. — Soient $X, f_1, \dots, f_n, \varphi$ et Σ comme dans la proposition 8.3.4 ci-dessus. Soit ξ un point de Σ . L'ensemble des points x de $X^{\Gamma\text{-ad}}$ tels que $x^\# = \xi$ s'identifie à $(X, \xi)^\Gamma$; l'ensemble des points x de $\Sigma^{\Gamma\text{-ad}}$ tels que $x^\# = \xi$ apparaît ainsi comme un sous-ensemble de $(X, \xi)^\Gamma$ que nous nous proposons de décrire.

Pour ce faire, faisons une première remarque. Soit $(g_1, \dots, g_n)$ une famille de fonctions analytiques inversibles sur X obtenues en appliquant (multiplicativement) une matrice de $M_n(\mathbf{Z})$ de déterminant non nul à $(f_1, \dots, f_n)$, puis en multipliant chacune des fonctions obtenues par un élément de $k^\times$. Soit ψ le morphisme $X \rightarrow (\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$ induit par les g_i . Pour tout point y de $X^{\Gamma\text{-ad}}$, la famille $(\widetilde{g_i(y)})$ est algébriquement indépendante sur $\tilde{k}$ si et seulement c'est le cas de la famille $(\widetilde{f_i(y)})$. Par conséquent $\Sigma = \psi^{-1}(S_n)$ et $\Sigma^{\Gamma\text{-ad}} = \psi^{-1}(S_n^{\Gamma\text{-ad}})$ (remarque 8.3.5).

Choisissons alors $(g_1, \dots, g_n)$ comme ci-dessus de sorte que la propriété suivante soit satisfaite : il existe r tel que $|g_i(\xi)|$ appartienne à Γ pour tout $i \leq r$, et tel que les $|g_i(\xi)|$ pour $i > r$ soient $\mathbf{Q}$ -linéairement indépendants modulo $|\mathcal{H}(\xi)^\times|^\mathbf{Q} \cap (\Gamma \cdot |k^\times|)^\mathbf{Q}$. Sous cete hypothèse les $\widetilde{g_i(\xi)}$ pour $1 \leq i \leq r$ forment alors une base de transcendance de $\widetilde{\mathcal{H}(\xi)}^\Gamma$ sur $\tilde{k}$.

Soit x un point de $X^{\Gamma\text{-ad}}$ tels que $x^\# = \xi$. Compte-tenu de la définition explicite du point $x^\flat$ de $(\widetilde{X, \xi})^\Gamma$ qui correspond à x , on voit que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $|\sum a_I g^I(x)| = \max |a_I| \cdot |g(x)|^I$ pour tout polynôme $\sum a_I T^I \in k[T_1, \dots, T_n]$;
- (ii)
- (iii) $|\sum a_I g^I(x^\flat)| = \max |a_I| \cdot |g(x^\flat)|^I$ pour tout polynôme $\sum a_I T^I \in k[T_1, \dots, T_r]$.

Il résulte de ce qui précède que l'ensemble des points x de $\Sigma^{\Gamma\text{-ad}}$ tels que $x^\# = \xi$ s'identifie, en tant que sous-ensemble de $(\widetilde{X, \xi})^\Gamma$, à celui formé par les valuations de $\widetilde{\mathcal{H}(\xi)}^\Gamma$ dont les $\widetilde{g_i(\xi)}$ pour $1 \leq i \leq r$ forment une base d'Abhyankar sur $\widetilde{k}^\Gamma$.

9. Squelettes élémentaires et accessibles

9.1. Squelettes élémentaires et G-localement élémentaires. — Soit X un espace k -analytique Γ -strict.

9.1.1. — Nous noterons $\mathcal{T}(X)$ l'ensemble des parties Σ de X possédant la propriété suivante : il existe un domaine analytique Γ -strict V de X , un entier d , un sous-espace analytique fermé Y de V purement de dimension d et un morphisme $f : Y \rightarrow (\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^d$ tel que Σ soit une partie c -linéaire par morceaux du c -squelette $f^{-1}(S_d)$ (que ce dernier soit un c -squelette résulte du théorème 5.1.3).

9.1.2. — Soit $\Sigma \in \mathcal{T}(X)$ et soient d, V, Y et f comme ci-dessus. Par construction, Σ est un c -squelette et $d_k(x) = d$ pour tout $x \in \Sigma$. Notons qu'on peut remplacer (V, Y, f) par $(V', Y', f|_{Y'})$ pour tout domaine analytique Γ -strict V' de X et tout sous-espace analytique fermé Y' de V' purement de dimension d et contenant Σ . Cela permet par exemple si besoin de supposer Y normal : on commence par remplacer Y par Y_{red} sans modifier V , puis l'on observe que tout point de y tel que $d_k(y) = d$ (et en particulier tout point de Σ) est alors contenu dans le lieu normal de Y ; puis l'on remplace (V, Y) par $(V', V' \cap Y)$ où V' est un ouvert de V tel que $V' \cap Y$ soit le lieu normal de Y . Cela permet aussi, si Σ est compact et V séparé, de supposer V compact, en remplaçant (V, Y) par $(V', V' \cap Y)$ pour n'importe quel domaine analytique compact et Γ -strict V' de V contenant Σ .

9.1.3. Définition. — Nous dirons qu'un c -squelette de X est *élémentaire* s'il appartient à $\mathcal{T}$.

9.1.4. Lemme. — Soit d un entier et soit X un espace k -analytique de dimension au plus d . Soit (X_i) une famille localement finie de domaines analytiques Γ -stricts fermés de X , et pour tout i soit f_i un morphisme de X_i vers $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^d$ et soit Σ_i une partie c -linéaire par morceaux fermée du c -squelette $f_i^{-1}(S_d)$. La réunion des Σ_i est un c -squelette de X .

Démonstration. — Introduisons quelques notations. On pose $\Sigma = \bigcup_i \Sigma_i$ et pour tout i l'on désigne par $(f_{i1}, \dots, f_{id})$ le d -uplet de fonctions inversibles sur X_i qui définit f_i .

L'assertion à prouver est G -locale, ce qui permet de supposer X affinoïde. La famille (X_i) est alors une famille finie de domaines analytiques Γ -stricts compacts de X . Soit $x \in X$ et soit I l'ensemble des indices i tels que $x \in X_i$. Pour tout $i \in I$ et tout j entre 1 et d , il existe une fonction analytique g_{ij} définie et inversible au voisinage de x telle que $|g_{ij}(x) - f_{ij}(x)| < |f_{ij}(x)|$. Soit V un voisinage affinoïde et Γ -strict de x tel que $V \cap X_j = \emptyset$ pour tout $j \notin I$, et tel que les g_{ij} soient toutes définies et inversibles sur V et satisfassent les inégalités $|g_{ij} - f_{ij}| < |f_{ij}|$ sur $V \cap X_i$ pour tout $i \in I$ et tout j . Posons $g_i = (g_{i1}, \dots, g_{id})$ pour tout $i \in I$. On a alors $((g_i)_{|V \cap X_i})^{-1}(S_d) = ((f_i)_{|V \cap X_i})^{-1}(S_d)$ pour tout $i \in I$, si bien que $\Sigma_i \cap V$ est contenu pour tout $i \in I$ dans le c -squelette $g_i^{-1}(S_d)$, et *a fortiori* dans le c -squelette $T := \bigcup_i g_i^{-1}(S_d)$. Il en va de même de $\Sigma_i \cap V$ pour $i \notin I$ car alors $\Sigma_i \cap V = \emptyset$. Par conséquent $\Sigma \cap V$ est la réunion finie des parties c -linéaires par morceaux compactes $\Sigma_i \cap V$ de T ; c'est donc une partie c -linéaire par morceaux compacte de T , et en particulier un c -squelette. Le point x ayant été arbitrairement choisi, Σ est un c -squelette. $\square$

9.1.5. Proposition. — *Soit Σ une partie de X possédant un G -recouvrement par des c -squelettes élémentaires. La partie Σ est alors un c -squelette.*

Démonstration. — L'assertion est locale sur Σ , ce qui permet de supposer que X est compact et qu'il existe une famille finie $(\Sigma_i)_{i \in I}$ de c -squelettes élémentaires compacts de X tels que $\Sigma = \bigcup_i \Sigma_i$. Pour tout i on peut choisir un domaine analytique compact et Γ -strict V_i de X , un sous-espace analytique fermé Y_i de V_i purement de dimension d_i pour un certain d_i , et un morphisme $f_i: Y_i \rightarrow (\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^{d_i}$ tel que Σ_i soit une partie c -linéaire par morceaux de $f_i^{-1}(S_{d_i})$.

Comme chaque Σ_i est un c -squelette compact et comme les Σ_i recouvrent Σ il suffit, pour prouver que Σ est un c -squelette, de démontrer que pour tout i , le compact Σ_i est un domaine de Σ pour la structure domaniale naturelle de ce dernier, c'est-à-dire qu'il est égal à la trace sur Σ d'un domaine analytique compact et Γ -strict de X . Fixons donc i . Pour tout j , nous noterons $(F_{j\ell})_{\ell \in \Lambda_j}$ la famille finie des composantes irréductibles de $Y_j \cap V_i$, et pour tout (j, ℓ) nous poserons $\Sigma_{j\ell} = \Sigma_j \cap F_{j\ell}$.

Soit $\ell \in \Lambda_i$ et soit (j, m) un couple d'indices.

Si $d_j \neq d_i$ alors $\Sigma_{i\ell} \cap \Sigma_{jm} = \emptyset$, puisque $d_k(x) = d_i$ (resp. d_j) pour tout $x \in \Sigma_i$ (resp. Σ_j).

Supposons que $d_j = d_i$ et que F_{jm} n'est pas une composante irréductible de $V_j \cap F_{i\ell}$. L'intersection $F_{i\ell} \cap F_{jm}$ est alors un fermé de Zariski de $V_j \cap V_i$ de dimension $< d_i$, et il ne contient donc aucun point de Σ_i ni de Σ_j ; par conséquent, $\Sigma_{i\ell} \cap \Sigma_{jm} = \emptyset$.

Les $\Sigma_{i\ell}$ pour ℓ variable sont deux à deux disjoints. Il s'ensuit en vertu de ce qui précède qu'il existe une famille $(W_\ell)_{\ell \in \Lambda_i}$ de domaines analytiques compacts et Γ -stricts deux à deux disjoints de V_i tels que :

- ◊ W_ℓ contient $\Sigma_{i\ell}$ pour tout ℓ ;
- ◊ pour tout ℓ et tout (j, m) tel que $d_j \neq d_i$ ou tel que F_{jm} ne soit pas une composante irréductible de $V_j \cap F_{i\ell}$, on a $W_\ell \cap \Sigma_{jm} = \emptyset$.

Pour tout $\ell \in \Lambda_i$, soit $\mathcal{J}(\ell)$ l'ensemble des couples (j, m) tels que $d_j = d_i$ et que F_{jm} soit une composante irréductible de $V_j \cap F_{i\ell}$. Pour tout ℓ l'intersection de Σ et

W_ℓ est par construction la réunion de $\Sigma_{i\ell}$ et de parties de la forme $\Sigma_{jm} \cap W_\ell$, où $(j, m) \in \mathcal{J}(\ell)$.

Soit $\ell \in \Lambda_i$ et soit $(j, m) \in \mathcal{J}(\ell)$. Le c -squelette Σ_{jm} est contenu dans la composante irréductible F_{jm} du domaine analytique Γ -strict $V_j \cap F_{i\ell}$ de $F_{i\ell}$. Puisqu'il est constitué de points x tels que $d_k(x) = d_i$, ce c -squelette ne rencontre aucune autre composante irréductible de $V_j \cap F_{i\ell}$; il est donc contenu dans un domaine analytique compact et Γ -strict U_{jm} de $V_j \cap F_{i\ell}$ qui lui-même n'en rencontre que la composante F_{jm} . Le c -squelette Σ_{jm} est une partie c -linéaire par morceaux de $((f_j)|_{U_{jm}})^{-1}(S_{d_i})$, et $\Sigma_{jm} \cap W_\ell$ est dès lors une partie c -linéaire par morceaux de $((f_j)|_{U_{jm} \cap W_\ell})^{-1}(S_{d_i})$.

Ceci valant pour tout $(j, m) \in \mathcal{J}(\ell)$, il résulte du lemme 9.1.4 que $\Sigma \cap W_\ell$ est un c -squelette de $F_{i\ell}$. Comme $\Sigma_{i\ell}$ en est une partie c -linéaire par morceaux compacte, il existe un domaine analytique Γ -strict et compact W'_ℓ de W_ℓ tel que $\Sigma_{i\ell} = \Sigma \cap W'_\ell$.

On a dès lors par construction $\Sigma_i = (\coprod_\ell W'_\ell) \cap \Sigma$, ce qui achève la démonstration. $\square$

9.1.6. — Soit X un espace k -analytique Γ -strict. Nous dirons qu'un c -squelette Σ de X est *G-localement élémentaire* s'il possède un G -recouvrement par des c -squelettes élémentaires. En vertu de la proposition précédente, toute partie de X qui admet un G -recouvrement par des c -squelettes élémentaires est un c -squelette G -localement élémentaire.

Il résulte des définitions que si Σ est un c -squelette G -localement élémentaire, l'application $x \mapsto d_k(x)$ de Σ dans $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ est localement constante, et constante si Σ est élémentaire. De plus si x est un point de Σ , il existe un domaine analytique Γ -strict V de X et un fermé de Zariski Y de V , purement de dimension $d_k(x)$ et contenant x .

9.1.7. Lemme. — Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques Γ -stricts et soit Σ un c -squelette élémentaire de X . Supposons que f est de dimension relative nulle en tout point de $f^{-1}(\Sigma)$. L'image réciproque $f^{-1}(\Sigma)$ est alors un c -squelette élémentaire de Y .

Démonstration. — Quitte à remplacer Y par le lieu de dimension relative nulle de f (qui en est un ouvert de Zariski), on peut supposer f de dimension relative nulle. Par définition des c -squelettes élémentaires il existe un domaine analytique Γ -strict V de X , un sous-espace analytique fermé Z de V purement de dimension d pour un certain d , et un morphisme $g: Z \rightarrow (\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^d$ tel que Σ soit une partie c -linéaire par morceaux de $g^{-1}(S_d)$. Comme f est de dimension relative nulle, $f^{-1}(Z)$ est de dimension $\leq d$, et puisque $d_k(x) = d$ pour tout $x \in \Sigma$, on a $d_k(y) = d$ pour tout $y \in f^{-1}(\Sigma)$; par conséquent $f^{-1}(\Sigma)$ est contenu dans la réunion T des composantes irréductibles de dimension d de $f^{-1}(Z)$ (disons qu'on munit T de sa structure réduite). En particulier, $f^{-1}(\Sigma)$ est contenu dans le c -squelette $(g \circ (f|_T))^{-1}(S_d)$, et comme l'application $(g \circ (f|_T))^{-1}(S_d) \rightarrow g^{-1}(S_d)$ est c -linéaire par morceaux, $f^{-1}(\Sigma)$ est une partie c -linéaire par morceaux de $(g \circ (f|_T))^{-1}(S_d)$, et est en particulier un c -squelette élémentaire de Y . $\square$

9.1.8. Proposition. — Soient n et m deux entiers avec $n \geq m$, et soient X et Y deux espaces k -analytiques Γ -stricts, purement de dimension m et n respectivement.

Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme purement de dimension relative $n - m$ et soit Σ un c -squelette G -localement élémentaire de Y tel que $d_k(y) = n$ pour tout $y \in \Sigma$. On suppose que $f|_{\Sigma}$ est topologiquement propre. L'image $f(\Sigma)$ est alors un c -squelette G -localement élémentaire de X et $d_k(x) = m$ pour tout $x \in f(\Sigma)$.

Démonstration. — L'assertion est G -locale sur X , ce qui permet de supposer X compact. Comme $\Sigma \rightarrow X$ est propre, Σ est quasi-compact. Le c -squelette Σ possède un G -recouvrement $(\Sigma_i)_{i \in I}$ où chaque Σ_i est une partie compacte de Σ de la forme $Y_i \cap \Sigma$ pour un certain domaine analytique Γ -strict et compact Y_i de Y . Par quasi-compactité de Σ on peut supposer I fini et il suffit alors de démontrer que $f(\Sigma_i)$ est pour tout i un c -squelette G -localement élémentaire de X dont tout point x satisfait l'égalité $d_k(x) = m$. On peut donc supposer que Y et Σ sont compacts.

L'assertion à prouver est insensible aux phénomènes de nilpotence, ce qui permet de supposer X et Y réduits. Pour tout $y \in Y$ tel que $d_k(y) = n$ on a $d_k(f(y)) = m$ d'après le lemme 7.1 de [Duc21a], si bien que f est plat en y par le théorème 10.3.7 de [Duc18] (on utilise ici le fait que X est réduit); ceci vaut en particulier pour tout $y \in \Sigma$. Le lieu de platitude de f est un ouvert de Zariski de Y qui contient par ce qui précède le c -squelette compact Σ . Quitte à remplacer Y par un voisinage analytique compact et Γ -strict de Σ , on peut donc supposer f plat. Le c -squelette Σ possède par compacité un recouvrement fini par des c -squelettes élémentaires, et il suffit de prouver que l'image de chacun d'eux sur X est un c -squelette G -localement élémentaire (on a déjà signalé que $d_k(x) = m$ pour tout $x \in f(\Sigma)$). Ceci permet de supposer que Σ est élémentaire. Il existe donc un domaine analytique Γ -strict V de Y , un sous-espace analytique fermé Z de V (qu'on peut supposer réduit) purement de dimension n et un morphisme $g: Z \rightarrow (\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$ tel que $\Sigma \subset g^{-1}(S_d)$. Comme Z est purement de dimension n , c'est une union de composantes irréductibles de V . Puisque $d_k(y) = n$ pour tout $y \in \Sigma$, chaque point de Σ n'est situé que sur une composante irréductible de V . Il existe donc un domaine analytique compact et Γ -strict V' de V contenu dans Z et contenant Σ ; en remplaçant Y par V' on se ramène ainsi au cas où $Z = V = Y$, c'est-à-dire au cas où il existe $g: Y \rightarrow (\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^n$ tel que $\Sigma \subset g^{-1}(S_n)$.

Soit y un point du c -squelette Γ -adique $\Sigma^{\Gamma\text{-ad}}$ et soit x son image sur $X^{\Gamma\text{-ad}}$; le point $y^{\#}$ appartient à Σ , et l'on a donc $d_k(x^{\#}) = m$. La proposition 8.3.4 assure que la valuation Γ -colorée et bridée y est d'Abhyankar de rang n . Celle-ci est induite par une valuation d'Abhyankar η de rang n sur le corpoïde $\widetilde{\mathcal{H}(y^{\#})}$, qui est lui-même de degré de transcendance n sur $\tilde{k}$. La valuation x est induite par une valuation ξ sur le $\mathbf{R}_{>0}$ -corpoïde $\widetilde{\mathcal{H}(x^{\#})}$, qui est lui-même de degré de transcendance m sur $\tilde{k}$. Le degré de transcendance résiduel gradué total de η relativement à ξ est dès lors majoré par $n - m$, ce qui implique que le degré de transcendance résiduel de ξ est lui-même minoré par m , et il est finalement égal à m par inégalité d'Abhyankar. Par conséquent, ξ est d'Abhyankar de rang m et il en va dès lors de même de x . Il existe dès lors un voisinage affinoïde Γ -strict X' de $x^{\#}$ dans X et des fonctions analytiques inversibles $h_1, \dots, h_m$ sur X' , ainsi qu'un voisinage affinoïde Γ -strict Y' de $y^{\#}$ et des fonctions analytiques inversibles $h_{m+1}, \dots, h_n$ sur Y' , tels que $h_1(x), \dots, h_m(x)$ soit une base d'Abhyankar de x , et $h_1(y), \dots, h_n(y)$ soit une base d'Abhyankar de y . Soient T l'image réciproque

de S_m sur X' par $(h_1, \dots, h_m)$ et Υ l'image réciproque de S_n sur Y' par $(h_1, \dots, h_n)$. Posons $\Sigma' = \Sigma \cap Y'$. La réunion $R = \Sigma' \cup \Upsilon$ est un c -squelette de Y' , et $(\Sigma')^{\Gamma\text{-ad}}$ et $\Upsilon^{\Gamma\text{-ad}}$ sont deux ouverts compacts de $R^{\Gamma\text{-ad}}$. Par conséquent $\Upsilon^{\Gamma\text{-ad}} \cap (\Sigma')^{\Gamma\text{-ad}}$ est un compact ouvert de $(\Sigma')^{\text{ad}}$, et *a fortiori* de $\Sigma^{\Gamma\text{-ad}}$. Par construction ce compact ouvert contient y , et son image sur $X^{\Gamma\text{-ad}}$ est contenue dans $T^{\Gamma\text{-ad}}$.

Par ce qui précède et par compacité de $\Sigma^{\Gamma\text{-ad}}$ il existe une famille finie (Σ_i) de parties c -linéaires par morceaux compactes de Σ et, pour tout i , un c -squelette élémentaire T_i de X tels que les $\Sigma_i^{\Gamma\text{-ad}}$ recouvrent $\Sigma^{\Gamma\text{-ad}}$ et tels que l'image de $\Sigma_i^{\Gamma\text{-ad}}$ sur $X^{\Gamma\text{-ad}}$ soit contenue dans $T_i^{\Gamma\text{-ad}}$ pour tout i . Mais alors les Σ_i recouvrent Σ , et $f(\Sigma_i) \subset T_i$ pour tout i , si bien que $f(\Sigma)$ est contenu dans la réunion des T_i , qui est un c -squelette G -localement élémentaire de X en vertu du lemme 9.1.4. L'application de Σ dans $\bigcup T_i$ est automatiquement c -linéaire par morceaux d'après 4.3.4, et $f(\Sigma)$ est donc bien un c -squelette G -localement élémentaire de X . $\square$

9.1.9. Théorème. — Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme quasi-étale entre espaces k -analytiques Γ -stricts, et soit Σ un c -squelette G -localement élémentaire de Y . Supposons que $f|_{\Sigma}$ est topologiquement propre. L'image $f(\Sigma)$ est un c -squelette de X .

Démonstration. — La preuve comprend plusieurs étapes.

9.1.9.1. Réduction au cas fini galoisien. — L'assertion est G -locale sur X , ce qui permet de le supposer affinoïde. Le c -squelette Σ est alors quasi-compact, donc est réunion finie de c -squelettes Σ_i compacts, chaque Σ_i étant contenu dans un domaine analytique compact et Γ -strict Y_i de Y . Quitte à remplacer Y par $\coprod Y_i$ et Σ par $\coprod \Sigma_i$ (ce qui ne modifie pas $f(\Sigma)$), on peut supposer que Y et Σ sont compacts.

Soit x un point de X . Puisque f est quasi-étale et puisque Y est compact, il existe un voisinage affinoïde connexe Γ -strict V de x dans X et un recouvrement fini de $f^{-1}(V)$ par une famille V_i de domaines affinoïdes Γ -stricts de Y tels que chacun des V_i s'identifie, comme espace V -analytique, à un domaine affinoïde d'un V -espace fini étale connexe W_i . Soit $W \rightarrow V$ un revêtement fini galoisien connexe déployant tous les W_i . Chacun des $V_i \times_X W$ s'identifie alors comme W -espace à une union disjointe $\coprod W_{ij}$ de domaines affinoïdes Γ -stricts de W . Pour tout (i, j) , l'image réciproque Σ_{ij} de $\Sigma \cap V_i$ sur W_{ij} en est un c -squelette G -localement élémentaire en vertu du lemme 9.1.7, et il suffit de démontrer que l'image sur V de la réunion des Σ_{ij} (chacun étant vu comme un c -squelette de $W_i \subset W$) est un c -squelette de V . En remarquant que la réunion des Σ_{ij} est elle-même un c -squelette G -localement élémentaire de W en vertu de la proposition 9.1.5, on voit qu'on peut finalement remplacer X par V , Y par W et Σ par $\bigcup \Sigma_{ij}$, et par là se ramener au cas où X et Y sont connexes et où $Y \rightarrow X$ est un revêtement fini galoisien. Soit G le groupe de Galois de Y sur X . Pour tout g , l'image $g(\Sigma)$ est un c -squelette G -localement élémentaire fermé de Y , et $\bigcup_{g \in G} g(\Sigma)$ est dès lors lui-même un c -squelette G -localement élémentaire de Y d'après la proposition 9.1.5. On peut donc remplacer Σ par $\bigcup_{g \in G} g(\Sigma)$ (ça ne change pas son image sur X) et ainsi le supposer stable sous l'action de Galois. Le groupe G opère alors sur Σ par automorphismes c -linéaires par morceaux.

9.1.9.2. — Le théorème 3.3.3 assure l'existence d'un recouvrement fini (T_ℓ) de Σ tel que $f|_{T_\ell}$ soit injectif pour tout ℓ . Quitte à raffiner (T_ℓ) , on peut supposer que pour

tout ℓ il existe un domaine analytique compact et Γ -strict Y_ℓ de Y contenant T_ℓ et un morphisme $h_\ell: Y_\ell \rightarrow (\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^{n_\ell}$ pour un certain n_ℓ tel que $|h_\ell|$ induise un isomorphisme c -linéaire par morceaux entre T_ℓ et un c -polytope de $\mathbf{R}_{>0}^{n_\ell}$. Notons $h_{\ell 1}, \dots, h_{\ell n_\ell}$ les fonctions inversibles composantes du morphisme h_ℓ .

Fixons ℓ . Soit $y \in Y_\ell^{\Gamma\text{-ad}}$ et soit x son image sur X . Le corps $\mathcal{H}(y^\#)$ est une extension finie galoisienne de $\mathcal{H}(x^\#)$ de degré divisant le cardinal m de G ; par conséquent, $|\mathcal{H}(y)^\times|/|\mathcal{H}(x)^\times|$ divise m . Il existe donc un domaine analytique compact et Γ -strict U de X tel que $x \in U^{\Gamma\text{-ad}}$ et n_ℓ fonctions analytiques inversibles $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_\ell}$ sur U telles que $|h_{\ell i}^m(y)| = |\lambda_i(y)|$ pour tout i . Soit Ω le lieu de validité simultanée sur $Y_\ell \times_X U$ des égalités $|h_{\ell i}^m| = |\lambda_i|$. C'est un domaine analytique compact et Γ -strict de Y_ℓ , et $\Omega^{\Gamma\text{-ad}}$ contient y par construction. Par ce qui précède et par compacité de $Y_\ell^{\Gamma\text{-ad}}$ il existe un recouvrement fini $(\Omega_s)_s$ de Y_ℓ par des domaines analytiques compacts et Γ -stricts et, pour tout s , une famille $(\lambda_{s1}, \dots, \lambda_{sn_\ell})$ de fonctions analytiques inversibles sur $f(\Omega_s)$ tels que $|h_{\ell i}^m| = |\lambda_{si}|$ sur Ω_s pour tout s . Les $|\lambda_{si}|$ induisent alors un isomorphisme c -linéaire par morceaux entre $T_\ell \cap \Omega_s$ et un c -polytope de $\mathbf{R}_{>0}^{n_\ell}$.

Quitte à raffiner le recouvrement (T_ℓ) on peut donc supposer que chacune des $h_{\ell i}$ provient d'une fonction analytique inversible sur $f(Y_\ell)$, encore notée $h_{\ell i}$.

Le compact $\bigcup_g g(T_\ell)$ est une partie c -linéaire par morceaux du c -squelette Σ , et est donc de la forme $Y' \cap \Sigma$ pour un certain domaine analytique compact et Γ -strict Y' de Y . L'image X' de Y' sur X est un domaine analytique compact et Γ -strict de X . On a alors $\bigcup_g g(T_\ell) = \Sigma \cap \bigcup_g g(Y')$, si bien que quitte à remplacer Y' par $\bigcup_{g \in G} g(Y')$ on peut supposer que $Y' = f^{-1}(X')$. Comme on a par ailleurs $\bigcup_g g(T_\ell) = f^{-1}(f(T_\ell))$ et $\Sigma = f^{-1}(f(\Sigma))$, il vient $f(T_\ell) = X' \cap f(\Sigma)$. Autrement dit, lorsqu'on munit $f(\Sigma)$ de sa structure domaniale induite par la structure analytique Γ -stricte de X , le compact $f(T_\ell)$ est un domaine de $f(\Sigma)$.

9.1.9.3. — Pour montrer que $f(\Sigma)$ est un c -squelette de X , il suffit par ce qui précède de montrer que chacun des $f(T_\ell)$ en est un. Fixons donc ℓ et écrivons T, n et h au lieu de T_ℓ, n_ℓ et h_ℓ . Et désignons désormais par $h_1, \dots, h_n$ les composantes de h . Les h_i sont des fonctions inversibles définies sur un domaine analytique Γ -strict de X contenant $f(T)$.

Il résulte alors du fait que T est un c -squelette de Y et du choix des h_i que les conditions du lemme 4.3.6 sont satisfaites, avec $f(T)$ dans le rôle de Σ , avec $\mathcal{O}_X(f(T))^\times$ dans celui de E , et $(h_1, \dots, h_n)$ dans celui de $(f_1, \dots, f_n)$. Par conséquent, $f(T)$ est un c -squelette de X . $\square$

Nous allons maintenant en venir au théorème principal de cet article. Pour l'énoncer, il sera commode d'introduire la définition suivante.

9.1.10. Définition. — Une *classe admissible de c -squelettes* est la donnée, pour tout espace k -analytique Γ -strict X , d'un ensemble $\mathcal{S}(X)$ de c -squelettes de X , la collection des $\mathcal{S}(X)$ étant assujettie aux conditions suivantes.

- (1) Soit X un espace k -analytique Γ -strict.
 - (1a) Toute partie de X qui est G -recouverte par des éléments de $\mathcal{S}(X)$ appartient à $\mathcal{S}(X)$.

- (1b) Si Z est un sous-espace analytique fermé d'un domaine analytique Γ -strict de X , une partie de Z appartient à $\mathcal{S}(Z)$ si et seulement si elle appartient à $\mathcal{S}(X)$.
- (1c) Si Σ est un élément de $\mathcal{S}(X)$, un sous-ensemble T de Σ appartient à $\mathcal{S}(X)$ si et seulement si c'est une partie c -linéaire par morceaux de Σ .
- (1d) L'intersection d'une famille finie d'éléments de $\mathcal{S}(X)$ appartient à $\mathcal{S}(X)$.
- (2) Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme d'espaces k -analytiques Γ -stricts.
 - (2a) Pour tout élément Σ de $\mathcal{S}(X)$ tel que $f^{-1}(x)$ soit vide ou de dimension nulle quel que soit $x \in \Sigma$, l'image réciproque $f^{-1}(\Sigma)$ appartient à $\mathcal{S}(Y)$.
 - (2b) Pour tout élément T de $\mathcal{S}(Y)$ tel que $f|_T$ soit topologiquement propre, l'image $f(T)$ appartient à $\mathcal{S}(X)$.

9.1.11. Notation. — Soit X un espace k -analytique Γ -strict. Nous noterons $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$ l'ensemble des parties localement fermées Σ de X telles qu'il existe :

- ◊ un G -recouvrement (Σ_i) de Σ par des parties compactes et localement fermées dans Σ (cette dernière condition est automatique si Σ est séparée) ;
- ◊ pour tout i , un espace k -analytique Γ -strict compact Y_i , un morphisme f_i de Y_i vers un domaine analytique Γ -strict compact X_i de X et un c -squelette élémentaire compact T_i de Y_i tel que $\Sigma_i = f_i(T_i)$.

9.1.12. Théorème. — La collection des $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$ pour X variable possède les propriétés suivantes.

- (a) $\mathcal{S}^{\text{acc}}$ est la plus petite classe admissible de c -squelettes contenant S_d pour tout d .
- (b) $\mathcal{S}^{\text{acc}}$ contient tous les c -squelettes G -localement élémentaires.
- (c) Si X est un espace k -analytique Γ -strict et si Σ est un élément de $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$, la fonction $x \mapsto d_k(x)$ de Σ vers $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ est localement constante ; de plus si $x \in \Sigma$ il existe un domaine analytique Γ -strict V de X et un fermé de Zariski Z de V contenant x et purement de dimension $d_k(x)$.

9.1.13. Commentaires. — Nous avons opté pour la notation $\mathcal{S}^{\text{acc}}$ car nous proposons d'appeler les éléments de $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$ les c -squelettes *accessibles* de X .

9.2. Démonstration du théorème 9.1.12. — Dans toute la démonstration nous utiliserons les différents axiomes imposés aux classes admissibles de c -squelettes en faisant simplement référence à leur numéro dans la définition 9.1.10, de (1a) à (2b).

9.2.1. La classe $\mathcal{S}^{\text{acc}}$ contient les S_d . — Soit d un entier. Pour tout $R > 1$ dans $\Gamma \cdot |k^\times|$, soit V_R le domaine affinoïde Γ -strict de $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^d$ défini par les inégalités $R^{-1} \leq |T_i| \leq R$ pour $1 \leq i \leq d$, et soit Σ_R l'intersection de S_d avec V_R . Par définition, Σ_R est pour tout R un c -squelette élémentaire compact de V_R ; le G -recouvrement de S_d par les Σ_R atteste alors que $S_d \in \mathcal{S}^{\text{acc}}((\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^d)$.

9.2.2. La minimalité. — Soit $\mathcal{S}$ une classe admissible de c -squelettes contenant S_d pour tout d . Soit X un espace k -analytique, soit V un domaine analytique Γ -strict de X , soit Y un sous-espace analytique fermé de V purement de dimension d et soit f un morphisme de Y vers $(\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^d$. Si x appartient à S_d alors $d_k(x) = d$, ce qui force la fibre $f^{-1}(x)$ à être vide ou de dimension nulle puisque l'on a $d \geq d_k(y) = d_{\mathcal{H}(x)}(y) + d$ pour tout $y \in f^{-1}(x)$. Au vu de l'axiome (2a), $f^{-1}(S_d)$ appartient à $\mathcal{S}(Y)$, puis à $\mathcal{S}(X)$ au vu de l'axiome (1b). Il s'ensuit au vu de (1c) que $\mathcal{S}(X)$ contient les c -squelettes élémentaires de X , et partant les c -squelettes G -localement élémentaires de X en vertu de (1a).

Si f est un morphisme d'un espace k -analytique Γ -strict compact Y vers un domaine analytique Γ -strict compact W de X et si Σ est un c -squelette élémentaire compact de Y alors Σ appartient à $\mathcal{S}(Y)$ par ce qui précède, et $f(\Sigma)$ appartient donc à $\mathcal{S}(W)$ par l'axiome (2b), puis à $\mathcal{S}(X)$ en vertu de (1b). Il découle alors de (1a) que tout élément de $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$ appartient à $\mathcal{S}(X)$.

Il suffit donc maintenant de montrer que $\mathcal{S}^{\text{acc}}$ est une classe admissible de c -squelettes satisfaisant (c); d'après ce qu'on vient de voir ce sera alors la plus petite classe admissible de c -squelettes contenant les S_d , et elle contiendra de surcroît tous les c -squelettes G -localement élémentaires.

9.2.3. Les éléments de $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$ sont des c -squelettes satisfaisant (c). — On fixe un espace k -analytique Γ -strict X et un élément Σ de $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$. Nous allons montrer en plusieurs étapes que Σ est un c -squelette satisfaisant (c).

9.2.3.1. Réduction à une situation plus simple. — Soit $\Sigma \in \mathcal{S}(X)$. Pour montrer que Σ est un c -squelette satisfaisant (c), on peut raisonner G -localement sur X , ce qui permet de supposer que X et Σ sont compacts. Il existe alors une famille finie (Y_i) d'espaces analytiques compacts et Γ -stricts et, pour tout i , un c -squelette élémentaire T_i de Y_i et un morphisme $f_i: Y_i \rightarrow X$ tels que $\Sigma = \bigcup_i f_i(T_i)$.

Pour tout i il existe un domaine analytique compact V_i de Y_i , un sous-espace analytique fermé Z_i de V_i , purement de dimension d_i pour un certain d_i , et un morphisme $g_i: Z_i \rightarrow (\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^{d_i}$ tel que $T_i \subset g_i^{-1}(S_{d_i})$. Pour tout i , notons (Z_{ij}) la famille des composantes irréductibles de Z_i . On a alors $T_i = \bigsqcup T_i \cap Z_{ij}$ pour tout i , et $\Sigma = \bigcup_{i,j} f_i(T_i \cap Z_{ij})$. On peut dès lors remplacer la famille $(Y_i, T_i, f_i)_i$ par $(Z_{ij}, T_i \cap Z_{ij}, f_i|_{Z_{ij}})_{i,j}$ ce qui permet de se ramener au cas où chacun des Y_i est irréductible, et où T_i est pour tout i contenu dans $g_i^{-1}(S_{d_i})$ pour un certain morphisme $g_i: Y_i \rightarrow (\mathbf{G}_{m,k}^{\text{an}})^{d_i}$, où $d_i = \dim Y_i$.

L'énoncé à prouver étant insensible aux phénomènes de nilpotence, on peut supposer que X et les Y_i sont réduits.

9.2.3.2. Utilisation des techniques d'aplatissement. — Fixons i . Notons e_i la dimension générique de f_i . Il résulte du théorème 4.3 de [Duc23] qu'il existe :

- ◇ un espace k -analytique Γ -strict et compact Z_i , muni d'un morphisme $Z_i \rightarrow X$ qui est quasi-étale en dehors d'un diviseur de Cartier effectif E_i ;

- ◊ un domaine analytique compact et Γ -strict V_i de $Y_i \times_X Z_i$, dont on note V'_i la transformée stricte relative à E_i , c'est-à-dire l'adhérence réduite de $V_i \setminus Y_i \times_X E_i$ dans V_i ,

tels que les propriétés suivantes soient satisfaites :

- (i) V'_i est purement de dimension d_i ;
- (ii) $V'_i \rightarrow Y_i$ est surjectif et génériquement quasi-étale ;
- (iii) $V'_i \rightarrow Z_i$ se factorise par un morphisme surjectif et plat $V'_i \rightarrow F_i$, dont les fibres sont purement de dimension e_i , où F_i est un sous-espace analytique fermé de Z_i réduit et purement de dimension $d_i - e_i$, transverse à E_i .

Soit Υ_i l'image réciproque de T_i sur V_i . Comme $d_k(y) = d_i$ pour tout $y \in T_i$, on a $d_k(v) \geq d_i$ pour tout $v \in \Upsilon_i$. Combiné au fait que V'_i est de dimension d_i , ceci entraîne que $d_k(v) = d_i$ pour tout $v \in \Upsilon_i$, puis que Υ_i est contenu dans le lieu quasi-étale V''_i de $V'_i \rightarrow Y_i$ (qui est Zariski-dense dans V'_i). Le morphisme $V''_i \rightarrow Y_i$ étant de dimension relative nulle, il résulte du lemme 9.1.7 que Υ_i est un c -squelette élémentaire de V''_i , et partant de V'_i . La proposition 9.1.8 assure alors que l'image Θ_i de Υ_i sur F_i est un c -squelette G -localement élémentaire de F_i , et que $d_k(t) = d_i - e_i$ pour tout $t \in \Theta_i$. Comme F_i est purement de dimension $d_i - e_i$ et est transverse à E_i , le c -squelette Θ_i ne rencontre pas E_i ; il existe donc un voisinage analytique compact et Γ -strict Z'_i de Θ_i dans Z_i qui ne rencontre pas E_i , et est dès lors quasi-étale sur X . L'image $f_i(T_i)$ est alors égale à l'image de Θ_i sur X .

On déduit de ce qui précède que Σ est égale à l'image de $\coprod \Theta_i$ par le morphisme quasi-étale $\coprod Z'_i \rightarrow X$. En vertu du théorème 9.1.9, c'est un c -squelette de X . Par ce qui précède, on a $d_k(x) = d_i - e_i$ pour tout x appartenant à l'image de Θ_i par $Z'_i \rightarrow X$; et d'après [Duc23, théorème 5.3 (2)], tout point de l'image de $F_i \cap Z'_i \rightarrow X$, et *a fortiori* tout point de l'image de Θ_i sur X , est contenu dans un fermé de Zariski purement de dimension $d_i - e_i$ d'un domaine analytique Γ -strict de X .

Toute élément de $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$ est donc un c -squelette satisfaisant (c).

9.2.4. Vérification de (1a). — Soit X un espace k -analytique Γ -strict et soit Σ une partie localement fermée de X . Supposons que Σ possède un G -recouvrement par des parties appartenant à $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$. Il découle alors tautologiquement de la définition de $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$ que Σ appartient à $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$.

9.2.5. Vérification de (1b). — Soit X un espace k -analytique, soit V un domaine analytique Γ -strict de V et soit Z un sous-espace analytique fermé de V . Soit Σ une partie de Z . Supposons que Σ appartient à $\mathcal{S}^{\text{acc}}(Z)$ (resp. $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$). Il existe alors un G -recouvrement (Σ_i) de Σ par des parties compactes et localement fermées et, pour tout i , un espace $-k$ -analytique compact et Γ -strict Y_i , un c -squelette élémentaire compact T_i de Y_i et un morphisme f_i de Y_i vers un domaine analytique compact et Γ -strict Z_i (resp. X_i) de Z (resp. X) tel que $\Sigma_i = f_i(T_i)$.

Dans le premier cas, on choisit pour tout i un recouvrement fini (Y_{ij}) de chacun des Y_i par des domaines analytiques compacts et Γ -stricts tels que $f_i(Y_{ij})$ soit contenu pour tout (i, j) dans un domaine analytique compact et Γ -strict X_{ij} de X . Le G -recouvrement $(f_i(T_i \cap Y_{ij}))_{i,j}$ de Σ atteste alors que ce dernier appartient à $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$.

Dans le second cas, on pose pour tout i $Y'_i = f_i^{-1}(Z)$. Le sous-ensemble T_i de Y_i est alors un c -squelette élémentaire de Y'_i , et $f_i(T_i)$ est contenu dans le domaine analytique compact et Γ -strict $Z \times_X X_i$ de Z . Le G -recouvrement de Σ par les Σ_i atteste alors que $\Sigma \in \mathcal{S}^{\text{acc}}(Z)$.

9.2.6. Vérification de (1c). — Soit X un espace k -analytique Γ -strict, soit Σ appartenant à $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$ et soit T une partie de Σ . Si T est un élément de $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$, c'est un c -squelette de X d'après ce qu'on vient de voir, et donc une partie c -linéaire par morceaux de Σ . Réciproquement, supposons que T soit une partie c -linéaire par morceaux de Σ . Pour montrer que T appartient à $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$, on peut par (1a) (déjà établi) raisonner G -localement sur T , ce qui permet de supposer que X, T et Σ sont compacts, et que Σ est égal à $f(\Upsilon)$ où f est un morphisme d'un espace analytique compact et Γ -strict Y vers X et où Υ est un c -squelette élémentaire compact de Y . Mais alors $T = f(f^{-1}(T))$; et comme $f^{-1}(T)$ est une partie c -linéaire par morceaux fermée de Υ , c'est un c -squelette élémentaire de Y , si bien que T est un élément de $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$.

9.2.7. Vérification de (1d). — Soit X un espace k -analytique compact et soit (Σ_i) une famille finie d'éléments de $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$. Par définition tous les Σ_i sont localement fermés; choisissons pour tout i un ouvert U_i de X dont Σ_i est un fermé. Soit U l'intersection des U_i . Chacun des $\Sigma_i \cap U$ est une partie c -linéaire par morceaux de Σ_i , donc appartient à $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$ d'après (1c), puis à $\mathcal{S}^{\text{acc}}(U)$ d'après (1b). En vertu de (1a) la réunion T des $\Sigma_i \cap U$ appartient encore à $\mathcal{S}^{\text{acc}}(U)$, puis à $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$ d'après (1b). Chacun des $\Sigma_i \cap U$ est en vertu de (1c) une partie c -linéaire par morceau de T et il en va donc de même de leur intersection, qui n'est autre que $\bigcap_i \Sigma_i$. En utilisant à nouveau (1c) on en déduit que $\bigcap_i \Sigma_i$ est un élément de $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$.

9.2.8. Vérification de (2a). — Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme entre deux espaces k -analytiques Γ -stricts et soit Σ un élément de $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$ tel que $f^{-1}(x)$ soit vide ou de dimension nulle pour tout $x \in \Sigma$. Nous allons montrer que $f^{-1}(\Sigma)$ appartient à $\mathcal{S}^{\text{acc}}(Y)$. D'après (1a) l'assertion est G -locale sur $f^{-1}(\Sigma)$, ce qui permet de supposer Y compact; elle est *a fortiori* G -locale sur Σ , ce qui permet de supposer que X est compact et qu'il existe un espace k -analytique Γ -strict compact Z , un morphisme $g: Z \rightarrow X$ et un c -squelette élémentaire T de Z tel que $\Sigma = g(T)$. Soit Υ l'image réciproque de T sur $Y \times_X Z$. C'est d'après le lemme 9.1.7 un c -squelette élémentaire de $Y \times_X Z$, et son image sur Y est égale à $f^{-1}(\Sigma)$. Comme $Y \times_X Z$ est compact, $f^{-1}(\Sigma)$ appartient à $\mathcal{S}^{\text{acc}}(Y)$.

9.2.9. Vérification de (2b). — Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques Γ -stricts, et soit T un élément de $\mathcal{S}^{\text{acc}}(Y)$ tel que $f|_T$ soit topologiquement propre. Nous allons montrer que $f(T)$ appartient à $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$. D'après (1a), l'assertion est G -locale sur X , ce qui permet de supposer que X est compact. Dans ce cas T est quasi-compact, et il existe alors un recouvrement fini (T_i) de T par des parties c -linéaires compactes et, pour tout i , un domaine k -analytique et Γ -strict Y_i de Y contenant T_i . On a $f(T) = \bigcup f(T_i)$, ce qui permet de remplacer Y par $\coprod Y_i$ et T par $\coprod T_i$ (que cette opération préserve l'hypothèse que T appartient à $\mathcal{S}^{\text{acc}}(Y)$ résulte de (1a), (1b) et (1c)), et donc de supposer que Y et T sont compacts.

Par définition de $\mathcal{S}^{\text{acc}}(Y)$ et par compacité de T il existe alors une famille finie (Z_j) d'espaces analytiques compacts et Γ -stricts et pour tout j un c -squelette élémentaire compact Υ_j de Z_j et un morphisme $f_j: Z_j \rightarrow X$ tel que $T = \bigcup f_j(\Upsilon_j)$. Mais alors le compact $\Sigma = f(T)$ est la réunion finie des $(f \circ f_j)(\Upsilon_j)$, et est dès lors un élément de $\mathcal{S}^{\text{acc}}(X)$. $\square$

Références

- [Ber93] V. BERKOVICH – « Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **78** (1993), p. 5–161.
- [Ber99] ———, « Smooth p -adic analytic spaces are locally contractible », *Invent. Math.* **137** (1999), no. 1, p. 1–84.
- [Ber04] ———, « Smooth p -adic analytic spaces are locally contractible. II », in *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, p. 293–370.
- [CLD12] A. CHAMBERT-LOIR & A. DUCROS – « Formes différentielles réelles et courants sur les espaces de berkovich », 2012.
- [DHLY24] A. DUCROS, E. HRUSHOVSKI, F. LOESER & J. YE – « Tropical functions on a skeleton », *J. Éc. Polytech., Math.* **11** (2024), p. 613–654 (English).
- [Duc03] A. DUCROS – « Image réciproque du squelette par un morphisme entre espaces de Berkovich de même dimension », *Bull. Soc. Math. France* **131** (2003), no. 4, p. 483–506 (French).
- [Duc07] ———, « Variation de la dimension relative en géométrie analytique p -adique », *Compos. Math.* **143** (2007), no. 6, p. 1511–1532 (French).
- [Duc09] ———, « Les espaces de Berkovich sont excellents », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **59** (2009), no. 4, p. 1443–1552 (French).
- [Duc12] ———, « Espaces de Berkovich, polytopes, squelettes et théorie des modèles », *Confluentes Math.* **4** (2012), no. 4, p. 1250007, 57 (French), arXiv:1203.6498, Erratum in *Confluentes Math.*, vol. 5, pp- 43-45.
- [Duc18] ———, « Families of Berkovich spaces », *Astérisque* **400** (2018), vii+262 p.
- [Duc21a] ———, « Dévisser, découper, éclater et aplatir les espaces de Berkovich », *Compos. Math.* **157** (2021), no. 2, p. 236–302.
- [Duc21b] ———, « Réduction en familles d'espaces affinoïdes », *Bull. Soc. Math. Fr.* **149** (2021), no. 4, p. 547–611 (French).
- [Duc23] A. DUCROS – « Utilisation de l'aplatissement en géométrie de berkovich », 2023.
- [HL16] E. HRUSHOVSKI & F. LOESER – *Non-archimedean tame topology and stably dominated types*, Annals of Mathematic Studies, vol. 192, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2016.
- [HT24] K. HÜBNER & M. TEMKIN – « Adic curves : stable reduction, skeletons and metric structure », 2024.
- [Hub93] R. HUBER – « Continuous valuations », *Math. Z.* **212** (1993), no. 3, p. 455–477.
- [Ked] K. KEDLAYA – « Reified valuations and adic spectra », *Research in Number Theory*, (to appear).

- [MS15] D. MACLAGAN & B. STURMFELS – *Introduction to Tropical Geometry*, american mathematical society éd., Graduate Studies in Mathematics, no. 161, 2015.
- [Tem04] M. TEMKIN – « On local properties of non-Archimedean analytic spaces. II », *Israel J. Math.* **140** (2004), p. 1–27.

ANTOINE DUCROS, Sorbonne Université, Université Paris-Diderot, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, IMJ-PRG, F-75005, Paris, France
E-mail : antoine.ducros@imj-prg.fr • *Url* : <http://www.imj-prg.fr/~antoine.ducros>
AMAURY THUILLIER, Institut Camille Jordan, Université de Lyon 1, 43 boulevard du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne cedex France • *E-mail* : thuillier@math.univ-lyon1.fr
Url : <http://math.univ-lyon1.fr/~thuillier>