
UTILISATION DE L'APLATISSEMENT EN GÉOMÉTRIE DE BERKOVICH

par

Antoine Ducros

Résumé. — Dans cet article, nous mettons en œuvre les techniques d'aplatissement développées dans un précédent travail pour «enjoliver» un morphisme entre espaces analytiques compacts, pour décrire la structure de son image et obtenir ainsi un substitut non archimédien au théorème de Chevalley, et enfin pour montrer que la platitude dans le monde des espaces de Berkovich revient à la platitude naïve à condition de considérer les anneaux locaux pour la G -topologie.

Abstract (The use of flattening techniques in Berkovich geometry)

In this article, we carry out the flattening techniques developed in a former work in order to “embellish” a map between compact analytic spaces, to describe the structure of its image, getting this way a substitute for Chevalley’s theorem in the non-archimedean setting, and finally to show that flatness in the world of Berkovich spaces amounts to naive flatness provided one works with local rings for the G -topology.

Table des matières

0. Introduction.....	2
1. Rappels, notations, références.....	6
2. Enjoliveurs.....	8
3. Aplatissement d'un faisceau cohérent : rappels et compléments..	14
4. Comment enjoliver un morphisme arbitraire.....	16
5. Un théorème de Chevalley non archimédien.....	23
6. Dimension centrale et anneau local d'un filtre affinoïde.....	29
7. Platitude et anneaux G -locaux.....	36

Classification mathématique par sujets (2000). — 14G22, 14G99.

Mots clefs. — Espaces de Berkovich, Images de morphismes analytiques, platitude.

Ce travail a démarré et été réalisé en grande partie à l'institut Weizmann (Rehovot, Israël) où je suis resté du 15 septembre au 13 décembre 2022. Merci à Vladimir Berkovich de m'y avoir invité, et merci à cet établissement de m'avoir accueilli et d'avoir financé mon séjour par une EMMMA AND MICHAEL JACOB *professorship*.

Références..... 40

0. Introduction

Nous proposons dans le présent travail plusieurs applications des techniques d'aplatissement non archimédiennes mises au point par l'auteur dans [Duc21]. Précisons d'emblée que si ces techniques sont directement inspirées de celles de l'article fondateur [RG71] de Raynaud et Gruson, elles donnent lieu à des énoncés nettement plus compliqués que leurs originaux schématiques. En effet, nous ne réussissons à aplatir un faisceau cohérent que par transformée stricte après changement de base le long d'une succession d'éclatements *et de morphismes quasi-étales* (au paragraphe final 7.12 de [Duc21], nous expliquons pourquoi il n'est probablement pas possible d'éviter ces derniers).

0.1. Enjoliveurs. — Si X est un espace k -analytique compact, nous aurons donc très souvent à considérer un couple (Z, S) formé d'une part d'un espace k -analytique compact Z muni d'une flèche $Z \rightarrow X$ qui est une tour d'éclatements et de morphismes quasi-étales à sources compactes, et d'autre part d'un diviseur de Cartier S de Z contenant les images réciproques des centres de tous les éclatements intermédiaires de la tour (si bien que $Z \setminus S \rightarrow X$ est quasi-étale). Comme ces couples nous permettront d'«enjoliver» les morphismes, nous avons choisi de les appeler *enjoliveurs* de X ; ils sont introduits et brièvement étudiés à la section 2, qui se conclut par une proposition assurant qu'un enjoliveur d'un sous-espace analytique fermé de X peut toujours être relevé en un enjoliveur de X (proposition 2.9).

0.2. Comment enjoliver un morphisme. — Après avoir consacré la section 3 à la présentation d'une version un peu améliorée (théorème 3.2) du théorème principal d'aplatissement de [Duc21], nous exploitons cette version à la section 4 pour enjoliver un morphisme $f: Y \rightarrow X$, où Y et X sont des espaces analytiques compacts et réduits, et où l'on suppose de plus que Y est non vide et équidimensionnel (disons de dimension n) et qu'il existe un entier d tel que f soit génériquement de dimension d , c'est-à-dire tel que $\{y \in Y, \dim_y f^{-1}(f(y)) = d\}$ soit un ouvert dense (nécessairement de Zariski) de Y ; ces deux conditions sont notamment remplies dès que Y est irréductible, ce qui est le cas typique à avoir en tête.

Nous démontrons précisément (th. 4.3) qu'il existe un enjoliveur (Z, S) de X et un domaine analytique compact V de $Y \times_X Z$ tels que les propriétés suivantes soient satisfaites, en notant V' la «transformée stricte» de V , c'est-à-dire l'adhérence réduite de $V \setminus (V \times_Z S)$ dans V .

- ◊ l'image de S sur X est contenue dans $f(Y)$ et de dimension $< n - d$ (la dimension d'une partie quelconque d'un espace analytique est définie en 1.4) ;
- ◊ $V' \rightarrow Y$ est surjectif ;
- ◊ $V' \rightarrow Z$ se factorise par un morphisme surjectif et plat sur un sous-espace analytique fermé et réduit de Z , transverse à S et purement de dimension $n - d$.

0.3. Un théorème de Chevalley non archimédien. — Nous nous intéressons ensuite à la structure de $f(Y)$ où $f: Y \rightarrow X$ est un morphisme entre espaces k -analytiques compacts. Précisons qu'à notre connaissance la structure de $f(Y)$ n'était jusqu'ici bien comprise que lorsque f est plat (c'est alors un domaine analytique compact de X , par le théorème 9.2.1 de [Duc18], dû à Raynaud dans le cas strict, cf. [BL93], Cor. 5.11) ou propre (c'est alors un fermé de Zariski de X ; on le déduit du théorème de cohérence des images directes établi par Kiehl dans [Kie67], cf. [Duc18] 1.3.23 pour les détails). Mentionnons toutefois que des stratifications raisonnables d'images de morphismes analytiques ont été construites par Lipshitz dans un tout autre langage et avec des méthodes entièrement différentes (son cadre de travail est la théorie des modèles des corps valués algébriquement clos dans un langage enrichi par une classe de fonctions analytiques «raisonnables»), voir par exemple le théorème 5.2 de [Lip93]; nous ignorons les liens précis éventuels entre ses théorèmes de structure et les nôtres.

0.3.1. Un premier cas particulier. — Nous considérons tout d'abord un morphisme quasi-étale $f: Y \rightarrow X$ entre espaces k -analytiques. Pour des raisons techniques, nous faisons simplement une hypothèse de compacité *relative* : nous demandons que f soit compact, c'est-à-dire que $f^{-1}(K)$ soit compact pour tout compact K de X . Soit m un entier et soit Z un fermé de Zariski de Y purement de dimension m . Pour tout d , désignons par X_d l'ensemble des points de X dont la fibre géométrique sous f est de cardinal au moins d .

Nous démontrons (théorème 5.3) que pour tout d , le sous-ensemble X_d de X en est un domaine analytique fermé, et que l'intersection $f(Z) \cap (X_d \setminus X_{d+1})$ est un fermé de Zariski de $X_d \setminus X_{d+1}$ purement de dimension m ; la preuve se fait par descente quasi-étale. On obtient ainsi une partition de $f(Z)$ en sous-ensembles localement fermés, chacun d'eux étant un fermé de Zariski purement de dimension m d'un domaine analytique de X . Remarquons que si le cardinal des fibres géométriques de f est majoré (ce sera toujours le cas dans les situations que nous rencontrerons), cette partition est finie car X_d est alors vide pour d assez grand.

0.3.2. Le cas général. — Soit maintenant $f: Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques compacts. Nous faisons les mêmes hypothèses qu'en 0.2 : Y est non vide et purement de dimension n , et f est génériquement de dimension d .

0.3.2.1. La notion de m -cellule. — Afin de décrire $f(Y)$, nous allons avoir besoin de la notion de m -cellule sur X , que nous définissons récursivement sur m . Une 0-cellule de X est un ensemble fini et non vide de points rigides de X . Si $m > 0$, une m -cellule de X est une partie localement fermée C non vide de X telle que les propriétés suivantes soient satisfaites, en notant ∂C le fermé $\overline{C} \setminus C$:

- (a) il existe un morphisme quasi-étale compact $g: X' \rightarrow X \setminus \partial C$, dont le cardinal des fibres géométriques est majoré, et un fermé de Zariski $Z \subset X'$ non vide et purement de dimension m tel que $g(Z) = C$ (ainsi, C admet une partition finie de la forme décrite en 0.3.1);
- (b) ∂C s'écrit comme une union finie $\bigcup \overline{C_j}$ où chaque C_j est une m_j -cellule pour un certain entier $m_j < m$.

0.3.2.2. *La structure de $f(Y)$.* — Nous démontrons (th. 5.8) qu'il existe une $(n-d)$ -cellule C de X telle que $f(Y) = \overline{C}$ et que $f(y) \in C$ pour tout point d'Abhyankar de rang n de Y .

La preuve consiste à enjoliver f pour se ramener au cas où il admet une factorisation $Y \hookrightarrow X_0 \rightarrow X$ où X_0 est compact, où $Y \hookrightarrow X_0$ est une immersion fermée et où $g: X_0 \rightarrow X$ est quasi-étale en dehors d'un diviseur de Cartier S transverse à Y dont l'image est contenue dans $f(Y)$ et de dimension $< n-d$. Si l'on pose $X' = g^{-1}(g(S))$ la cellule C du théorème est alors $g(Y \cap X')$ et son bord ∂C est égal à $g(S)$. La propriété (a) est évidente une fois établi que les fibres géométriques du morphisme quasi-étale et compact $X' \rightarrow X \setminus g(S)$ sont de cardinal borné (ce qui n'est pas difficile, cf. 5.2.3.1), et on obtient (b) en faisant une récurrence sur la dimension de l'image de f .

Nous voyons cette décomposition de $f(Y)$ comme une sorte de théorème de Chevalley non archimédien, dont nous espérons nous servir à court terme dans notre étude en cours des images directes de squelettes (en collaboration avec Amaury Thuillier), et à plus longue échéance pour l'éventuel développement d'une théorie des faisceaux constructibles sur les espaces analytiques.

0.4. Nouveaux critères de platitude. — Nous terminons ce travail en établissant de nouveaux critères de platitude en géométrie de Berkovich, que nous espérons plus maniables que la définition originelle.

0.4.1. *Platitude naïve et platitude tout court.* — Rappelons que si $Y \rightarrow X$ est un morphisme entre bons espaces analytiques sur un même corps de base k , si \mathcal{F} est un faisceau cohérent sur Y et si y est un point de Y d'image x sur X , on dit que \mathcal{F} est *naïvement* plat sur X en y si \mathcal{F}_y est un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module plat.

L'adverbe «naïvement» est utilisé parce que cette propriété manque de robustesse : elle n'est en effet pas stable en général par changement de base bon, un contre-exemple dû à Temkin étant étudié en détail à la section 4.4 de [Duc18]. Pour cette raison, on dit que \mathcal{F} est X -plat en y s'il est naïvement plat en y et si cette propriété perdure après tout changement de base bon.

Il y a toutefois un certain nombre de cas dans lesquels on sait que la platitude naïve de \mathcal{F} en y est suffisante, c'est-à-dire qu'elle entraîne sa platitude en y au sens précédent : celui où y appartient à $\text{Int}(Y/X)$ ([Duc18], Th. 8.3.4), et celui où X est réduit et où x appartient à l'ensemble $A(X)$ des points de X qui sont d'Abhyankar et de rang maximal (sous cette hypothèse l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps, si bien que la platitude naïve de \mathcal{F} en y est dès lors automatique, et le théorème 10.3.7 de [Duc18] assure que \mathcal{F} est plat en y).

0.4.2. *À propos du contre-exemple de [Duc18] 4.4.* — Le contre-exemple de Temkin étudié à la section 4.4 de [Duc18] est construit en exhibant un point x du plan affine $\mathbf{A}_k^{2,\text{an}}$ tel que $\overline{\{x\}}^{U_{\text{zar}}}$ soit de dimension 2 pour tout *voisinage* analytique de x dans $\mathbf{A}_k^{2,\text{an}}$, et un bon domaine analytique V de $\mathbf{A}_k^{2,\text{an}}$ contenant x et vérifiant l'égalité $\dim \overline{\{x\}}^{V_{\text{zar}}} = 1$. L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est alors un corps, si bien que la platitude naïve au-dessus de x est automatique. Si Y désigne l'adhérence réduite de x dans V ,

l'immersion $Y \hookrightarrow X$ est donc naïvement plate en x , mais $Y \times_X V \hookrightarrow V$, qui n'est autre que l'immersion fermée de la courbe Y dans la surface V , ne l'est pas.

0.4.3. Nos résultats. — Au cœur du contre-exemple évoqué figure donc la chute de la dimension de l'adhérence de Zariski d'un point lorsqu'on se restreint à un domaine analytique bien choisi. Nous démontrons ici que ce phénomène géométrique est en fait *la seule obstruction* à la détection naïve de la platitude.

Nous prouvons en effet l'énoncé suivant (théorème 7.3) : soit $Y \rightarrow X$ un morphisme entre bons espaces k -analytiques et soit y un point de Y dont on note x l'image sur X ; supposons que $\dim \overline{\{x\}}^{V_{\text{zar}}} = \dim \overline{\{x\}}^{X_{\text{zar}}}$ pour tout domaine analytique V de X contenant x ; un faisceau cohérent sur Y est alors X -plat en y si et seulement s'il est naïvement X -plat en y .

On en déduit que la platitude peut en fait *toujours* être détectée naïvement, dès lors qu'on travaille avec les anneaux locaux *pour la G -topologie* plutôt qu'avec les anneaux locaux pour la topologie usuelle (théorème 7.5) ; et nous assurons par ailleurs que ces anneaux locaux pour la G -topologie ont de très bonnes propriétés algébriques puisqu'ils sont henséliens et excellents (proposition 6.7 ; sa preuve utilise de manière essentielle le fait que ces propriétés sont satisfaites par les anneaux locaux pour la topologie usuelle).

0.4.4. Quelques mots à propos de la preuve. — Pour démontrer le théorème 7.3 on se ramène, grâce aux critères locaux de platitude standard en algèbre commutative, au cas où X est réduit et où $\dim \overline{\{x\}}^{X_{\text{zar}}} = \dim \overline{\{x\}}^{V_{\text{zar}}} = \dim_x X$ pour tout domaine analytique V de X contenant x , ce que nous résumerons dans la discussion qui suit en disant que x est *très générique* (mentionnons à titre d'exemple que si $x \in \mathbf{A}(X)$ il est très générique, et que si X est une courbe et si x n'est pas rigide, il est très générique). Nous suivons alors peu ou prou la preuve du théorème 10.3.7 de [Duc18] (qui est essentiellement le théorème 7.3 dans le cas particulier mentionné plus haut où X est réduit et où $x \in \mathbf{A}(X)$), mais avec une modification importante : nous remplaçons la transitivité de l'appartenance à $\mathbf{A}(\cdot)$ par la transitivité du caractère très générique (théorème 6.10), dont la démonstration utilise elle-même de manière cruciale notre description de l'image d'un fermé de Zariski par un morphisme quasi-étale compact (théorème 5.3, évoqué plus haut en 0.3.1).

0.4.5. Filtres affinoïdes. — Dans ce que nous venons de décrire, un rôle majeur est joué par l'ensemble de tous les domaines analytiques contenant un point donné x d'un espace analytique X , ensemble qu'on peut de façon évidente remplacer par n'importe lequel de ses sous-ensembles cofinaux, comme par exemple celui de tous les domaines affinoïdes de X contenant x .

Mais une bonne partie de nos raisonnements s'appliquent également à d'autres ensembles plus restreints de domaines affinoïdes de X contenant x , qui peuvent avoir leur intérêt : lorsque la valeur absolue de k n'est pas triviale et que X est strict, c'est par exemple le cas de l'ensemble des domaines strictement affinoïdes de X contenant x , ou de l'ensemble des domaines strictement affinoïdes V de X tels que V^{ad} contienne une spécialisation donnée x^+ de x dans X^{ad} , où le suffixe «ad» en exposant fait référence à l'espace adique associé.

Pour couvrir ces différents cas de manière aussi uniforme que possible, nous travaillons avec la notion de *filtre affinoïde* sur un espace pointé (X, x) , introduite à la définition 6.1. Ainsi, la proposition 6.7 que nous avons mentionnée plus haut assure par exemple en fait que l’anneau local associé à *n’importe quel* filtre affinoïde est hensélien et excellent, et cela s’applique en particulier aux anneaux locaux d’un espace adique de type fini sur un corps.

1. Rappels, notations, références

1.1. — Dans tout ce texte nous travaillerons avec les espaces analytiques ultramétriques au sens de Berkovich, tels que définis dans [Ber93] (les espaces qu’il avait auparavant introduits dans [Ber90] sont ceux qu’on appelle maintenant les *bons espaces*, c’est-à-dire ceux qui ont une base de voisinages affinoïdes).

Si x est un point d’un espace k -analytique X , son corps résiduel complété sera noté $\mathcal{H}(x)$. Si $\varphi: Y \rightarrow X$ est un morphisme d’espaces k -analytiques, sa fibre en un point x sera notée $\varphi^{-1}(x)$ ou Y_x ; c’est un espace $\mathcal{H}(x)$ -analytique.

1.2. — Un espace k -analytique X est muni d’une topologie au sens classique et d’une topologie ensembliste, la G -topologie, qui la raffine. Le site correspondant X_G est muni d’un faisceau de k -algèbres que Berkovich note \mathcal{O}_{X_G} mais que nous noterons simplement \mathcal{O}_X . Il est cohérent ([Duc09], Lemme 0.1; voir aussi la note de bas de page de [Duc18] 1.3.1 pour la rectification d’une erreur dans la preuve signalée par J. Poineau). Nous appellerons *faisceau cohérent* sur X tout \mathcal{O}_X -module cohérent; il s’agit donc d’un faisceau sur le site X_G . Si \mathcal{F} est un faisceau cohérent sur X et si $\varphi: Y \rightarrow X$ est un morphisme d’espaces k -analytiques, nous noterons \mathcal{F}_Y le faisceau cohérent $\varphi^*\mathcal{F}$ sur Y .

L’espace X possède aussi une topologie naturelle plus grossière que sa topologie usuelle, la topologie *de Zariski*, dont les fermés sont les lieux des zéros des faisceaux cohérents d’idéaux, cf. [Duc09]. Le caractère ouvert (ou fermé) pour la topologie de Zariski est G -local (cf. [Duc09], prop. 4.2); mais on prendra garde que si V est un domaine analytique de X , la topologie de Zariski de V est en général plus fine que la topologie induite par la topologie de Zariski de X .

Lorsque nous dirons qu’une propriété vaut *génériquement* sur un espace X , cela signifiera que son lieu de validité contient un ouvert *de Zariski* dense de X .

1.3. — Soit k un corps ultramétrique complet et soit Γ un sous-groupe de \mathbf{R}_+^\times tel que $\Gamma \cdot |k^\times|$ soit non trivial; autrement dit, Γ est non trivial si la valeur absolue de k est triviale. Nous utiliserons abondamment la notion d’espace k -analytique Γ -*strict* introduite au chapitre 3 de [Duc18]. Informellement, un espace k -analytique est Γ -strict s’il peut être défini en ne faisant intervenir que des paramètres réels appartenant à Γ ; ainsi tout espace k -analytique est \mathbf{R}_+^\times -strict, et si k n’est pas trivialement valué, un espace k -analytique est $\{1\}$ -strict si et seulement s’il est strict. (La non-trivialité de $\Gamma \cdot |k^\times|$ sert à garantir que tout point d’un espace affinoïde Γ -strict a une base de voisinages affinoïdes et Γ -stricts.)

Si X est un espace k -analytique Γ -strict et si Y est un sous-espace analytique fermé de X , tout domaine analytique Γ -strict de Y est G -recouvert par des domaines de la forme $V \cap Y$ où V est un domaine analytique Γ -strict de X : c'est une conséquence immédiate de la version Γ -stricte du théorème de Gerritzen-Grauert, voir le paragraphe 0.20.7 de [Duc12].

1.4. — Nous nous servirons librement des analogues en théorie de Berkovich d'un certain nombre de notions de base de théorie des schémas : la théorie de la dimension, pour laquelle nous renvoyons par exemple à l'article [Duc07] ; la théorie des composantes irréductibles d'un espace analytique développée à la section 4 de [Duc09] ; la théorie de la connexité et de l'irréductibilité *géométriques* ([Duc09], section 7) ; et les propriétés usuelles de l'algèbre commutative (caractère réduit, régulier, etc.) ainsi que leurs variantes géométriques dans le contexte analytique (elles sont largement étudiées dans [Duc09], mais l'on pourra aussi se reporter aussi au chapitre 2 de [Duc18]).

Si $\varphi: Y \rightarrow X$ est un morphisme d'espaces k -analytiques et y un point de X d'image x sur Y , nous noterons $\dim_y \varphi$ et appellerons dimension de φ en y , ou dimension relative de Y sur X en y , la dimension en y de la fibre Y_x . La fonction $y \mapsto \dim_y \varphi$ est semi-continue supérieurement pour la topologie de Zariski sur Y ([Duc07], théorème 4.9).

Soit X un espace k -analytique et soit x un point de X . Nous noterons $d_k(x)$ la somme du degré de transcendance résiduel de $\mathcal{H}(x)$ sur k et du rang rationnel de $|\mathcal{H}(x)^\times|/|k^\times|$ (on peut aussi décrire $d_k(x)$ de façon un peu plus ramassée comme le degré de transcendance *résiduel gradué* de $\mathcal{H}(x)$ au sens de [Tem04], voir aussi l'appendice A de [Duc18]). L'intérêt technique majeur de cet invariant provient de l'égalité

$$\dim X = \sup_{x \in X} d_k(x)$$

(avec la convention $\dim \emptyset = -\infty$). En particulier on a pour tout $x \in X$ l'inégalité $d_k(x) \leq \dim_x X$, et nous noterons $A(X)$ l'ensemble des points de X pour lesquels on a égalité. Il est immédiat que $x \in A(X)$ si et seulement si l'adhérence de Zariski $\overline{\{x\}}^{X_{\text{Zar}}}$ est une composante irréductible de X de dimension $d_k(x)$ et que dans ce cas, $\overline{\{x\}}^{V_{\text{Zar}}}$ est une composante irréductible de V de dimension $d_k(x)$ pour tout domaine analytique V de X contenant x .

Ce qui précède permet d'étendre la définition de la dimension (globale et locale) aux parties quelconques de X : si E est un sous-ensemble de X , on définit sa dimension comme le supremum des $d_k(x)$ pour $x \in E$, et si $x \in E$, on définit $\dim_x E$ comme le minimum des $\dim U$ où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x dans E .

Précisons enfin que même si cela n'apparaît pas dans les notations, la dimension en géométrie de Berkovich est toujours implicitement *relative au corps de base k* (et est donc *stricto sensu* une dimension *k -analytique*, bien que ce qualificatif soit la plupart du temps omis). Par exemple si $r \notin |k^\times|$ et si l'on note k_r le corps k -affinoïde $k\{r^{-1}T, rT^{-1}\}$, la dimension k -analytique de $\mathcal{M}(k_r)$ est égale à 1 alors que sa dimension k_r -analytique est égale à 0. Mais en pratique cela ne prêtera pas à confusion, le corps de base étant toujours clairement indiqué par le contexte. Indiquons simplement pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté que si une partie E de X est explicitement définie

comme contenue dans la fibre en un point t d'un morphisme d'espaces k -analytiques $X \rightarrow T$, sa dimension désignera sauf mention expresse du contraire sa dimension $\mathcal{H}(t)$ -analytique, c'est-à-dire le supremum des $d_{\mathcal{H}(t)}(x)$ pour $x \in E$.

Nous aurons besoin du lemme élémentaire suivant dont nous donnons la preuve faute de référence dans la littérature.

1.5. Lemme. — *Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques, soit y un point de Y et soit x son image sur X . On a alors*

$$\dim_y Y \leq \dim_x X + \dim_y Y_x.$$

Démonstration. — L'assertion peut se démontrer après extension arbitraire du corps de base, ce qui permet de supposer x et y rigides. Mais les dimensions en jeu sont alors des dimensions de Krull d'anneaux locaux noethériens, et le lemme est ramené à un énoncé classique d'algèbre commutative, cf. [Sta22, Tag 00OM]. \square

1.6. — La notion de platitude en géométrie analytique joue un rôle majeur dans le présent travail. Elle est introduite au chapitre 4 de [Duc18] et y est ensuite étudiée systématiquement. On y démontre par exemple le théorème 9.2.1 qui assure que si $\varphi: Y \rightarrow X$ est un morphisme plat entre espaces k -analytiques avec Y compact et Γ -strict et X séparé alors $\varphi(Y)$ est un domaine analytique compact et Γ -strict de X (dans le cas où $\Gamma = \{1\}$, c'est dû à Raynaud, cf. [BL93], Cor. 5.11), ou le théorème 10.3.2 qui assure que si $Y \rightarrow X$ est un morphisme d'espaces k -analytiques et \mathcal{F} un faisceau cohérent sur Y , le lieu de platitude de \mathcal{F} sur X est un ouvert de Zariski de X .

Un exemple particulièrement important de morphismes plats est fourni par les morphismes *quasi-lisses*, qui sont l'objet chapitre 5 de [Duc18] – et parmi ceux-ci on appelle *quasi-étales* ceux qui sont de dimension relative nulle. Nos définitions reposent sur le critère jacobien et sont inspirées par le traitement de la lissité dans [BLR90] (et nous vérifions que notre définition de morphisme quasi-étale est bien équivalente à celle que donne Berkovich dans [Ber93]). Le préfixe «quasi» fait référence à la présence possible de bord ; un morphisme entre espaces k -analytiques (resp. entre bons espaces k -analytiques) est étale (resp. lisse) au sens de [Ber93] si et seulement s'il est quasi-étale (resp. quasi-lisse) et sans bord, cf. [Duc18] cor. 5.4.8, rem. 5.4.9 et lemme 5.4.11.

2. Enjoliveurs

Nous fixons pour toute la suite du texte un corps ultramétrique complet k et un sous-groupe Γ de \mathbf{R}_+^\times tel que $\Gamma \cdot |k^\times| \neq \{1\}$.

Nous renvoyons le lecteur à la section 5 de [Duc21] pour la théorie des éclatements en géométrie analytique, qui ne pose aucune difficulté – c'est le décalque *mutatis mutandis* de la théorie algébrique.

2.1. Définition. — Soit X un espace k -analytique compact et Γ -strict, et soit (Z, S) un couple formé d'un espace X -analytique compact et Γ -strict Z et d'un diviseur de Cartier (effectif) S de Z . Soit n un entier.

Une *présentation* Γ -*admissible* de longueur n de (Z, S) est la donnée d'une factorisation

$$Z_{2n} = Z \rightarrow Z_{2n-1} \rightarrow \dots \rightarrow Z_0 = X$$

et, pour tout i , d'un sous-espace analytique fermé S_i de Z_i , ces objets étant assujettis aux conditions suivantes :

- (a) $S_{2n} = S$ et $S_0 = \emptyset$;
- (b) chacun des Z_i est compact et Γ -strict ;
- (c) si i est impair, $Z_{i+1} \rightarrow Z_i$ est un éclatement de centre S_i et S_{i+1} est son diviseur exceptionnel $X_{i+1} \times_X S_i$;
- (d) si i est pair, $Z_{i+1} \rightarrow Z_i$ est quasi-étale et S_{i+1} majore $X_{i+1} \times_X S_i$.

Si le groupe Γ n'a pas besoin d'être spécifié ou, ce qui revient au même, s'il est égal à \mathbf{R}_+^\times , nous parlerons simplement de présentation admissible.

2.2. Remarque. — On peut toujours rajouter artificiellement un cran à une présentation Γ -admissible $(Z_{2n} \rightarrow Z_{2n-1} \rightarrow \dots \rightarrow Z_0, (S_i))$ de (Z, S) en posant $Z_{2n+2} = Z_{2n+1} = Z_{2n}$, en prenant les flèches $Z_{2n+2} \rightarrow Z_{2n+1}$ et $Z_{2n+1} \rightarrow Z_{2n}$ toutes deux égales à l'identité de Z_{2n} , et en posant $S_{2n+2} = S_{2n+1} = S_{2n}$.

2.3. Définition. — Soit X un espace k -analytique compact. Un Γ -*enjoliveur* de X est un couple (Z, S) où Z est un espace X -analytique compact et Γ -strict, et où S est un diviseur de Cartier effectif de Z , qui possède une présentation Γ -admissible.

La *classe* d'un Γ -enjoliveur (Z, S) est le plus petit entier n tel que (Z, S) possède une présentation admissible de longueur n .

Si le groupe Γ n'a pas besoin d'être spécifié ou, ce qui revient au même s'il est égal à \mathbf{R}_+^\times , nous parlerons simplement d'enjoliveur.

2.4. — Indiquons quelques propriétés des enjoliveurs qui découlent de leur définition et des propriétés connues des éclatements et morphismes quasi-étales. Soit donc X un espace k -analytique et soit (Z, S) un enjoliveur de X .

2.4.1. — Le morphisme $Z \rightarrow X$ est quasi-étale en dehors de S . Si T est un diviseur de Cartier de X alors $Z \times_X T$ est un diviseur de Cartier de Z . Si X est réduit alors Z est réduit.

2.4.2. — Si X est purement de dimension m pour un certain entier m il en va de même de Z . En tant que diviseur de Cartier de Z l'espace S est alors vide si $m = 0$ et purement de dimension $m - 1$ si $m \geq 1$.

2.5. Lemme. — Soit X un espace k -analytique Γ -strict et compact, et soient (Z, S) et (Z', S') deux Γ -enjoliveurs sur X , de classes respectives n et n' . La somme disjointe $(Z \amalg Z', S \amalg S')$ est alors un Γ -enjoliveur sur X . Sa classe est majorée par $\max(n, n')$, et l'on a même égalité sauf dans le cas où X est non vide, où Z et Z' sont deux ouverts fermés complémentaires de X , et où S et S' sont vides. Dans ce cas $(Z \amalg Z', S \amalg S') = (X, \emptyset)$ est de classe nulle, mais $\max(n, n') = 1$.

Démonstration. — Par symétrie des arguments on peut supposer $n \geq n'$. Choisissons une présentation Γ -admissible $(Z_{2n} \rightarrow \dots \rightarrow Z_0, (S_i))$ de (Z, S) et une présentation Γ -admissible $(Z'_{2n'} \rightarrow \dots \rightarrow Z'_0, (S'_i))$ de (Z', S') . Par la remarque 2.2, on peut prolonger de façon triviale $(Z'_{2n'} \rightarrow \dots \rightarrow Z'_0, (S'_i))$ en une présentation Γ -admissible $(Z'_{2n} \rightarrow \dots \rightarrow Z'_0, (S'_i))$ de (Z', S') de longueur n . Il est alors immédiat que

$$\left(Z_{2n} \coprod Z'_{2n} \rightarrow \dots \rightarrow Z_1 \coprod Z'_1 \rightarrow X, ((S'_i \coprod S_i)_{1 \leq i \leq 2n}, \emptyset) \right)$$

est une présentation Γ -admissible de $(Z \coprod Z', S \coprod S')$. Il s'ensuit que $(Z \coprod Z', S \coprod S')$ est un Γ -enjoliveur d X de classe $\leq n$.

Nous allons montrer que sa classe est exactement n sauf dans le cas exceptionnel mentionné dans l'énoncé. Soit $(T_{2p} \rightarrow \dots \rightarrow T_0, (\Sigma_i))$ une présentation Γ -admissible de $(Z \coprod Z', S \coprod S')$. On distingue maintenant deux cas.

Supposons tout d'abord que $p = 0$, c'est-à-dire que $(Z \coprod Z', S \coprod S')$ est de classe nulle. Dans ce cas Z et Z' sont des ouverts fermés complémentaires de X , et S et S' sont vides. Réciproquement, si Z et Z' sont des ouverts fermés complémentaires de X et si S et S' sont vides, alors $(Z \coprod Z', S \coprod S')$ est de classe nulle, et (Z, S) (resp. (Z', S')) est de classe nulle si $Z = X$ (resp. $Z' = X$) et de classe 1 sinon.

Supposons maintenant que $p > 0$. On dispose alors d'un morphisme de $Z \coprod Z'$ vers T_{2p-1} qui est un éclatement de centre S_{2p-1} et de diviseur exceptionnel $S \coprod S'$. La décomposition de l'espace éclaté comme somme disjointe $Z \coprod Z'$ correspond à une décomposition de la réunion (ensembliste) des composantes irréductibles de T_{2p-1} non contenues dans Σ_{2p-1} comme une union disjointe $F \coprod F'$ d'ouverts fermés (de sorte que Z soit l'image réciproque de F , et Z' celle de F'). Soit \mathcal{I} le faisceau cohérent d'idéaux sur T_{2p-1} correspondant à Σ_{2p-1} , et soit \mathcal{J} celui correspondant à F' (muni disons de sa structure réduite). L'intersection $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ définit alors un sous-espace analytique fermé G de T_{2p-1} ; par construction, l'éclaté de T_{2p-1} le long de G s'identifie à Z , et son diviseur exceptionnel à S . En conséquence,

$$(Z \rightarrow T_{2p-1} \rightarrow \dots \rightarrow T_0, (S, G, \Sigma_{2p-2}, \dots, \Sigma_0))$$

est une présentation Γ -admissible de (Z, S) de longueur p . Il vient $p \geq n$, et la classe de $(Z \coprod Z', S \coprod S')$ est dès lors égale à n . □

Nous allons maintenant expliquer comment un enjoliveur d'un sous-espace analytique fermé peut se relever en un enjoliveur de l'espace ambiant. Nous aurons pour ce faire besoin de deux lemmes.

2.6. Lemme. — *Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme topologiquement séparé entre espaces k -analytiques. Ce morphisme est séparé si et seulement si sa diagonale $\delta: Y \rightarrow Y \times_X Y$ est sans bord.*

Démonstration. — La condition est clairement nécessaire puisqu'une immersion fermée est sans bord. Réciproquement, supposons que δ est sans bord. Pour montrer que $Y \rightarrow X$ est séparé, on peut raisonner G -localement sur X et donc le supposer affinoïde. Dans ce cas Y est topologiquement séparé, et il suffit de démontrer que $Y \rightarrow X$ est localement séparé ([Ber93], Prop. 1.4.2). Si U est un ouvert de Y , la

restriction $\delta|_U$ est composée de la diagonale $U \rightarrow U \times_X U$ et de l'immersion ouverte $U \times_X U \hookrightarrow Y \times_X Y$; par conséquent, la diagonale $U \rightarrow U \times_X U$ est sans bord. On peut donc raisonner sur un recouvrement ouvert de Y , ce qui permet de supposer ce dernier paracompact. Il possède alors un recouvrement localement fini (V_i) par des domaines affinoïdes, la réunion W des $V_i \times_X V_i$ est un domaine analytique fermé de $Y \times_X Y$ et δ se factorise par une immersion fermée $Y \hookrightarrow W$. Comme $W \hookrightarrow Y \times_X Y$ est localement séparé et comme δ est sans bord, il résulte de [Tem04] Cor. 5.7 que $\delta(Y) \subset \text{Int}(W/Y \times_X Y)$, qui n'est autre que l'intérieur *topologique* W' de W dans $Y \times_X Y$. Puisque $\delta(Y)$ est fermé dans W , il est fermé dans $Y \times_X Y$, et si l'on note Y' son ouvert complémentaire alors (W', Y') est un recouvrement ouvert de $Y \times_X Y$; par construction, $\delta^{-1}(W') \hookrightarrow W'$ et $\delta^{-1}(Y') \hookrightarrow Y'$ sont des immersions fermées, si bien que δ est une immersion fermée. \square

Le lemme suivant fait appel à la notion de germe d'un espace analytique le long d'une de ses parties, pour laquelle nous renvoyons à [Ber93], 3.4. Par ailleurs, nous dirons qu'un morphisme d'espaces k -analytiques f est compact si $f^{-1}(K)$ est compact pour toute partie compacte K du but. Comme un espace de Berkovich a une base de voisinages compacts, cela revient à demander que f soit topologiquement séparé et topologiquement propre.

2.7. Lemme. — *Soit X un espace k -analytique Γ -strict et paracompact, et soit Z un sous-espace k -analytique fermé de X .*

Soit \mathbf{C} (resp. \mathbf{C}') la sous-catégorie strictement pleine de la catégorie des (X, Z) -germes d'espaces k -analytiques Γ -stricts engendrée par les objets de la forme $(Y, f^{-1}(Z))$ où $f: Y \rightarrow X$ est un morphisme séparé et quasi-étale (resp. séparé, quasi-étale et compact) de source Γ -stricte et paracompacte; soit \mathbf{D} (resp. \mathbf{D}') la sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces Z -analytiques Γ -stricts et paracompacts dont le morphisme structural vers Z est séparé et quasi-étale (resp. séparé, quasi-étale et compact).

- (1) *Le foncteur $(Y, T) \mapsto T$ de \mathbf{C} vers \mathbf{D} est pleinement fidèle.*
- (2) *Le foncteur $(Y, T) \mapsto T$ de \mathbf{C}' vers \mathbf{D}' est une équivalence de catégories.*

Démonstration. — On montre les deux assertions séparément.

2.7.1. Preuve de l'assertion (1). — Soient (Y, T) et (Y', T') deux objets de \mathbf{C} . Soit τ un Z -morphisme $T \rightarrow T'$. Le point τ induit une section σ de l'espace T -analytique $T' \times_Z T$. Par séparation, le sous-ensemble $\sigma(T)$ de $T' \times_Z T$ est contenu dans l'intérieur relatif de $T' \times_Z T$ sur T . Puisqu'une immersion fermée est sans bord, cette image est même contenue dans $\Omega := \text{Int}(Y' \times_X Y \rightarrow Y)$. Remarquons que comme le morphisme $Y' \times_X Y \rightarrow Y$ est quasi-étale, Ω est exactement l'ensemble des points en lesquels il est étale.

En vertu de [Ber93], Prop. 4.1.2, Cor. 4.1.3 (ii) et Prop. 4.3.4, la section σ du faisceau sur $T_{\text{ét}}$ représenté par $\Omega \times_Y T \rightarrow T$ s'étend en une unique section du faisceau sur $(Y, T)_{\text{ét}}$ représenté par Ω ; mais comme Y est paracompact, une telle section n'est autre qu'un germe de section du morphisme $\Omega \rightarrow Y$ au voisinage de T ([Ber93], Prop. 4.3.5). Il s'ensuit que le morphisme τ initialement donné se prolonge en un unique

germe de X -morphisme de Y vers Y' au voisinage de T , ce qui achève la preuve de (1).

2.7.2. Preuve de l'assertion (2). — Il résulte de (1) que le foncteur $(Y, T) \mapsto T$ de \mathcal{C}' vers \mathcal{D}' est pleinement fidèle; il reste à montrer son essentielle surjectivité. On peut pour cela, en raisonnant composante par composante, supposer X connexe. Il est alors dénombrable à l'infini et en particulier réunion d'une famille dénombrable (X_i) de domaines affinoïdes Γ -stricts. Soit T un espace k -analytique paracompact et Γ -strict et soit $f: T \rightarrow Z$ un morphisme séparé, compact et quasi-étale. Pour tout i , posons $Z_i = Z \times_X X_i$ et $T_i = T \times_Z Z_i$. Chacun des T_i est Γ -strict et compact car f est compact, et il possède donc lui-même un recouvrement affinoïde Γ -strict fini $(T_{ij})_j$.

Fixons (i, j) , et soit $t \in T_{ij}$. Comme T_{ij} et Z_i sont bons, il existe un morphisme étale $U \rightarrow Z_i$ et un Z -isomorphisme entre un voisinage affinoïde Γ -strict S de t dans T_{ij} et un domaine affinoïde de U . Quitte à restreindre U (et S) on peut en vertu de la prop. 4.2.1 de [Ber93] supposer que U est de la forme $V \times_{X_i} Z_i$ où $V \rightarrow X_i$ est étale et séparé. En tant que domaine analytique compact et Γ -strict de U , on peut écrire S sous la forme $\Sigma \cap U = \Sigma \times_{X_i} Z_i$ pour un certain domaine analytique compact et Γ -strict Σ de V .

Il découle de ce qui précède qu'il existe un recouvrement dénombrable $(S_\ell)_{\ell \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$ de T par des domaines analytiques compacts et Γ -stricts tel que chaque S_ℓ s'écrive $\Sigma_\ell \times_X Z$ pour un certain espace X -analytique Σ_ℓ qui est compact et Γ -strict et dont le morphisme structural vers X est quasi-étale et séparé. Nous allons construire récursivement une famille (Σ'_ℓ) d'espaces k -analytiques compacts et Γ -stricts munis de morphismes quasi-étales vers X possédant les propriétés suivantes :

- ◊ Pour tout ℓ chacun des Σ_m avec $m \leq \ell$ s'identifie (au-dessus de X) à un domaine analytique de Σ'_ℓ , l'espace Σ'_ℓ est la réunion des Σ_m pour $m \leq \ell$, et $\Sigma'_\ell \times_X Z$ s'identifie à la réunion S'_ℓ des S_m pour $m \leq \ell$, d'une manière compatible aux plongements $\Sigma_m \hookrightarrow \Sigma'_\ell$.
- ◊ Pour tout ℓ l'espace Σ'_ℓ s'identifie (au-dessus de X) à un domaine analytique de $\Sigma'_{\ell+1}$, de manière compatible avec les flèches $\Sigma_m \hookrightarrow \Sigma'_\ell$ et $\Sigma_m \hookrightarrow \Sigma'_{\ell+1}$ pour tout $m \leq \ell$.

On pose $\Sigma'_0 = \Sigma_0$. Supposons $\ell > 0$ et Σ'_ℓ construit. Il existe un domaine analytique compact et Γ -strict F de $\Sigma_{\ell+1}$ et un domaine analytique compact et Γ -strict G de Σ'_ℓ tels que $S_{\ell+1} \cap S'_\ell$ s'identifie à $F \times_X Z$ en tant que domaine analytique de $S_{\ell+1}$, et à $G \times_X Z$ en tant que domaine analytique de S'_ℓ . Il résulte alors de l'assertion (1) déjà démontrée que quitte à restreindre F et G on peut supposer qu'il existe un X -isomorphisme $\iota: F \simeq G$ compatible aux identifications de $F \times_X Z$ et $G \times_X Z$ avec $S_{\ell+1} \cap S'_\ell$, et l'on définit $S'_{\ell+1}$ comme le recollement de $S_{\ell+1}$ et S'_ℓ le long de ι .

La famille (Σ'_ℓ) étant construite, on note Σ le X -espace obtenu en recollant les Σ'_ℓ le long des plongements $\Sigma'_\ell \hookrightarrow \Sigma'_{\ell+1}$. Par construction Σ est un espace k -analytique Γ -strict muni d'un morphisme compact et quasi-étale $\Sigma \rightarrow X$ et d'une identification $\Sigma \times_X Z \simeq T$. Toutefois, compte-tenu de la manière un peu brutale avec laquelle nous avons procédé aux recollements, il est possible que $\Sigma \rightarrow X$ ne soit pas séparé. Mais puisque $T \rightarrow Z$ est séparé, le morphisme diagonal $\Sigma \times_X \Sigma \rightarrow \Sigma$ est sans bord au-dessus de Z ; par compacité des flèches en jeu, il est sans bord au-dessus d'un voisinage de

Z , et $\Sigma \rightarrow X$ est alors séparé au-dessus de ce même voisinage en vertu du lemme 2.6, ce qui termine la démonstration. \square

2.8. Notation. — Soit $V \rightarrow Z$ un morphisme entre espaces k -analytiques, soit S un sous-espace analytique fermé de Z et soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur V . Nous noterons $\mathcal{F} \circlearrowleft_S V$ le quotient de \mathcal{F} par sous sous-faisceau constitué des sections à support contenu ensemblistement dans $V \times_Z S$. C'est encore un faisceau cohérent (cf. [Duc21], 6.1).

Le quotient $\mathcal{O}_V \circlearrowleft_Z S$ de \mathcal{O}_V définit un sous-espace analytique fermé de V que nous noterons $V \circlearrowleft_Z S$. C'est par construction l'adhérence analytique de $V \setminus (V \times_Z S)$ dans V (l'adhérence analytique est le pendant de l'adhérence schématique en géométrie analytique, cf. [Duc21], Lemme-définition 2.7).

2.9. Proposition. — Soit X un espace k -analytique et Γ -strict compact et soit Y un sous-espace analytique fermé de X . Soit (W, T) un Γ -enjoliveur de Y et soit n sa classe. Il existe un Γ -enjoliveur (Z, S) de X de classe $\leq n$ tel que les propriétés suivantes soient satisfaites :

- (1) $W = (Y \times_X Z) \circlearrowleft_Z S$;
- (2) $T = W \times_Z S$;
- (3) l'image de S sur X est égale à celle de T .

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur n . Si $n = 0$ alors $(W, T) = (Y, \emptyset)$ et on peut prendre $(Z, S) = (X, \emptyset)$. Supposons maintenant $n > 0$ et le résultat vrai pour les entiers $< n$. Puisque (W, T) est de classe n il existe un Γ -enjoliveur (U, Σ) de classe $n - 1$ sur Y , un espace k -analytique compact et Γ -strict V , un morphisme quasi-étale $V \rightarrow U$, et un sous-espace analytique fermé E de V contenant $V \times_U \Sigma$ et tel que W s'identifie à l'éclatement de V le long de E , et T à son diviseur exceptionnel.

L'hypothèse de récurrence assure alors l'existence d'un Γ -enjoliveur (D, R) de X de classe $\leq n - 1$ tel que les trois propriétés suivantes soient satisfaites :

- (a) $U = (Y \times_X D) \circlearrowleft_D R$;
- (b) $\Sigma = U \times_D R$;
- (c) l'image de R sur X est égale à celle de Σ .

Il résulte du lemme 2.7 qu'il existe un espace k -analytique compact et Γ -strict D' et un morphisme quasi-étale et séparé $D' \rightarrow D$ tel que V s'identifie à $D' \times_D U$.

Soit \mathcal{I} le faisceau cohérent d'idéaux de \mathcal{O}_D définissant R et soit \mathcal{J} le faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_{D'}$ définissant $E \hookrightarrow V \hookrightarrow D'$; notons F le sous-espace analytique fermé de D' défini par le faisceau d'idéaux $(\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{D'}) \cap \mathcal{J}$; notons Z l'éclaté de D' le long de F et S le diviseur exceptionnel de cet éclatement. Par construction, (Z, S) est un Γ -enjoliveur de X de classe $\leq n$.

L'espace W s'identifie à l'éclatement de V le long de E . Puisque $\Sigma = U \times_D R$ et puisque E contient $V \times_U \Sigma$, le sous-espace analytique fermé $V \times_{D'} F$ de V s'identifie à E . Par conséquent, W est la transformée stricte de V relative à l'éclatement $Z \rightarrow D'$

si bien que $T = W \times_Z S$ et que

$$\begin{aligned} W &= (Z \times_{D'} V) \otimes_Z S \\ &= (Z \times_D U) \otimes_Z S \\ &= (Z \times_D ((Y \times_X D) \otimes_D R)) \otimes_Z S \\ &= (Z \times_X Y) \otimes_Z S, \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du fait que S contient par définition $Z \times_D R$.

L'égalité $T = W \times_Z S$ assure que l'image de T sur X est contenue dans celle de S . Et l'image de S sur X est contenue dans celle de F , qui est elle-même contenue dans la réunion de l'image de E et de l'image de R , donc dans la réunion de l'image de E et de l'image de Σ . Puisque E contient $V \times_U \Sigma$, il s'ensuit que l'image de S sur X est contenue dans l'image de E , et partant dans celle de T . Par conséquent, l'image de S sur X est finalement égale à celle de T , ce qui achève la démonstration. \square

3. Aplatissement d'un faisceau cohérent : rappels et compléments

Le but de cette section est d'énoncer le théorème principal de [Duc21], ou plus précisément une version un peu renforcée de ce dernier, mais qu'on peut en fait essentiellement déduire de sa preuve, comme nous allons l'expliquer ensuite.

3.1. Notations. — Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme d'espaces k -analytiques et soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur Y . Nous noterons $\mathbb{P}(\mathcal{F}/X)$ le lieu de platitude relative de \mathcal{F} sur X . C'est un ouvert de Zariski de Y dont le fermé complémentaire sera noté $\mathbb{Q}(\mathcal{F}/X)$. Pour tout entier n , nous noterons $\mathbb{Q}(\mathcal{F}/X)_{\geq n}$ l'ensemble des points de $\mathbb{Q}(\mathcal{F}/X)$ en lesquels ce dernier est de dimension relative $\geq n$ sur X . On dit que \mathcal{F} est X -plat en dimensions $\geq n$ si $\mathbb{Q}(\mathcal{F}/X)_{\geq n}$ est vide. Enfin, nous noterons $\mathbb{Q}(\mathcal{F}/X)_{\geq n}^{\text{sat}}$ le saturé de $\mathbb{Q}(\mathcal{F}/X)_{\geq n}$ pour la relation d'équivalence définie par f , c'est-à-dire $f^{-1}(f(\mathbb{Q}(\mathcal{F}/X)_{\geq n}))$. Lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$ nous écrirons $\mathbb{P}(Y/X)$, etc. au lieu de $\mathbb{P}(\mathcal{O}_Y/X)$, etc.

3.2. Théorème (version un peu renforcée du théorème 6.6 de [Duc21])

Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques compacts et Γ -stricts. Soient N et n deux entiers avec $n \leq N$ et soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur Y qui est plat en dimensions $\geq N$. Il existe alors un Γ -enjoliveur (Z, S) de X de classe $\leq N - n$ et un domaine analytique compact et Γ -strict V de $Y \times_X Z$ tels que les conditions suivantes soient satisfaites.

- (1) $\mathcal{F}_V \otimes_Z S$ est Z -plat en dimensions $\geq n$;
- (2) $V \setminus V \times_Z S$ est contenu dans l'image réciproque de $Y \setminus \mathbb{Q}(\mathcal{F}/X)_{\geq n}$;
- (3) $V \times_Z S$ est contenu dans l'image réciproque de $\mathbb{Q}(\mathcal{F}/X)_{\geq n}^{\text{sat}}$;
- (4) l'image de $V \rightarrow Y$ contient $Y \setminus \mathbb{Q}(\mathcal{F}/X)_{\geq n}^{\text{sat}}$;
- (5) l'image de $V \times_Z S \rightarrow Y$ contient tout point de $\mathbb{Q}(\mathcal{F}/X)_{\geq n}$ dont l'image sur X n'est pas adhérente à $f(\mathbb{Q}(\mathcal{F}/X)_{\geq n}) \cap \mathbb{A}(X)$;
- (6) l'image de S sur X est contenue dans celle de $\text{Supp}(\mathcal{F})$, et si $\mathcal{F} \neq 0$ cette image est de dimension $\leq \dim \text{Supp}(\mathcal{F}) - n$.

3.3. — L'énoncé ci-dessus comprend deux améliorations mineures par rapport à celui du théorème 6.6 de [Duc21], et une vraie nouveauté, à savoir l'assertion (6). Nous allons tout d'abord discuter brièvement des deux améliorations mineures, avant de revenir plus en détail sur l'assertion (6).

3.3.1. *Les deux améliorations mineures.* — La première est la suivante : nous aplatissons \mathcal{F} (en dimensions $\geq n$) au moyen d'un seul Γ -enjoliveur, alors que le théorème 6.6 de [Duc21] le fait au moyen d'une famille finie de Γ -enjoliveurs ; mais cette différence entre les deux énoncés est illusoire, puisqu'il suffit de remplacer la famille finie d'enjoliveurs du théorème 6.6 de [Duc21] par sa somme disjointe (qui est bien un enjoliveur de la classe requise d'après le lemme 2.5).

La seconde amélioration concerne la classe du Γ -enjoliveur (X, S) . Nous la majorons par $N - n$ où N est *n'importe quel* entier tel que \mathcal{F} soit X -plat en dimensions $\geq N$, alors que dans le théorème 6.6 de [Duc21] nous établissons cette majoration pour un entier N spécifique, à savoir $d + 1$ où d est un entier majorant la dimension des fibres de $\text{Supp}(\mathcal{F}) \rightarrow X$ (notons que la X -platitude de \mathcal{F} en dimensions $\geq d + 1$ est tautologique). Or la preuve procède par récurrence descendante sur n , en partant de $n = d + 1$, et la seule propriété de l'entier $d + 1$ qui est utilisée est précisément la X -platitude de \mathcal{F} en dimensions $\geq d + 1$, qui rend trivial le cas où $n = d + 1$ (l'enjoliveur (X, \emptyset) et le domaine analytique $V = Y$ conviennent alors) et assure ainsi l'initialisation de la récurrence. Il est dès lors licite dans l'énoncé de remplacer $d + 1$ par *n'importe quel* entier N tel que \mathcal{F} soit X -plat en dimensions $\geq N$, avec exactement la même démonstration, à ceci près que l'on commence par traiter le cas trivial où $n = N$.

3.3.2. *Le cas de l'assertion (6).* — Comme nous l'avons dit, celle-ci ne figure pas dans notre énoncé originel, mais nous allons voir qu'elle se déduit relativement aisément de sa preuve. Celle-ci construit en fait étape par étape les termes (Z_i, S_i) d'une présentation Γ -admissible de $(Z, S) = (Z_{2N-2n}, S_{2N-2n})$ en partant de $(Z_0, S_0) = (X, \emptyset)$. De plus elle fournit pour tout entier i entre 0 et $N - n$ un domaine analytique compact et Γ -strict V_{2i} tel que (Z_{2i}, S_{2i}, V_{2i}) satisfasse aux conclusions du théorème pour l'entier $N - i$ (au lieu de n), avec bien entendu $V_0 = Y$ et $V_{2N-2n} = V$.

Fixons $i < N - n$ et supposons Z_{2i}, S_{2i} et V_{2i} construits. Le cœur de la preuve consiste à fabriquer Z_{2i+1} et S_{2i+1} (d'où Z_{2i+2} et S_{2i+2} se déduisent par éclatement), ainsi que le domaine V_{2i+2} . Nous n'allons pas redécrire en détail l'ensemble du procédé, mais simplement évoquer les faits qui vont être utiles pour établir (6).

Le sous-espace analytique fermé S_{2i+1} de Z_{2i+1} est défini par le produit du faisceau d'idéaux inversible définissant $Z_{2i+1} \times_{Z_{2i}} S_{2i}$ et d'un faisceau d'idéaux \mathcal{I}_i dont on note Σ_i le sous-espace analytique fermé associé ; ensemblistement, on a donc l'égalité $S_{2i+1} = Z_{2i+1} \times_{Z_{2i}} S_{2i} \cup \Sigma_i$. De plus, il existe :

- ◇ une décomposition de S_{2i+1} comme somme disjointe $\Omega_i \coprod \Omega'_i$ de deux ouverts fermés ;
- ◇ un espace k -analytique Γ -strict compact Θ_i muni d'un morphisme quasi-lisse $\Theta_i \rightarrow \Omega_i$ dont les fibres sont géométriquement intègres de dimension $N - i - 1$;

- ◊ un sous-espace analytique fermé réduit F_i de Θ_i , qui est contenu dans l'image de la composée d'une famille finie de Z_{2i+1} -morphisms finis, composée dont le but est Θ_i et dont la source s'immerge dans $\text{Supp}(\mathcal{F}_{V_{2i} \times_{Z_{2i}} Z_{2i+1}})$,

tels que $\mathcal{J}_i \mathcal{O}'_{\Omega_i} = \mathcal{O}'_{\Omega_i}$ et que $\mathcal{J}_i \mathcal{O}_{\Omega_i}$ soit l'idéal des coefficients associé au sous-espace F_i du Ω_i -espace Θ_i (pour la définition et l'existence de l'idéal des coefficients dans la situation considérée ici, voir [Duc21], théorème 3.9).

Soit x un point de Σ_i non situé sur $Z_{2i+1} \times_{Z_{2i}} S_{2i}$; notons qu'il appartient en particulier au lieu quasi-étale de Z_{2i+1} sur X . Par ce qui précède x est situé sur Ω_i et il appartient au lieu des zéros de l'idéal des coefficients de F_i , ce qui signifie que $F_{i,x} = \Theta_{i,x}$. Puisque $\Theta_{i,x}$ est de dimension $N - i - 1$, le point x possède un antécédent y sur Θ_i tel que $d_{\mathcal{H}(x)}(y) = N - i - 1$. Étant situé sur F_i , le point y est l'image d'un point z du support de $\mathcal{F}_{Z_{2i+1} \times_{Z_{2i}} V_{2i}}$ par une composée de morphismes finis, si bien que $d_k(y) = d_k(z)$. Comme x est situé sur le lieu quasi-étale de $Z_{2i+1} \rightarrow X$, le point z est situé sur le lieu quasi-étale de $Z_{2i+1} \times_{Z_{2i}} V_{2i} \rightarrow Y$; si t désigne son image sur Y on a donc $d_k(z) = d_k(t) \leq \dim \text{Supp}(\mathcal{F})$. Il s'ensuit que l'image ξ de x sur X appartient à l'image de $\text{Supp}(\mathcal{F})$ et que

$$d_k(\xi) = d_k(x) \leq \dim \text{Supp}(\mathcal{F}) - N + i + 1.$$

Soit s un point de S . Puisque S_0 est vide et puisque S_{2i} est pour tout i entre 1 et $N - n$ l'image réciproque de S_{2i-1} sur Z_{2i} , il existe i entre 0 et $N - n - 1$ tel que l'image de s sur Z_{2i+1} appartienne à S_{2i+1} mais pas à l'image réciproque de S_{2i} ; cette image est donc située sur

$$\Sigma_i \setminus Z_{2i+1} \times_{Z_{2i}} S_{2i},$$

et il résulte alors de ce qui précède que l'image ξ de s sur X appartient à l'image de $\text{Supp}(\mathcal{F})$ (qui est dès lors non vide) et qu'on a

$$d_k(\xi) \leq \dim \text{Supp}(\mathcal{F}) - N + i + 1 \leq \dim \text{Supp}(\mathcal{F}) - n.$$

4. Comment enjoliver un morphisme arbitraire

Dans [Duc21], nous utilisons notre théorème d'aplatissement pour enjoliver de différentes façons un morphisme entre espaces analytiques, par changement de base le long d'un enjoliveur et passage à la transformée stricte (*op. cit.*, théorèmes 7.3 et 7.5). Nous nous proposons dans cette section de reprendre les méthodes de démonstration de ces énoncés et de les améliorer pour obtenir un résultat qui les coiffe et les étend (théorème 4.3 ci-dessous).

4.1. — Nous aurons souvent dans la suite à considérer la situation suivante : $Y \rightarrow X$ est un morphisme entre espaces k -analytiques, (Z, S) est un enjoliveur de X , V est un domaine analytique de $Y \times_X Z$, et l'on s'intéresse aux propriétés du Z -espace $V \otimes_Z S$. Indiquons-en ici quelques unes.

L'ouvert $Y \times_X Z \setminus Y \times_X S$ est quasi-étale sur Y , et $V \setminus V \times_Z S$ est en particulier réduit dès que Y est réduit; par conséquent, $V \otimes_Z S \rightarrow Y$ est génériquement quasi-étale, et $V \otimes_Z S$ est réduit dès que Y est réduit. Et si v est un point de $A(V \otimes_Z S)$

alors $A(V \otimes_Z S) \rightarrow Y$ est quasi-étale en v , si bien que l'image y de v sur Y appartient à $A(Y)$ et vérifie l'égalité $d_k(v) = d_k(y)$. Ceci a plusieurs conséquences.

- ◊ Si Y est purement de dimension n pour un certain entier n , il en va de même de $V \otimes_Z S$.
- ◊ Supposons qu'il existe un entier d tel que $Y \rightarrow X$ soit génériquement de dimension d , c'est-à-dire encore telle que la dimension de $Y \rightarrow X$ soit égale à d en tout point de $A(Y)$. Soit v un point de $A(V \otimes_Z S)$. Comme v est situé au-dessus d'un point de $A(Y)$, la dimension de $Y \times_X Z \rightarrow Z$ en v est égale à d , et il en va de même de la dimension de $V \rightarrow Z$ en v ; et puisque v appartient à $A(V \otimes_Z S)$, il possède un voisinage ouvert dans V qui est aussi un ouvert de $V \otimes_Z S$, si bien que la dimension de $V \otimes_Z S \rightarrow Z$ en v est encore égale à d . On a donc démontré que $V \otimes_Z S \rightarrow Z$ est génériquement de dimension d .

4.2. Compléments sur la dimension relative. — Nous allons maintenant rappeler quelques résultats élémentaires sur la dimension relative tirés de la section 7 de [Duc21].

Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques.

4.2.1. — Pour tout $y \in A(Y)$ on a

$$d_k(f(y)) = d_k(y) - \dim_y f$$

([Duc21], Lemma 7.1 (1)).

4.2.2. — Soit y un point de $A(Y)$ en lequel f est plat. Soit d la dimension relative de f en y . Par ce qui précède on a $d_k(f(y)) = d_k(y) - d$, et par platitude on a $\dim_{f(y)} X = \dim_y Y - d = d_k(y) - d$, si bien que $\dim_{f(y)} X = d_k(f(y))$; autrement dit, $f(y) \in A(X)$.

Réciproquement si x est un point de $A(X)$ et si X est réduit alors f est plat en tout point de la fibre $f^{-1}(x)$ (théorème 10.3.7 de [Duc18]).

4.2.3. — On suppose que Y est non vide et l'on note n sa dimension. On suppose aussi qu'il existe un entier d tel que f soit génériquement de dimension d (cela signifie que d est la valeur minimale prise par $\dim f$, et que l'ouvert de Zariski de Y formé des points y tels que $\dim_y f = d$ est dense).

4.2.3.1. — Comme $\dim Y = n$ il existe un point y de Y tel que $d_k(y) = n$; le point y appartient à $A(Y)$, ce qui implique que $\dim_y f = d$, et la formule du 4.2.1 assure alors que $d_k(f(y)) = n - d$.

Par ailleurs si x est un point appartenant à $f(Y)$ la fibre $f^{-1}(x)$ est de dimension supérieure ou égale à d si bien qu'il existe $z \in f^{-1}(x)$ tel que $d_{\mathcal{H}(x)}(z) \geq d$, et il vient

$$n \geq d_k(z) = d_{\mathcal{H}(x)}(z) + d_k(x) \geq d_k(x) + d.$$

En conséquence $d_k(x) \leq n - d$. Il s'ensuit que $f(Y)$ est exactement de dimension $n - d$.

4.2.3.2. — Si x est un point de $f(Y)$ tel que $d_k(x) = n - d$, on a pour tout $z \in f^{-1}(x)$ les inégalités $n \geq d_k(z) = d_{\mathcal{H}(x)}(z) + d_k(x) = d_{\mathcal{H}(x)}(z) + n - d$, ce qui implique que $d_{\mathcal{H}(x)}(z) \leq d$. Par conséquent $f^{-1}(x)$ est de dimension $\leq d$, et est dès lors purement de dimension d puisque f est partout de dimension $\geq d$.

On en déduit au vu de 4.2.1 que la fibre $f^{-1}(f(y))$ est purement de dimension d pour tout point y de Y tel que $d_k(y) = n$.

4.2.3.3. — L'ensemble des points y de Y tels que $\dim_y f \geq d + 1$ coïncide avec $Q(Y/X)_{\geq d+1}$ ([Duc21], lemme 7.2).

4.3. Théorème. — Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques compacts, Γ -stricts et réduits. On suppose que Y est non vide et équidimensionnel, et l'on note n sa dimension. On désigne par d et δ les valeurs minimale et maximale de la dimension relative de Y sur X , et l'on suppose que le lieu des points en lesquels cette dimension vaut d est dense.

(A) Il existe un Γ -enjoliveur (Z, S) sur X de classe $\leq \delta + 1$, et un domaine analytique compact et Γ -strict V de $Y \times_X Z$ possédant les propriétés suivantes :

- (1) La flèche $V \otimes_Z S \rightarrow Y$ est surjective.
- (2) La flèche $V \otimes_Z S \rightarrow Z$ se factorise par un morphisme plat et surjectif sur un sous-espace analytique fermé réduit F de Z purement de dimension $n - d$.
- (3) L'image de S sur X est contenue dans celle de Y et est de dimension strictement inférieure à $n - d$.

(B) Pour tout (Z, S, V, F) possédant les propriétés ci-dessus l'espace $V \otimes_Z S$ est réduit et purement de dimension n , la flèche $V \otimes_Z S \rightarrow Y$ est génériquement quasi-étale, la flèche $V \otimes_Z S \rightarrow F$ est purement de dimension relative d , et $S \cap F$ est d'intérieur vide dans F .

Démonstration. — Commençons par montrer (B). Il résulte de 4.1 que $V \otimes_Z S \rightarrow Y$ est génériquement quasi-étale et que $V \otimes_Z S$ est réduit et purement de dimension n (ce dernier point provenant du fait que Y est lui-même purement de dimension n). Il découle de la platitude de $V \otimes_Z F \rightarrow F$ que ses fibres sont purement de dimension $n - d$.

Enfin, soit $s \in S \cap F$. La fibre de $V \otimes_Z S$ en s est non vide par surjectivité de $V \otimes_Z S \rightarrow F$, et elle est purement de dimension d . Elle possède donc un point t tel que $d_{\neq(s)}(t) = d$. Mais par définition de $V \otimes_Z S$, l'image réciproque de S sur ce dernier est d'intérieur vide ; en conséquence, $n > d_k(t) = d_k(s) + d$, et $d_k(s) < n - d$. Il en résulte que $S \cap F$ est d'intérieur vide dans F .

Il reste donc désormais à démontrer (A).

4.3.1. — Nous allons maintenant décrire deux situations dans lesquelles il suffit, pour démontrer l'énoncé (A) pour le morphisme $Y \rightarrow X$, de le démontrer pour un morphisme auxiliaire. Cela jouera un rôle crucial dans notre preuve en permettant de se réduire par étapes au cas génériquement plat.

4.3.1.1. — Supposons qu'il existe un sous-espace analytique fermé et réduit X_0 de X tel que le morphisme $Y \rightarrow X$ admette une factorisation de la forme $Y \rightarrow X_0 \hookrightarrow X$, et tel que l'assertion (A) vaille pour le morphisme $Y \rightarrow X_0$; elle vaut alors pour $Y \rightarrow X$.

En effet, il existe par hypothèse un Γ -enjoliveur (W, T) de X_0 de classe $\leq \delta + 1$ et un domaine analytique compact et Γ -strict U de $Y \times_{X_0} W$ satisfaisant aux conditions suivantes.

- (i) La flèche $U \otimes_W T \rightarrow Y$ est surjective.
- (ii) La flèche $U \otimes_W T \rightarrow W$ se factorise par un morphisme plat et surjectif sur un sous-espace analytique fermé réduit de W purement de dimension $n - d$.
- (iii) L'image de T sur X_0 est contenue dans celle de Y et de dimension $< n - d$.

En vertu de la proposition 2.9, il existe un Γ -enjoliveur (Z, S) de X de classe $\leq \delta + 1$ tel que W s'identifie à $(X_0 \times_X Z) \otimes_Z S$, tel que $T = W \times_Z S$, et tel que l'image de S sur X soit égale à celle de T . Choisissons un domaine analytique compact et Γ -strict V de $Y \times_X Z$ dont la trace sur son sous-espace analytique fermé $Y \times_X W = Y \times_{X_0} W$ est égale à U . On a alors

$$V \otimes_Z S = U \otimes_Z S = U \otimes_W T$$

où la première égalité vient du fait que $W = (X_0 \times_X Z) \otimes_Z S$, et la seconde du fait que $T = W \times_Z S$. Le triplet (Z, S, V) satisfait alors l'assertion (A) relativement au morphisme $Y \rightarrow X$.

4.3.1.2. — Soient c et c' deux entiers de somme $\delta - d$, soit (W, T) un Γ -enjoliveur sur X de classe c , et soit U un domaine analytique compact et Γ -strict de $Y \times_X W$. On suppose que $U \otimes_W T \rightarrow Y$ est surjective, que l'image de T sur X est contenue dans celle de Y , que la dimension relative de $U \otimes_W T \rightarrow W$ est majorée par $d + c'$ et que $U \otimes_W T \rightarrow W$ satisfait l'assertion (A) (on sait d'après 4.1 que $U \otimes_W T$ est purement de dimension n et que la dimension générique de $U \otimes_W T \rightarrow W$ est égale à d ; quant à W , il est réduit). Nous allons montrer que $Y \rightarrow X$ satisfait également A. Dire que $U \otimes_W T \rightarrow W$ satisfait l'assertion (A) signifie qu'il existe un Γ -enjoliveur (Z, S) de W de classe $d + c' + 1$ et un domaine analytique compact et Γ -strict V de $(U \otimes_W T) \times_W Z$ tels que les conditions suivantes soient satisfaites

- (i) La flèche $V \otimes_Z S \rightarrow U \otimes_W T$ est surjective.
- (ii) La flèche $V \otimes_Z S \rightarrow Z$ se factorise par un morphisme plat et surjectif sur un sous-espace analytique fermé réduit de Z purement de dimension $n - d$.
- (iii) L'image de S sur W est contenue dans celle de $U \otimes_W T$ et de dimension $< n - d$.

Soit \mathcal{I} le faisceau cohérent d'idéaux sur Z correspondant à S , et soit \mathcal{J} celui correspondant à $Z \times_W T$. Soit Z' l'éclaté de Z le long de $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$ et soit S' le diviseur exceptionnel correspondant.

Comme $Z \rightarrow W$ est composé de morphismes quasi-étales et d'éclatements, le produit fibré $Z \times_W T$ est un diviseur de Cartier de Z ; par conséquent l'idéal $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$ est inversible, si bien que Z' s'identifie à Z , et S' à la somme des diviseurs de Cartier effectifs S et $Z \times_W T$; nous utilisons désormais la notation Z plutôt que Z' , mais conservons la notation S' . Par construction, (Z, S') est un Γ -enjoliveur de X , de classe majorée par $d + c + c' + 1 = \delta + 1$.

Soit s un point de S' , soit w son image sur W et soit x l'image de s sur X (qui est aussi l'image de w). Si w appartient à T alors x appartient à l'image de Y et

$d_k(x) < n - d$ par hypothèse ; sinon, s appartient à S , auquel cas on w appartient à l'image de $U \otimes_Z T$ et vérifie la majoration $d_k(w) < n - d$, si bien que x appartient à l'image de Y et que $d_k(x) < n - d$.

Le domaine analytique V de $(U \otimes_W T) \times_W Z$ est la trace d'un domaine analytique compact et Γ -strict Ω de $U \times_W Z$, qu'on peut également voir comme un domaine analytique compact et Γ -strict de $Y \times_X Z$. Une composante irréductible de Ω est contenue dans S' si et seulement si elle est contenue dans $Z \times_W T$ ou dans S ; par conséquent, $\Omega \otimes_Z S'$ coïncide avec $V \otimes_Z S$. Il s'ensuit que $\Omega \otimes_Z S' \rightarrow Y$ est surjective et que $\Omega \otimes_Z S' \rightarrow Z$ se factorise par un morphisme plat et surjectif sur un sous-espace analytique fermé réduit de Z purement de dimension $n - d$. Le Γ -enjolveur (Z, S') de X et le domaine analytique compact et Γ -strict Ω de $Y \times_X Z$ satisfont les assertions (1), (2) et (3) relativement au morphisme $Y \rightarrow X$, qui satisfait dès lors lui-même l'assertion (A).

4.3.2. Démonstration proprement dite. — Elle va consister à se réduire dans un premier temps au cas relativement équidimensionnel, puis dans un second temps au cas génériquement plat.

4.3.2.1. Réduction au cas où $\delta = d$. — Appliquons le théorème 3.2 en prenant le triplet (\mathcal{F}, d, n) de son énoncé égal à $(\mathcal{O}_X, \delta, d + 1)$.

Il assure l'existence d'un Γ -enjolveur (Z, S) de classe $(\delta - d)$ de X et d'un domaine analytique compact et Γ -strict V de $Y \times_X Z$ tel que les propriétés suivantes soient satisfaites :

- ◊ $V \otimes_Z S \rightarrow Z$ est plat en dimensions $\geq d + 1$.
- ◊ L'image de $V \otimes_Z S \rightarrow Y$ contient $Y \setminus \mathbb{Q}(Y/X)_{\geq d+1}^{\text{sat}}$.
- ◊ L'image de S sur X est contenue dans l'image de Y et de dimension $\leq n - d - 1$.

Comme $V \otimes_Z S \rightarrow Z$ est génériquement de dimension d , le fait que ce morphisme soit plat en dimensions $\geq d + 1$ signifie simplement comme rappelé en 4.2.3.3 qu'il est purement de dimension relative d . Et il résulte également de *loc. cit.* que $\mathbb{Q}(Y/X)_{\geq d+1}$ est le lieu des points de Y en lesquels la dimension relative de $Y \rightarrow X$ vaut $d + 1$. L'image de $V \otimes_Z S \rightarrow Y$ contient donc toutes les fibres de $Y \rightarrow X$ purement de dimension d , et en particulier, au vu de 4.2.3.2, tous les points de $\mathbb{A}(Y)$. Cette image est donc dense dans Y . Comme elle est compacte, c'est Y tout entier.

Il résulte dès lors de 4.3.1.2, appliqué avec $c = \delta - d$ et $c' = 0$, qu'il suffit de démontrer le théorème pour le morphisme $V \otimes_Z S \rightarrow Z$. On s'est donc bien ramené au cas où $\delta = d$, c'est-à-dire encore à celui où le morphisme $Y \rightarrow X$ est purement de dimension d .

4.3.2.2. Réduction au cas génériquement plat. — Le morphisme $Y \rightarrow X$ est purement de dimension relative d . Il s'ensuit en vertu du corollaire 4.7 de [Duc07] qu'il existe :

- ◊ un recouvrement fini (X_i) de X par des domaines affinoïdes Γ -stricts ;
- ◊ pour chaque i , un recouvrement fini $(Y_{ij})_j$ de $Y \times_X X_i$ par des domaines affinoïdes Γ -stricts ;

- ◇ pour chaque (i, j) , une factorisation de $Y_{ij} \rightarrow X_i$ de la forme $Y_{ij} \rightarrow T_{ij} \rightarrow X_i$ où T_{ij} est un espace k -affinoïde compact et Γ -strict, où $T_{ij} \rightarrow X_i$ est quasi-lisse et purement de dimension relative d , et où $Y_{ij} \rightarrow T_{ij}$ est fini.

Fixons (i, j) . Le morphisme $T_{ij} \rightarrow X_i$ étant quasi-lisse, il est en particulier plat et à fibres géométriquement réduites. Le théorème 3.11 de [Duc21] assure alors l'existence d'un espace k -affinoïde et Γ -strict X_{ij} muni d'un morphisme quasi-étale surjectif $X_{ij} \rightarrow X$, et d'un recouvrement $(T_{ij\ell})_\ell$ de $T_{ij} \times_{X_i} X_{ij}$ par des domaines analytiques compacts et Γ -stricts tels que les fibres du morphisme $T_{ij\ell} \rightarrow X_{ij}$ soient géométriquement connexes (et donc ici géométriquement intègres dès qu'elles sont non vides). Pour tout ℓ , notons $Y_{ij\ell}$ l'image réciproque de $T_{ij\ell}$ sur Y_{ij} , et $X_{ij\ell}$ l'image de $T_{ij\ell}$ sur X_{ij} (qui en est par platitude un domaine analytique compact et Γ -strict).

Récapitulons : on dispose d'une famille finie $(X_{ij\ell})$ d'espaces k -analytiques compacts et Γ -stricts et, pour chacun d'eux, d'un domaine analytique compact et Γ -strict $Y_{ij\ell}$ de $Y \times_X X_{ij\ell}$ tel que $Y_{ij\ell} \rightarrow X_{ij\ell}$ admette une factorisation

$$Y_{ij\ell} \rightarrow T_{ij\ell} \rightarrow X_{ij\ell}$$

où $T_{ij\ell}$ est compact et Γ -strict, où $Y_{ij\ell} \rightarrow T_{ij\ell}$ est fini, et où $T_{ij\ell} \rightarrow X_{ij\ell}$ est quasi-lisse à fibres géométriquement intègres de dimension d . Par construction, la réunion des images des $Y_{ij\ell} \rightarrow Y$ est égale à Y tout entier.

Fixons (i, j, ℓ) . Le morphisme $Y_{ij\ell} \rightarrow T_{ij\ell}$ étant fini, son image $F_{ij\ell}$ est un fermé de Zariski de $T_{ij\ell}$. Puisque $Y_{ij\ell} \rightarrow X_{ij\ell}$ est purement de dimension relative d et puisque les fibres de $T_{ij\ell} \rightarrow X_{ij\ell}$ sont irréductibles et de dimension d , le fermé $F_{ij\ell}$ est une réunion de fibres de $T_{ij\ell} \rightarrow X_{ij\ell}$. L'existence d'un idéal des coefficients pour $F_{ij\ell}$ (muni par exemple de sa structure réduite), assurée par le théorème 3.9 de [Duc21], assure alors que l'image de $F_{ij\ell}$ sur $X_{ij\ell}$ est un fermé de Zariski $\Lambda_{ij\ell}$ de ce dernier. Le morphisme $F_{ij\ell} \rightarrow \Lambda_{ij\ell}$ (la source et le but étant munis de leurs structures réduites) est quasi-lisse et purement de dimension relative d , et $F_{ij\ell}$ est purement de dimension n car c'est l'image de $Y_{ij\ell}$ par un morphisme fini, et car $Y_{ij\ell}$ est lui-même purement de dimension n , étant quasi-étale sur Y ; il s'ensuit que $\Lambda_{ij\ell}$ est purement de dimension $n - d$.

Posons $X' = \coprod X_{ij\ell}$, $\Lambda = \coprod \Lambda_{ij\ell}$ et $Y' = \coprod Y_{ij\ell}$. Tous ces espaces sont compacts et Γ -stricts, X' est muni d'un morphisme quasi-étale vers X , l'espace Y' est un domaine analytique de $Y \times_X X'$ se surjectant sur Y , et Λ est un fermé de Zariski de X' purement de dimension $n - d$; de plus lorsqu'on munit Λ de sa structure réduite le morphisme $Y' \rightarrow X'$ se factorise par Λ (et $Y' \rightarrow \Lambda$ est surjective, mais nous ne nous en servons pas).

Il suffit de démontrer le théorème pour le morphisme $Y' \rightarrow X'$ et partant, en vertu de 4.3.1.1, pour le morphisme $Y' \rightarrow \Lambda$. Supposons en effet qu'il existe un Γ -enjolveur (Z, S) de X' de classe $\leq d + 1$ et un domaine analytique compact et Γ -strict V tels que les propriétés suivantes soient satisfaites :

- ◇ La flèche $V \otimes_Z S \rightarrow Y'$ est surjective.
- ◇ La flèche $V \otimes_Z S \rightarrow Z$ se factorise par un morphisme plat et surjectif sur un sous-espace analytique fermé réduit de Z purement de dimension $n - d$.
- ◇ L'image de S sur X' est contenue dans celle de Y' et de dimension $< n - d$.

Choisissons une présentation Γ -admissible

$$((Z = Z_{2d+2} \rightarrow Z_{2d+1} \rightarrow \dots \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_0 = X'), (S_i)_{0 \leq i \leq 2d+2})$$

de (Z, S) sur X' (avec $S_0 = \emptyset$ et $S_{2d+2} = S$). En remplaçant Z_0 par X et la flèche quasi-étale $Z_1 \rightarrow X'$ par la composée $Z_1 \rightarrow X' \rightarrow X$, on obtient une présentation admissible de (Z, S) sur X de longueur $d+1$, et V peut être vu comme un domaine k -analytique compact et Γ -strict de $Y \times_X Z$. Il est alors immédiat que le Γ -enjoliveur (Z, S) de X et le domaine V satisfont les conclusions du théorème.

Il suffit donc bien de démontrer le théorème pour la flèche $Y' \rightarrow \Lambda$, ce qui permet de se ramener au cas où X est purement de dimension $n-d$ (la flèche $Y' \rightarrow \Lambda$ était également relativement équidimensionnelle, mais cela n'a plus d'intérêt à ce stade de la démonstration donc nous oublions cette hypothèse).

4.3.2.3. Démonstration dans le cas génériquement plat. — On suppose que X est purement de dimension $n-d$, auquel cas l'image de $A(Y)$ est contenue dans $A(X)$, l'ouvert de Zariski $P(Y/X)$ est dense dans Y , et il contient même l'intégralité de la fibre de tout point de $A(Y)$ (4.2.2).

Appliquons le théorème 3.2 en prenant le triplet (\mathcal{F}, d, n) de son énoncé égal à $(\mathcal{O}_X, \delta, 0)$. Il assure l'existence d'un Γ -enjoliveur (Z, S) de classe $(\delta+1)$ de X et d'un domaine analytique compact et Γ -strict V de $Y \times_X Z$ tel que les propriétés suivantes soient satisfaites (en se rappelant que «plat en dimensions ≥ 0 » signifie simplement «plat») :

- (1) $V \otimes_Z S \rightarrow Z$ est plat.
- (2) L'image de $V \otimes_Z S \rightarrow Y$ contient $Y \setminus Q(Y/X)^{\text{sat}}$, c'est-à-dire la réunion des fibres de $Y \rightarrow X$ entièrement contenues dans $P(Y/X)$.
- (3) L'image de $V \times_Z S$ sur Y est contenue dans $Q(Y/X)^{\text{sat}}$, ce qui veut dire qu'elle ne rencontre aucune fibre de $Y \rightarrow X$ entièrement contenue dans $P(Y/X)$.
- (4) L'image de S sur X est contenue dans celle de Y et est de dimension $\leq n$ (notons que cette dernière égalité n'apporte en fait aucune information, car elle était *a priori* évidente puisque $\dim Y = n$).

Puisque $V \otimes_Z S \rightarrow Z$ est plat, son image Z' sur Z est un domaine analytique compact et Γ -strict de Z , et l'on peut remplacer Z par Z' (et S par $S \cap Z'$) sans modifier les propriétés ci-dessus, ce qui permet de supposer $V \otimes_Z S \rightarrow Z$ surjective.

L'image de $V \otimes_Z S \rightarrow Y$ est une partie compacte de Y contenant la réunion des fibres entièrement incluses dans $P(Y/X)$; elle contient en particulier $A(Y)$, lequel est dense dans Y ; par conséquent, $V \otimes_Z S \rightarrow Y$ est surjective.

Soit s un point de S et soit x son image sur X . Pour terminer la démonstration, il reste à s'assurer que $d_k(x) \leq n-d-1$. Comme $V \otimes_Z S \rightarrow Z$ est surjectif, s possède un antécédent v sur V , dont l'image y sur Y est un antécédent de x . Puisque y est l'image d'un élément de $V \times_X S$, sa fibre n'est pas entièrement contenue dans $P(Y/X)$; ceci exclut que x appartienne à $A(X)$ (4.2.2). Par conséquent, $d_k(x) < m = n-d$. □

5. Un théorème de Chevalley non archimédien

Nous nous proposons dans cette section d'élucider autant qu'il est possible la structure de l'image d'un morphisme entre espaces analytiques compacts et Γ -stricts. Un passage en fin de preuve requerra l'existence d'une borne uniforme pour le cardinal des fibres géométriques d'un certain morphisme quasi-étale, aussi allons-nous commencer par une proposition qui établit l'existence d'une telle borne, mais dans un contexte bien plus général que celui dont nous aurons besoin ; cette proposition nous semble avoir un intérêt propre, et fournit un premier exemple d'énoncé qui se démontre en enjolivant un morphisme.

5.1. Proposition. — *Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques compacts et soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur Y . Pour tout $x \in X$ la quantité*

$$\lambda_x(\mathcal{F}) := \sum_{y \in Y_x, \dim_y Y_x = 0} \dim_{\mathcal{H}(x)} \mathcal{F}_{Y_x, y}$$

est finie, et elle est bornée indépendamment de x .

5.2. Remarque. — La proposition analogue pour un morphisme de type fini entre schémas noethériens est vraie, et se démontre facilement à l'aide du *Main Theorem* de Zariski. Celui-ci possède une déclinaison analytique ([Duc07], Théorème 3.2), mais on ne peut pas s'en servir directement ici, car le lieu des points en lesquels Y est quasi-fini sur X est un ouvert de Y qui n'est en général pas compact (alors que dans le monde schématique, il est quasi-compact).

Démonstration de la proposition 5.1. — On procède en plusieurs étapes. Notons qu'en raison de la compacité des espaces en jeu, l'assertion est G -locale sur X comme sur Y .

5.2.1. Le cas quasi-fini. — On suppose donc que $Y \rightarrow X$ est quasi-fini, c'est-à-dire purement de dimension nulle. En raisonnant G -localement à la source et au but on peut supposer X et Y affinoïdes puis, en raison de la version analytique *Main Theorem* de Zariski ([Duc07], Th. 3.2), que $Y \rightarrow X$ admet une factorisation $Y \rightarrow T \rightarrow X$ où T est affinoïde, où $\pi: Y \rightarrow T$ est fini, et où $T \rightarrow X$ est quasi-étale. On a pour tout $x \in X$ l'égalité $\lambda_x(\mathcal{F}) = \lambda_x(\pi_* \mathcal{F})$, et il suffit donc de montrer que cette dernière quantité est bornée indépendamment de x . En considérant une surjection de $\mathcal{O}(T)^N$ sur $\mathcal{F}(Y)$ (pour N convenable), on voit qu'il suffit de montrer que $\lambda_x(\mathcal{O}_T)$ est borné indépendamment de x . Comme c'est une propriété locale sur T , on peut supposer que T est un domaine affinoïde d'un espace affinoïde S fini et étale sur un domaine affinoïde X' de X , et il suffit de trouver une borne pour $\lambda_x(\mathcal{O}_S)$ indépendante du point $x \in X'$; on peut alors prendre le cardinal de n'importe quelle famille génératrice finie du $\mathcal{O}(X')$ -module de type fini $\mathcal{O}(S)$.

5.2.2. Le cas général : préparation. — L'assertion à démontrer ne mettant en jeu que les fibres de $Y \rightarrow X$, on peut supposer X réduit, et également irréductible en raisonnant composante par composante. On procède alors par récurrence sur la dimension m de X . Si $m = 0$ l'espace X ne compte qu'un point, et $Y \rightarrow X$ a donc une seule fibre, qui est compacte et ne compte par conséquent qu'un nombre fini de points

isolés, et *a fortiori* qu'un nombre fini de points rigides isolés ; la proposition est alors évidente.

On suppose désormais $m > 0$ et le résultat vrai en dimension $m - 1$. En raisonnant G-localement sur Y , on peut le supposer affinoïde ; soit B l'anneau de ses fonctions analytiques. Le faisceau \mathcal{F} est donné par un B -module de type fini M , qui par noethérianité de B admet une filtration finie dont les quotients successifs sont de la forme $B/\mathfrak{p}_1, \dots, B/\mathfrak{p}_n$ où les \mathfrak{p}_i sont des idéaux premiers. On peut donc supposer que M est lui-même de la forme B/\mathfrak{p} avec \mathfrak{p} premier. Si Z désigne le sous-espace analytique fermé $\mathcal{M}(B/\mathfrak{p})$ alors pour tout $y \in Z$ on a $\dim_y f|_Z \leq \dim_y f$, si bien qu'il suffit de majorer les sommes étudiées en remplaçant Y par Z . Autrement dit, on s'est ramené au cas où Y est intègre et où $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$. Si la dimension générique de $Y \rightarrow X$ est strictement positive les sommes étudiées sont toutes nulles ; on peut donc supposer que la dimension générique de $Y \rightarrow X$ est nulle.

5.2.3. *Le cas général.* — Le théorème 4.3 assure l'existence d'un enjoliveur (Z, S) sur X et d'un domaine analytique compact V de $Y \times_X Z$ tel que $V \mathcal{O}_Z S \rightarrow Y$ soit surjective et telle que $V \mathcal{O}_Z S \rightarrow Z$ se factorise par une surjection plate et quasi-finie $Z \rightarrow F$ où F est un sous-espace analytique fermé réduit de Z purement de dimension $\dim Y$.

5.2.3.1. — Notons g le morphisme $Z \rightarrow X$. En considérant une décomposition admissible

$$(Z_{2r} \rightarrow Z_{2r-1} \rightarrow \dots \rightarrow Z_0, (S_i))$$

de (Z, S) et en appliquant le cas quasi-fini déjà traité 5.2.1 aux morphismes quasi-étales $Z_{2i+1} \rightarrow Z_{2i}$ pour i compris entre 0 et $n - 1$, on obtient l'existence d'un entier d tel que pour tout $x \in X \setminus g(S)$,

$$\sum_{z \in Z, g(z)=x} [\mathcal{H}(z) : \mathcal{H}(x)] \leq d$$

(notons que comme $x \notin g(S)$, la fibre $g^{-1}(x)$ est contenue dans le lieu quasi-étale de Z sur X , et on sait donc *a priori* qu'elle consiste en un nombre fini de points z tels que $\mathcal{H}(z)$ soit fini séparable sur $\mathcal{H}(x)$).

5.2.3.2. *Utilisation de l'hypothèse de récurrence.* — Le diviseur de Cartier S de Z est purement de dimension $m - 1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à chacune de ses composantes irréductibles réduites on obtient l'existence d'un entier N_1 tel que $\lambda_s(\mathcal{O}_{Y \times_X Z}) \leq N_1$ pour tout $s \in S$. Si x est un point de X possédant un antécédent s sur S on a donc

$$\lambda_x(\mathcal{O}_Y) = \lambda_s(\mathcal{O}_{Y \times_X Z}) \leq N_1.$$

5.2.3.3. *Utilisation du cas quasi-fini.* — La flèche $V \mathcal{O}_Z S \rightarrow Z$ est quasi-finie. Comme la proposition est vraie dans le cas quasi-fini d'après d'après 5.2.1, il existe N_2 tel que $\lambda_z(\mathcal{O}_{V \mathcal{O}_Z S}) \leq N_2$ pour tout $z \in Z$. Soit x un point de X n'ayant aucun antécédent sur S . La fibre de Z en x consiste en vertu de 5.2.3.1 en un ensemble fini de points z_1, \dots, z_r tels que $\mathcal{H}(z_i)$ soit fini séparable sur $\mathcal{H}(x)$ pour tout i et tels que $\sum_i [\mathcal{H}(z_i) : \mathcal{H}(x)] \leq d$. En particulier, $r \leq d$, si bien que $\sum_i \lambda_{z_i}(\mathcal{O}_{V \mathcal{O}_Z S}) \leq dN_2$.

Soit y un point de Y_x en lequel Y_x est de dimension nulle. Par surjectivité de $V \otimes_Z S \rightarrow Y$, il existe un antécédent v de y sur $V \otimes_Z S$. Le point v est situé au-dessus de l'un des z_i , et n'appartient donc pas à S ; il en résulte que $\mathcal{O}_{(V \otimes_Z S)_{z_i, v}} = \mathcal{O}_{V_{z_i, v}}$, et ce dernier coïncide avec $\mathcal{O}_{(Y \times_X Z)_{z_i, v}}$ car $(Y \times_X Z)_{z_i}$ est de dimension nulle en v . Par conséquent, $\mathcal{O}_{(V \otimes_Z S)_{z_i, v}}$ est un sommande de $\mathcal{O}_{Y_x, y} \otimes_{\mathcal{H}(x)} \mathcal{H}(z_i)$. Si E désigne la fermeture séparable de $\mathcal{H}(x)$ dans l'anneau $\mathcal{O}_{Y_x, y}$ il existe donc un composé F de $\mathcal{H}(z_i)$ et E sur $\mathcal{H}(x)$ tel que $\mathcal{O}_{(V \otimes_Z S)_{z_i, v}}$ soit égale à $\mathcal{O}_{Y_x, y} \otimes_E F$. Il vient

$$\dim_{\mathcal{H}(z_i)} \mathcal{O}_{(V \otimes_Z S)_{z_i, v}} = (\dim_E \mathcal{O}_{Y_x, y}) [F : \mathcal{H}(z_i)] = (\dim_{\mathcal{H}(x)} \mathcal{O}_{Y_x, y}) \frac{[F : \mathcal{H}(z_i)]}{[E : \mathcal{H}(x)]}.$$

Comme on a par ailleurs

$$\frac{[F : \mathcal{H}(z_i)]}{[E : \mathcal{H}(x)]} = \frac{[F : \mathcal{H}(x)] \cdot [F : E]}{[F : \mathcal{H}(x)] \cdot [\mathcal{H}(z_i) : \mathcal{H}(x)]} \geq \frac{1}{[\mathcal{H}(z_i) : \mathcal{H}(x)]} \geq \frac{1}{d}$$

on voit que finalement $\dim_{\mathcal{H}(z_i)} \mathcal{O}_{(V \otimes_Z S)_{z_i, v}} \geq \frac{\dim_{\mathcal{H}(x)} \mathcal{O}_{Y_x, y}}{d}$.

Ceci vaut pour tout point y de la fibre Y_x en laquelle celle-ci est de dimension nulle. Par conséquent, $\sum_i \lambda_{z_i}(\mathcal{O}_{V \otimes_Z S}) \geq \frac{\lambda_x(\mathcal{O}_Y)}{d}$, et puisqu'on a vu plus haut que $\sum_i \lambda_{z_i}(\mathcal{O}_{V \otimes_Z S}) \leq dN_2$, on obtient la majoration $\lambda_x(\mathcal{O}_Y) \leq d^2 N_2$.

5.2.3.4. Conclusion. — Soit x un point de X . S'il appartient à l'image de S on a $\lambda_x(\mathcal{O}_Y) \leq N_1$ d'après 5.2.3.2, et dans le cas contraire on a $\lambda_x(\mathcal{O}_Y) \leq d^2 N_2$ d'après 5.2.3.3. On a donc dans tous les cas $\lambda_x(\mathcal{O}_Y) \leq \max(N_1, d^2 N_2)$, ce qui achève la démonstration. \square

Nous pouvons maintenant aborder l'étude des images de morphismes entre espaces k -analytiques compacts et Γ -stricts. Nous allons commencer par le cas le plus simple, auquel le cas général va se ramener; il concerne la composée d'un morphisme quasi-étale et d'une immersion fermée.

5.3. Théorème. — Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme compact et quasi-étale entre espaces k -analytiques Γ -stricts, et soit Z un fermé de Zariski de Y . Pour tout entier d , notons X_d l'ensemble des points de X dont la fibre géométrique sous f est au moins de cardinal d .

- (1) Pour tout d , l'ensemble X_d est un domaine analytique Γ -strict et fermé de X .
- (2) Pour tout d , l'intersection $f(Z) \cap (X_d \setminus X_{d+1})$ est un fermé de Zariski de $X_d \setminus X_{d+1}$.
- (3) Pour tout $x \in f(Z)$ et tout domaine analytique V de X contenant x on a les égalités

$$\dim_x(f(Z) \cap V) = \dim_x f(Z) = \max_{z \in Z, f(z)=x} \dim_z Z.$$

Démonstration. — On procède en deux étapes.

5.3.1. Preuve de (1) et (2). — Ces énoncés sont G-locaux sur X , ce qui permet de supposer X et Y compacts. Le cardinal des fibres géométriques de f est alors uniformément borné par un certain entier n , et l'on raisonne par récurrence sur n .

Si $n = 0$ alors $Y = \emptyset$ et $Z = \emptyset$, et l'on a $X_d = X$ si $d = 0$ et $X_d = \emptyset$ sinon, et le théorème est alors évident.

Supposons maintenant $n > 0$ et le théorème vrai pour les entiers $< n$. Notons p et q les deux projections de $Y \times_X Y$ sur Y ; nous considérons $p: Y \times_X Y \rightarrow Y$ comme le changement de base de f via lui-même. Notons T le saturé de Z sous la relation d'équivalence induite par f ; on a les égalités $f(T) = f(Z)$ et $T = p(q^{-1}(Z))$. Pour tout d , on pose $Y_d = f^{-1}(X_d)$; c'est exactement l'ensemble des points de Y dont la fibre géométrique sous p est de cardinal au moins égal à d .

Puisque f est quasi-étale, la diagonale $\delta: Y \rightarrow Y \times_X Y$ identifie Y à un ouvert fermé de $Y \times_X Y$. Autrement dit l'on dispose d'un isomorphisme $Y \times_X Y \simeq Y \coprod Y'$ modulo lequel $p|_Y$ et $q|_Y$ sont toutes deux égales à Id_Y . Si l'on pose $Z' = q^{-1}(Z) \cap Y'$ alors $T = Z \cup p(Z')$.

Par construction $Y_0 = Y_1 = Y$ et Y_d est pour tout $d \geq 1$ l'ensemble des points de Y en lesquels la fibre géométrique de $p|_{Y'}$ est de cardinal au moins $d - 1$. Par ailleurs, le morphisme $p|_{Y'}: Y' \rightarrow Y$ est quasi-étale et a des fibres géométriques de cardinal inférieur ou égal à $n - 1$, si bien qu'on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence. On en déduit les faits suivants :

- (a) pour tout d , le sous-ensemble Y_d de Y en est un domaine analytique compact et Γ -strict (par hypothèse de récurrence si $d \geq 1$, et directement si $d = 0$);
- (b) pour tout d , l'intersection $p(Z') \cap (Y_d \setminus Y_{d+1})$ est un fermé de Zariski de $Y_d \setminus Y_{d+1}$ (par hypothèse de récurrence si $d \geq 1$, et directement si $d = 0$).

Il résulte de (a) et du fait que f est quasi-étale et compact que $X_d = f(Y_d)$ est pour tout d un domaine analytique compact et Γ -strict de X (cela vaudrait en général si f était simplement supposé plat, mais le cas particulier de la dimension relative nulle est beaucoup plus simple, cf. [Duc18] proposition 9.1.1).

On a $f(Z) \cap (X_0 \setminus X_1) = \emptyset$ puisque $X_1 = f(Y)$; en particulier, $f(Z) \cap (X_0 \setminus X_1)$ est un fermé de Zariski de $X_0 \setminus X_1$. Soit maintenant d un entier supérieur ou égal à 1. Posons $V = Y_d \setminus Y_{d+1}$ et $U = f(V)$. Comme X_d et X_{d+1} sont contenus dans $X_1 = f(Y)$, on a $U = X_d \setminus X_{d+1}$ et $V = f^{-1}(U)$. Puisque T est égal à $Z \cup p(Z')$, il résulte de (b) que $T \cap V$ est un fermé de Zariski de V . Le faisceau cohérent d'idéaux \mathcal{J} de V définissant la structure réduite de $T \cap V$ est muni de données de descente naturelles relative au morphisme $V \rightarrow U$ (cela provient du fait que $T \cap V = f^{-1}(Z \cap U)$ ensemblistement, et que les morphismes quasi-étales préservent le caractère réduit). Par descente des faisceaux cohérents sous les morphismes compacts et fidèlement plats (cf. [Duc21] théorème 3.3), le faisceau \mathcal{J} provient d'un faisceau cohérent d'idéaux \mathcal{I} sur U . Il s'ensuit que $f(Z) \cap U$ est un fermé de Zariski de U (de structure réduite définie par \mathcal{I}).

5.3.2. Preuve de (3). — Soit $x \in f(Z)$, et soit V un domaine analytique de X contenant x . Posons $W = f^{-1}(V)$; on a alors $f(Z) \cap V = f(Z \cap W)$. Soient z_1, \dots, z_r les antécédents de x sur Z et soit U un voisinage ouvert de x dans $f(Z)$, suffisamment

petit pour que l'image réciproque U' de U sur Z s'écrive comme une union disjointe $\coprod U'_i$ où U'_i est pour tout i un voisinage de z_i de dimension $\dim_{z_i} Z$ (c'est possible par propriété topologique). Le morphisme f étant de dimension relative nulle, on a

$$\dim U = \sup_{t \in U} d_k(t) = \sup_{z \in U'} d_k(f(z)) = \sup_{z \in U'} d_k(z) = \dim U' = \max_i \dim U'_i = \max_i \dim_{z_i} Z$$

et

$$\begin{aligned} \dim(U \cap V) &= \sup_{t \in U \cap V} d_k(t) = \sup_{z \in U' \cap W} d_k(f(z)) = \sup_{z \in U' \cap W} d_k(z) = \dim(U' \cap W) \\ &= \max_i \dim(U'_i \cap W) = \max_i \dim_{z_i} Z. \end{aligned}$$

Ceci valant pour tout U suffisamment petit, la première suite d'égalités montre que $\dim_x f(Z) = \max_i \dim_{z_i} Z$ et la seconde que $\dim_x(f(Z) \cap V) = \max_i \dim_{z_i} Z$. \square

5.4. Définition. — Soit X un espace k -analytique et Γ -strict et soit C une partie localement fermée de X ; on note ∂C le complémentaire de C dans son adhérence \overline{C} (dont C est un ouvert). Soit n un entier. Nous allons définir récursivement sur n le fait pour C d'être une n -cellule Γ -stricte.

- ◊ C est une 0-cellule Γ -stricte si et seulement si C est un fermé de Zariski de X non vide et de dimension nulle.
- ◊ Si $n > 0$ alors C est une n -cellule Γ -stricte si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
 - il existe un espace k -analytique Γ -strict Y , un morphisme quasi-étale compact $f: Y \rightarrow X \setminus \partial C$ dont le cardinal des fibres géométriques est borné, et un fermé de Zariski Z non vide de Y purement de dimension n tel que $C = f(Z)$;
 - le bord ∂C s'écrit comme une union finie $\bigcup \overline{C}_i$ où chaque C_i est une n_i -cellule Γ -stricte pour un certain entier $n_i < d$.

5.5. Commentaires. — Soit C une n -cellule Γ -stricte et soient $f: Y \rightarrow X \setminus \partial C$ et Z comme dans la définition ci-dessus. Il résulte du théorème 5.3, et du fait que le cardinal des fibres géométriques de f est borné, qu'il existe une suite décroissante $(X_d)_{d \geq 0}$ de domaines analytiques fermés et Γ -stricts de $X \setminus \partial C$ telle que $X_0 = X \setminus \partial C$ et $X_d = \emptyset$ pour d assez grand et telle que $C \cap (X_d \setminus X_{d+1})$ soit pour tout d un fermé de Zariski de $X_d \setminus X_{d+1}$; et il résulte également de *loc. cit.* que $\dim_x C = n$ pour tout $x \in C$. L'entier n est donc uniquement déterminé par C : c'est sa dimension, et c'est aussi la dimension de \overline{C} , et même la dimension locale $\dim_x \overline{C}$ en tout x de \overline{C} .

5.6. Remarque. — Si D est un fermé de X s'écrivant \overline{C} pour une certaine n -cellule Γ -stricte C , l'entier n est uniquement déterminé (on a vu que c'est la dimension de D), mais la cellule C ne l'est pas en général. En effet, supposons par exemple que X est le disque unité fermé. Alors X peut lui-même être vu comme une 1-cellule Γ -stricte de bord vide, mais $C := X \setminus \{0\}$ est une autre 1-cellule Γ -stricte, de bord cette fois-ci égal à $\{0\}$, dont l'adhérence est égale à X .

Peut-on espérer en général que si D est une partie de X égale à l'adhérence d'une n -cellule Γ -stricte il existe une plus grande n -cellule Γ -stricte C telle que $D = \overline{C}$? Nous l'ignorons.

5.7. Exemple. — Posons $X = \mathcal{M}(k\{T_1, T_2\})$ et $Y = \mathcal{M}(k\{T_1, T_2, T_3\}/(T_3T_2 - T_1))$, et soit $f: Y \rightarrow X$ la flèche évidente. Un calcul direct montre que $f(Y)$ est le fermé de X défini par l'inégalité $|T_1| \leq |T_2|$; soit C son intersection avec le complémentaire U de l'origine dans X . On a alors $f(Y) = \overline{C}$ et $\partial C = \{(0, 0)\}$. De plus, soit x un point de U . Si $|T_2(x)| = 0$ alors x n'est pas situé sur C , et possède donc un voisinage ouvert dans U qui ne rencontre pas C . Et si $|T_2(x)| \neq 0$, le lieu d'inversibilité U' de T_2 sur U est un voisinage ouvert de x dans U , et $C \cap U'$ est le domaine analytique fermé de U' défini par l'inégalité $|T_1/T_2| \leq 1$. Comme être un domaine analytique fermé est une propriété locale, on voit que C est un domaine analytique fermé de U . Par conséquent, C est une 2-cellule.

Nous pouvons maintenant énoncer notre avatar non archimédien du théorème de Chevalley, dont l'exemple ci-dessus sera *a posteriori* une illustration très simple.

5.8. Théorème. — Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques compacts et Γ -stricts. On suppose que Y est non vide et équidimensionnel, et l'on note n sa dimension; on suppose aussi qu'il existe un entier d tel que f soit génériquement de dimension d .

- (1) Il existe une $(n - d)$ -cellule Γ -stricte C de X tel que $f(Y) = \overline{C}$.
- (2) On a $f(\mathbf{A}(Y)) \subset C$.

Démonstration. — Remarquons pour commencer que $d_k(f(y)) = n - d$ pour tout $y \in \mathbf{A}(Y)$ (4.2.3.1); par conséquent, si (1) est vraie et si y est un point de Y , on ne peut avoir $f(y) \in \partial C$, si bien que $f(y) \in C$, d'où (2).

Il reste donc à démontrer (1), ce que l'on fait par récurrence forte sur la dimension $n - d$ de l'image $f(Y)$. Nous supposons donc le résultat vrai en dimensions $< n - d$.

L'énoncé du théorème est insensible aux nilpotents, ce qui permet de remplacer les espaces en jeu par les espaces réduits associés, c'est-à-dire de supposer X et Y réduits.

Le théorème 4.3 assure alors l'existence d'un enjoliveur Γ -strict (Z, S) sur X et d'un domaine analytique compact et Γ -strict V de $Y \times_X Z$ tels que les propriétés suivantes soient satisfaites :

- (a) La flèche $V \otimes_Z S \rightarrow Y$ est surjective.
- (b) La flèche $V \otimes_Z S \rightarrow Z$ se factorise par un morphisme plat et surjectif sur un sous-espace analytique fermé réduit F de Z purement de dimension $n - d$.
- (c) L'image de S sur X est contenue dans celle de Y et de dimension $< n - d$.

Il assure aussi que $S \cap F$ est d'intérieur vide dans F .

Soit g le morphisme de Z vers X . Puisque $V \otimes_Z S \rightarrow Y$ est surjective, $f(Y)$ est égal à l'image de $V \otimes_Z S \rightarrow X$, c'est-à-dire encore à $g(F)$. Posons $\Sigma = g^{-1}(g(S))$; c'est un fermé de Z et l'on a

$$f(Y) = g(F) = g(F \setminus \Sigma) \coprod g(F \cap \Sigma) = g(F \setminus \Sigma) \coprod g(S),$$

où la dernière égalité provient du fait que $g(S) \subset f(Y)$.

Si z est un point de $A(F)$ il n'est pas situé sur S , si bien que $Z \rightarrow X$ est quasi-étale en z ; en particulier $d_k(g(z)) = d_k(z) = n - d$, ce qui à l'aide de (c) assure que $g(z) \notin g(S)$; par conséquent, Σ ne rencontre pas $A(F)$.

5.8.1. — Le morphisme $Z \setminus \Sigma \rightarrow X \setminus g(S)$ se déduit de $Z \rightarrow X$ par changement de base le long de l'immersion ouverte $(X \setminus g(S)) \hookrightarrow X$; par conséquent, il est compact, et il est quasi-étale puisque $S \subset \Sigma$, et le cardinal de ses fibres géométriques est uniformément borné (cela découle de la proposition 5.1 mais en est en fait un cas particulier plus facile, utilisé au cours de sa preuve, cf. 5.2.3.1). Posons $C = g(F \setminus \Sigma)$. Si $z \in A(F)$ on a vu plus haut que z n'appartient pas à Σ , et $g(z)$ appartient donc à C . Ceci entraîne, $A(F)$ étant dense dans F , que C est dense dans $f(Y) = g(F)$. Il suffit dès lors pour conclure de démontrer que C est une $(n - d)$ -cellule; au vu de sa définition, le seul point qui reste à vérifier est qu'on peut écrire ∂C comme une union finie d'adhérences de cellules Γ -strictes de dimension $< n - d$.

5.8.2. *Étude de ∂C .* — Puisque C est dense dans $g(F)$, on a $\partial C = g(S)$. Pour tout couple $e = (e_1, e_2)$ d'entiers avec $e_2 \leq e_1$ notons S_e la réunion des composantes irréductibles de S de dimension e_1 dont la dimension générique relative sur X est égale à e_2 . Si e est tel que S_e soit non vide on a d'après (c) l'inégalité $\dim g(S_e) < n - d$, et notre hypothèse de récurrence assure alors que $g(S_e)$ est de la forme $\overline{D_e}$ où D_e est une cellule Γ -stricte de dimension $\dim g(S_e)$. Si E désigne l'ensemble (fini) des indices e tels que $S_e \neq \emptyset$ on a $S = \bigcup_{e \in E} S_e$. Il vient $\partial C = \bigcup_{e \in E} \overline{D_e}$. \square

6. Dimension centrale et anneau local d'un filtre affinoïde

Nous nous servons dans ce qui suit de la théorie de la réduction des germes (ponctuels) d'espaces k -analytiques, et plus précisément de sa variante Γ -stricte; nous renvoyons le lecteur au chapitre 3 de [Duc18] (et spécialement aux sections 3.4 et 3.5) pour les définitions, notations et propriétés de base. Cette théorie repose sur l'algèbre commutative graduée décrite dans [Tem04], au sujet de laquelle on pourra aussi consulter l'appendice A de [Duc18].

6.1. Définition. — Soit X un espace k -analytique et soit x un point de X . Un *filtre affinoïde* sur l'espace pointé (X, x) est un ensemble Θ de domaines affinoïdes de X contenant x qui est filtrant et est tel que tout voisinage de x dans X contienne un élément de Θ .

6.2. Exemples. — En pratique, nous considérerons les filtres affinoïdes suivantes sur (X, x) :

- ◊ lorsque le germe (X, x) est bon, le filtre formé de tous les voisinages affinoïdes de x dans X , que nous nous permettrons de noter encore (X, x) ;
- ◊ lorsque le germe (X, x) est Γ -strict, le filtre (X_G^Γ, x) formé de tous les domaines affinoïdes Γ -stricts de X contenant x ;

- ◇ lorsque le germe (X, x) est Γ -strict et que ξ est un élément de la réduction de Temkin Γ -graduée $(\widetilde{X, x})^\Gamma$, le filtre (X_G^Γ, x, ξ) formé de tous les domaines affinoïdes Γ -stricts V de X contenant x et tels que $(\widetilde{V, x})^\Gamma$ contienne ξ .

(Lorsque $\Gamma = \mathbf{R}_+^\times$, nous omettrons le plus souvent de l'indiquer en exposant).

6.3. — Soit Θ un filtre affinoïde sur (X, x) .

6.3.1. *Dimension centrale.* — Nous noterons $\dim_c \Theta$ la *dimension centrale* de Θ , c'est-à-dire le minimum des dimensions de $\overline{\{x\}}^{V_{\text{Zar}}}$ pour $V \in \Theta$. On a de manière évidente

$$d_k(x) \leq \dim_c \Theta \leq \dim \overline{\{x\}}^{X_{\text{Zar}}} \leq \dim_x X.$$

6.3.1.1. — La dimension centrale $\dim_c \Theta$ coïncide avec $\dim \overline{\{x\}}^{X_{\text{Zar}}}$ si et seulement si $\dim \overline{\{x\}}^{V_{\text{Zar}}} = \dim \overline{\{x\}}^{X_{\text{Zar}}}$ pour tout domaine affinoïde $V \in \Theta$, ce qui revient à demander que $\overline{\{x\}}^{V_{\text{Zar}}}$ soit une composante irréductible de $V \cap \overline{\{x\}}^{X_{\text{Zar}}}$ pour tout tel V .

6.3.1.2. — La dimension centrale $\dim_c \Theta$ coïncide avec $\dim_x X$ si et seulement si $\overline{\{x\}}^{V_{\text{Zar}}}$ est une composante irréductible de V pour tout $V \in \Theta$. Cette condition est notamment satisfaite dès que $d_k(x) = \dim_x X$, c'est-à-dire dès que $x \in \mathbf{A}(X)$. Mais elle l'est aussi par exemple lorsque $\dim X = 1$ et lorsque x n'est pas un point rigide.

6.3.2. — Nous noterons \mathcal{O}_Θ la colimite des $\mathcal{O}(V)$ pour V appartenant à Θ .

6.3.2.1. — Lorsque Θ est de l'un des trois types décrits en 6.2 nous le ferons figurer sans parenthèses en indice et écrivons simplement $\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{O}_{X_G^\Gamma,x}$ et $\mathcal{O}_{X_G^\Gamma,x,\xi}$ (si X est bon, la notation $\mathcal{O}_{X,x}$ de ce paragraphe a donc bien son sens habituel : elle désigne l'anneau local en x du faisceau \mathcal{O}_X restreint à la catégorie des ouverts de X).

6.3.2.2. — Si la valeur absolue de k n'est pas triviale et si X est strictement k -analytique, se donner un élément $\xi \in (\widetilde{X, x})^{\{1\}}$ revient à se donner une spécialisation x^+ de x dans l'espace adique X^{ad} associé à X , et $\mathcal{O}_{X_G^{\{1\}},x,\xi}$ est alors simplement l'anneau local de Huber $\mathcal{O}_{X^{\text{ad}},x^+}$.

6.3.2.3. — Soit V un domaine affinoïde appartenant à Θ et soit U un voisinage de x dans V . Par définition, U contient une partie de la forme $U' \cap V$, où U' est un voisinage ouvert de x dans X ; puisque Θ est un filtre affinoïde de (X, x) , il existe un domaine affinoïde V' de U' appartenant à Θ , et un domaine affinoïde W de $V \cap V'$ appartenant à Θ ; en particulier, $W \subset U$. Il s'ensuit que la flèche naturelle $\mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}_\Theta$ se factorise par $\mathcal{O}_{V,x}$. Ceci valant pour tout $V \in \Theta$, on voit que \mathcal{O}_Θ peut également se décrire comme la colimite de la famille des $\mathcal{O}_{V,x}$ pour $V \in \Theta$.

6.3.3. — Si Φ est un (autre) filtre affinoïde sur (X, x) , nous dirons que Φ raffine Θ et écrivons $\Phi \leq \Theta$ si tout élément de Θ contient un élément de Φ . Nous dirons que Φ est équivalent à Θ et écrivons $\Phi \sim \Theta$ si $\Phi \leq \Theta$ et $\Theta \leq \Phi$.

6.4. — On se donne un espace k -analytique pointé (X, x) et deux filtres affinoïdes Θ et Φ sur (X, x) tels que $\Phi \leq \Theta$.

6.4.1. — On a un morphisme naturel $\mathcal{O}_\Theta \rightarrow \mathcal{O}_\Phi$, qui est un isomorphisme si $\Phi \sim \Theta$. Et l'on par ailleurs $\dim_c \Phi \leq \dim_c \Theta$ avec égalité si $\Phi \sim \Theta$.

6.4.2. — Indiquons quelques exemples de relations de raffinement qui seront justifiables de ce qui précède. Si X est Γ -strict et si $\xi \in \widetilde{(X, x)}^\Gamma$ alors $(X_G^\Gamma, x) \leq (X_G^\Gamma, x, \xi)$. Si de plus l'espace X est bon alors $(X_G^\Gamma, x, \xi) \leq (X, x)$, et si de surcroît la composante homogène $\widetilde{\mathcal{H}(x)}^\Gamma$ du corps résiduel gradué $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ est constituée d'éléments algébriques sur le corps gradué \tilde{k} , il résulte immédiatement de la théorie de la réduction des germes de Temkin que pour tout V appartenant à (X_G^Γ, x) alors $\widetilde{(V, x)} = \widetilde{(X, x)}$, ce qui veut dire que V est un voisinage de x . On a donc dans ce cas

$$(X_G^\Gamma, x, \xi) = (X_G^\Gamma, x) \sim (X, x).$$

6.4.3. — Soit Z un sous-espace analytique fermé de X contenant x . Nous noterons $\Theta \cap Z$ l'ensemble $\{V \cap Z\}_{V \in \Theta}$. C'est un filtre affinoïde de (Z, x) , et il résulte immédiatement des définitions que $\dim_c \Theta \cap Z = \dim_c \Theta$; pour tout filtre affinoïde Ψ sur (Z, x) tel que $\Psi \sim \Theta \cap Z$ on a donc $\dim_c \Psi = \dim_c \Theta$.

Ceci s'applique par exemple avec $\Theta = (X_G^\Gamma, x, \xi)$ (resp. (X_G^Γ, x) , resp. (X, x) si X est bon) et $\Psi = (Z_G^\Gamma, x, \xi)$ (resp. (Z_G^Γ, x, ξ) , resp. (Z, x)) (nous avons utilisé le fait que $\widetilde{(Z, x)}^\Gamma = \widetilde{(X, x)}^\Gamma$ si bien que ξ peut être vu comme appartenant à $\widetilde{(Z, x)}^\Gamma$). Précisons que dans chacun de ces trois cas la relation $\Theta \cap Z \leq \Psi$ est évidente et la relation $\Psi \leq \Theta \cap Z$ provient du fait que Ψ est un sous-ensemble cofinal de $\Theta \cap Z$ (c'est évident dans le troisième cas, voir le paragraphe final de 1.3 pour les deux premiers).

6.5. Exemple. — Nous allons reprendre essentiellement ici l'exemple détaillé à la section 4.4 de [Duc18] (suggéré par Temkin, et destiné originellement à montrer que la platitude naïve n'est en général pas stable par changement de base).

Supposons donnés un réel $r > 0$ et une série entière $f = \sum a_i T^i \in k[[t]]$ de rayon exactement r . On voit f comme une fonction analytique sur le disque fermé $\mathcal{M}(k\{T/r\})$, définissant donc un morphisme de $\mathcal{M}(k\{T/r\})$ vers $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$ dont on considère le graphe $\varphi = (\text{Id}, f): M(k\{T/r\}) \rightarrow M(k\{T/r\}) \times_k \mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$. Le morphisme φ induit un isomorphisme entre $M(k\{T/r\})$ et un sous-espace analytique fermé Z du domaine analytique fermé $M(k\{T/r\}) \times_k \mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$ de $\mathbf{A}_k^{2, \text{an}}$.

Posons $X = \mathbf{A}_k^{2, \text{an}}$ et $V = M(k\{T/r\}) \times_k \mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$, et notons x le point $\varphi(\eta_r)$ de Z . Le morphisme φ permet d'identifier le corps résiduel gradué $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ à $\widetilde{\mathcal{H}(\eta)}_r = \tilde{k}(t)$ (où $t = \widetilde{T(\eta_r)}$ est une indéterminée de degré r). Nous noterons ξ le point de $\widetilde{(X, x)}$ correspondant à la valuation «à l'infini» sur $\widetilde{\mathcal{H}(x)} = \tilde{k}(t)$ (qui envoie une fraction sur l'opposé de son degré monomial).

On a évidemment $\dim_x X = 2$ et $d_k(x) = 1$. On démontre ([Duc18], preuve de la proposition 4.4.6) que $\dim_c(X, x) = 2$. Autrement dit, x est Zariski-dense dans chacun de ses voisinages analytiques connexes dans X (de tels voisinages sont irréductibles par normalité de l'espace affine).

En revanche, $\overline{\{x\}}^{V_{\text{zar}}}$ coïncide avec la courbe Z , qui est de dimension 1. Compte-tenu du fait que $d_k(x) = 1$ (ce qui oblige toute dimension centrale en x , quel que soit le filtre affinoïde considéré, à valoir au moins 1), il vient

$$\dim_c(X_G, x) = \dim_c(X_G^Z, x) = \dim_c(V, x) = 1.$$

Mentionnons enfin pour information que $\dim_c(X_G, x, \xi) = 2$; nous ne le démontrerons pas ici, mais on peut le voir en adaptant la preuve de la proposition 4.4.6 de [Duc18] (qui consiste précisément à s'assurer que la courbe Z ne peut pas être prolongée dans la direction définie par ξ).

Supposons maintenant que $|k^\times| \neq \{1\}$ et que r n'appartient pas à $|k^\times|^\mathbb{Q}$. On a alors $\widetilde{\mathcal{H}(\eta_r)}^1 = \tilde{k}^1$, ce qui entraîne en vertu de 6.4.1 que $(X_G^{\{1\}}, x) \sim (X, x)$ et partant que

$$\dim_c(X_G^{\{1\}}, x) = \dim_c(X, x) = 2.$$

6.6. Rappels sur les anneaux locaux des bons espaces analytiques. — Soit X un bon espace k -analytique et soit $x \in X$. L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est noethérien et hensélien ([Ber93], théorèmes 2.1.4 et 2.1.5), et même excellent ([Duc09], théorème 2.13). Et si V est un bon domaine analytique de X contenant x , le morphisme local $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{V,x}$ est régulier ([Duc09], théorème 3.3; sa platitude est due essentiellement à Berkovich, cf. [Ber90], Prop. 2.2.4, qui se fonde lui-même sur le cas strict, établi dans [BGR84], §7.3.2, Cor. 6). On a par ailleurs l'égalité

$$\dim_c(X, x) + \dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim_x X$$

([Duc18], corollaire 3.2.9).

La proposition suivante généralise les résultats ci-dessus au cas des anneaux locaux associés à un filtre affinoïde; précisons qu'on les utilise de manière essentielle dans la preuve (nous ne les redémontrons donc pas).

6.7. Proposition. — *Soit (X, x) un espace k -analytique pointé et soient Θ et Φ deux filtres affinoïdes sur (X, x) tels que $\Theta \leq \Phi$.*

(1) *L'anneau \mathcal{O}_Θ est local, hensélien, excellent, et*

$$\dim_c \Theta + \dim \mathcal{O}_\Theta = \dim_x X.$$

(2) *Le morphisme canonique $\mathcal{O}_\Phi \rightarrow \mathcal{O}_\Theta$ est local et régulier.*

(3) *Pour tout $V \in \Theta$ le morphisme canonique $\mathcal{O}_{V,x} \rightarrow \mathcal{O}_\Theta$ est local et régulier.*

Démonstration. — Remarquons pour commencer que (3) est un cas particulier de (2), que nous avons choisi d'expliciter car il nous semble important. En effet, il suffit pour démontrer (3) d'appliquer (2) en prenant pour Φ l'ensemble des voisinages affinoïdes de x dans V . Il reste donc à démontrer (1) et (2).

6.7.1. Démonstration de (1) : préliminaires. — Posons $d = \dim_c \Theta$; soit Θ' le sous-ensemble de Θ formé des domaines V tels que $\dim \overline{\{x\}}^{V_{\text{zar}}} = d$. On a

$$\mathcal{O}(\Theta) = \text{colim}_{V \in \Theta} \mathcal{O}_{V,x} = \text{colim}_{V \in \Theta'} \mathcal{O}_{V,x},$$

la dernière égalité résultant du fait que Θ' est cofinal dans Θ . Pour tout $V \in \Theta'$ nous noterons $\mathfrak{m}_{V,x}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{V,x}$, et $\kappa_V(x)$ son corps résiduel. Soient V et W deux éléments de Θ' tels que $W \subset V$. Il résulte de la définition de Θ' que $\dim_c(V, x) = \dim_c(W, x) = d$.

On déduit alors du corollaire 3.2.9 de [Duc18] que

$$\dim \mathcal{O}_{W,x} = \dim \mathcal{O}_{V,x} = \dim_x X - d$$

(on utilise le fait que $\dim_x W = \dim_x V = \dim_x X$). En particulier, $\mathcal{O}_{V,x}$ et $\mathcal{O}_{W,x}$ ont même dimension. Il s'ensuit par platitude de la flèche $\mathcal{O}_{V,x} \rightarrow \mathcal{O}_{W,x}$ que $\mathcal{O}_{W,x}/\mathfrak{m}_{V,x}\mathcal{O}_{W,x}$ est local artinien, puis par régularité de cette même flèche que $\mathcal{O}_{W,x}/\mathfrak{m}_{V,x}\mathcal{O}_{W,x}$ est une extension séparable de $\kappa_V(x)$. Autrement dit, $\mathfrak{m}_{W,x}$ est égal à $\mathfrak{m}_{V,x}\mathcal{O}_{W,x}$ et $\kappa_W(x)$ est séparable sur $\kappa_V(x)$.

6.7.2. Noéthérianité, hensélianité, calcul de la dimension. — Pour tout couple (V, W) d'objets de Θ' avec $W \subset V$ le morphisme $\mathcal{O}_{V,x} \rightarrow \mathcal{O}_{W,x}$ d'anneaux locaux noéthériens est plat, et l'on vient de voir que $\mathfrak{m}_{W,x} = \mathfrak{m}_{V,x}\mathcal{O}_{W,x}$. On déduit alors du lemme 10.3.13 du chapitre 0 de [EGA III₁] que \mathcal{O}_Θ est local noéthérien, et que pour tout $V \in \Theta'$ le morphisme $\mathcal{O}_{V,x} \rightarrow \mathcal{O}_\Theta$ est plat et vérifie l'égalité $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m}_{V,x}\mathcal{O}_\Theta$, où \mathfrak{m}_Θ désigne l'idéal maximal de \mathcal{O}_Θ ; ceci implique que $\dim \mathcal{O}_\Theta = \dim \mathcal{O}_{V,x} = \dim_x X - d$.

Enfin, comme chacun des $\mathcal{O}_{V,x}$ est hensélien, un argument immédiat de passage à la limite montre que \mathcal{O}_Θ est hensélien.

6.7.3. Excellence. — Pour tout couple (V, W) d'objets de Θ' avec $W \subset V$, le morphisme $\mathcal{O}_{V,x} \rightarrow \mathcal{O}_{W,x}$ est plat, et $\kappa_W(x)$ est séparable sur $\kappa_V(x)$ d'après 6.7.1. La colimite \mathcal{O}_Θ des $\mathcal{O}_{V,x}$ (pour $V \in \Theta'$) étant noéthérienne d'après 6.7.2, et chacun des $\mathcal{O}_{V,x}$ étant excellent, il résulte de [Mar79], Cor. 4.4 que \mathcal{O}_Θ est lui-même excellent.

6.7.4. Preuve de (2). — Soit I l'ensemble des couples (U, V) où U appartient à Φ , où V appartient à Θ et où $V \subset U$. L'ensemble I est filtrant (pour l'inclusion composante par composante) : si (U, V) et (U', V') sont deux éléments de I , on choisit un élément U'' de Φ contenu dans $U \cap U'$, un élément V'' de Θ contenu dans U'' , puis un élément V''' de Θ contenu dans $V \cap V' \cap V''$, et (U'', V''') est un élément de I tel que $U'' \subset U \cap U'$ et $V''' \subset V \cap V'$.

De plus tout élément U de Φ est le premier terme d'un couple appartenant à I , et les éléments de Θ qui sont le second terme d'un couple appartenant à I forment une partie cofinale de Θ : si $V \in \Theta$ on choisit d'abord $U \in \Phi$, puis un élément V' de Θ contenu dans U , et un élément V'' de Θ contenu dans $V \cap V'$: on a alors $V'' \subset V$ et $(V'', U) \in \Phi$.

Si l'on décide de noter U_i et V_i les deux composantes d'un élément i de I , on voit par ce qui précède que

$$\mathcal{O}_\Phi = \text{colim}_i \mathcal{O}_{U_i,x} \text{ et } \mathcal{O}_\Theta = \text{colim}_i \mathcal{O}_{V_i,x}.$$

De plus, on dispose pour tout i d'un morphisme local régulier $\mathcal{O}_{U_i,x} \rightarrow \mathcal{O}_{V_i,x}$, et le morphisme $\mathcal{O}_\Phi \rightarrow \mathcal{O}_\Theta$ est induit par la collection des $\mathcal{O}_{U_i,x} \rightarrow \mathcal{O}_{V_i,x}$. Il résulte alors de la proposition 1.1 de [Mar79] que $\mathcal{O}_\Phi \rightarrow \mathcal{O}_\Theta$ est régulier. \square

6.8. Corollaire. — *Supposons que la valeur absolue de k n'est pas triviale. Tout anneau local d'un espace adique de type fini sur (k, k°) est excellent.*

Démonstration. — C'est une conséquence directe de l'assertion (1) de la proposition 6.7 ci-dessus et de 6.3.2.2. \square

6.9. Lemme. — *Soit $(X, x) \rightarrow (S, s)$ un morphisme fini entre espaces k -analytiques pointés. Soit Θ un filtre affinoïde sur (X, x) et soit Φ un filtre affinoïde sur (S, s) tels que $X \times_S U$ appartienne à Θ pour tout $U \in \Phi$. On suppose que $\dim_c \Theta = \dim \overline{\{x\}}^{X_{\text{Zar}}}$. On a alors l'égalité $\dim_c \Phi = \dim \overline{\{s\}}^{S_{\text{Zar}}}$.*

Démonstration. — Quitte à remplacer X et S par les adhérences de Zariski (disons réduites) respective de x et s , et Θ (resp. Φ) par $\Theta \cap \overline{\{x\}}^{X_{\text{Zar}}}$ (resp. $\Phi \cap \overline{\{s\}}^{S_{\text{Zar}}}$) on peut supposer que X et S sont irréductibles de même dimension, que nous noterons d , et que x et s sont Zariski-denses dans X et S respectivement.

Supposons que $\dim_c \Theta = d$. Soit U un élément de Φ et soit V le produit fibré $X \times_S U$. Nos hypothèses assurent tout d'abord que V appartient à Θ , puis que $\dim \overline{\{x\}}^{V_{\text{Zar}}} = d$. Comme $V \rightarrow U$ est fini, cette dimension est égale à celle de $\overline{\{s\}}^{U_{\text{Zar}}}$, et l'on a donc bien $\dim_c \Phi = d$. \square

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de cette section, celui sur lequel reposeront nos nouveaux critères de platitude.

6.10. Théorème. — *Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme d'espaces k -analytiques, soit x un point de X et soit y un point de Y_x .*

- (1) *On suppose que X et Y sont bons, que $y \in \text{Int}(Y/X)$, que $\dim_c(X, x) = \dim_x X$ et que $\dim_c(Y_x, y) = \dim_y Y_x$. On a alors*

$$\dim_c(Y, y) = \dim_y Y = \dim_x X + \dim_y Y_x.$$

- (2) *On suppose que X et Y sont Γ -stricts, que $\dim_c(X_G^\Gamma, x) = \dim_x X$ et que $\dim_c((Y_x)_G^\Gamma, y) = \dim_y Y_x$. On a alors*

$$\dim_c(Y_G^\Gamma, y) = \dim_y Y = \dim_x X + \dim_y Y_x.$$

6.11. Commentaires. — C'est uniquement l'assertion (2) dont nous aurons besoin par la suite, mais nous avons choisi d'inclure l'assertion (1) dans ce théorème parce qu'elle nous a semblé intéressante en elle-même et parce que sa démonstration est courte. La démonstration de (2) est plus délicate et fait intervenir de manière essentielle le théorème 5.3.

Démonstration du théorème 6.10. — Posons $n = \dim_x X$ et $d = \dim_y Y_x$. On a alors $\dim_y Y \leq n + d$. Il suffit donc dans le cas (1) (resp. (2)) de démontrer que pour tout voisinage analytique Ω de y dans Y (resp. pour tout domaine analytique Γ -strict Ω

de Y contenant y) on a $\dim \overline{\{y\}}^{\Omega_{\text{Zar}}} = n + d$. Quitte à remplacer Y par Ω , on voit qu'il suffit de démontrer que $\dim \overline{\{y\}}^{Y_{\text{Zar}}} = n + d$ (et l'on peut de surcroît le faire après avoir restreint X et Y autant que de besoin). C'est ce que nous allons faire dans chacune des situations (1) et (2).

Remarquons déjà que dans chacune des deux situations considérées on a l'égalité $\dim \overline{\{x\}}^{X_{\text{Zar}}} = \dim_x X = n$, si bien que le point x est situé sur une unique composante irréductible de X ; on peut donc quitte à restreindre X le supposer purement de dimension n .

6.11.1. Preuve de (1). — On peut supposer que Y et X sont affinoïdes, puis qu'il existe une factorisation de $Y \rightarrow X$ sous la forme $Y \rightarrow T \rightarrow X$ où T est affinoïde et quasi-lisse purement de dimension relative d sur X et où $Y \rightarrow T$ est fini ([Duc07], corollaire 4.7). Le point y appartient à $\text{Int}(Y/X)$, et son image t sur T appartient alors à $\text{Int}(T/X)$. Puisque $Y \rightarrow T$ est fini, l'image de $\overline{\{y\}}^{Y_{\text{Zar}}}$ sur T est un fermé de Zariski Z de X , et puisque $\dim_c(Y_x, y) = d$, le fermé Z_x est de dimension au moins d en t ; la fibre T_x étant quasi-lisse (et *a fortiori* normale) purement de dimension d , le fermé Z_x contient la composante connexe de t dans T_x , et est en particulier un voisinage de t dans T_x . L'égalité $\dim_c(X, x) = \dim_x X$ entraîne que $\mathcal{O}_{X,x}$ est artinien (c'est un cas particulier de la proposition 6.7, mais qui est en fait une conséquence directe du corollaire 3.2.9 de [Duc18]), et $T \rightarrow X$ est lisse en t car $t \in \text{Int}(T/X)$. La proposition 6.3.1 de [Duc18] assure alors que Z est un voisinage de t dans T . Or comme T est quasi-lisse purement de dimension relative d sur X , il est purement de dimension $n + d$. En conséquence $\dim Z = n + d$ et $\dim \overline{\{y\}}^{Y_{\text{Zar}}} = n + d$, ce qui termine la démonstration de (1).

6.11.2. Preuve de (2) dans le cas quasi-étale. — Supposons tout d'abord que $Y \rightarrow X$ est quasi-étale (dans ce cas, l'hypothèse que $\dim_c((Y_x)_{\Gamma}^{\Gamma}, y) = \dim_y Y_x$ est vide); on peut par ailleurs supposer X et Y compacts. On a alors $d = 0$ et il s'agit de montrer que $\overline{\{y\}}^{Y_{\text{Zar}}}$ est de dimension n ; notons Z le fermé $\overline{\{y\}}^{Y_{\text{Zar}}}$ et T son image sur X ; posons $m = \dim Z$.

Le théorème 5.3 assure l'existence d'une filtration décroissante (X_d) de X par des domaines analytiques fermés et Γ -stricts telle que $T \cap (X_d \setminus X_{d+1})$ soit pour tout d un fermé de Zariski de $X_d \setminus X_{d+1}$ purement de dimension m , et telle que X_d soit vide pour d assez grand. Soit d l'unique entier tel que $x \in X_d \setminus X_{d+1}$. Le fermé de Zariski $T \cap (X_d \setminus X_{d+1})$ de $X_d \setminus X_{d+1}$ contenant le point x , il est de dimension n en vertu de l'égalité $\dim_c(X_{\Gamma}^{\Gamma}, x) = n$; puisqu'il est par ailleurs purement de dimension m , il vient $m = n$, ce qui achève la preuve dans le cas quasi-étale.

6.11.3. Le cas général. — On peut supposer X et Y affinoïdes puis, quitte à restreindre Y , que $Y \rightarrow X$ admet une factorisation $Y \rightarrow T \rightarrow X$ où T est affinoïde et Γ -strict, où $T \rightarrow X$ est quasi-lisse purement de dimension relative d , et où $Y \rightarrow T$ est fini ([Duc07], corollaire 4.7; qu'on puisse de surcroît supposer que T est Γ -strict est expliqué au début de la preuve du théorème 8.2.5 de [Duc18]).

L'image t de y sur T_x satisfait l'égalité $\dim_c((T_x)_{\Gamma}^{\Gamma}) = \dim_t T_x$ (lemme 6.9) et il suffit pour montrer que $\dim \overline{\{y\}}^{Y_{\text{Zar}}} = n + d$ de s'assurer que $\dim \overline{\{t\}}^{T_{\text{Zar}}} = n + d$.

Cela permet de supposer que $Y \rightarrow X$ est quasi-lisse purement de dimension relative d , et que Y et X sont compacts (ils sont même affinoïdes, mais nous n’aurons plus besoin de cette dernière propriété qui pourrait ne pas être préservée lors de réductions ultérieures ; la compacité sera par contre essentielle).

D’après le théorème 3.11 de [Duc21], il existe une famille finie de morphismes quasi-étales $X_i \rightarrow X$ à sources affinoïdes et Γ -strictes dont les images recouvrent X et, pour tout i , un recouvrement fini $(Y_{ij})_j$ de $Y \times_X X_i$ par des domaines analytiques compacts et Γ -stricts tels que les fibres de $Y_{ij} \rightarrow X_i$ soient géométriquement connexes. Il existe un couple d’indices (i, j) et un antécédent η de y sur Y_{ij} , dont l’image ξ sur X_i est un antécédent de x , et satisfait donc d’après le cas quasi-étale déjà traité ci-dessus l’égalité $\dim_c((X_i)_G^\Gamma, \xi) = \dim_\xi X_i = n$; pour la même raison, l’antécédent η de y relativement au morphisme quasi-étale $Y_{ij, \xi} \rightarrow Y_x$ vérifie l’égalité $\dim_c((Y_{ij, \xi})_G^\Gamma, \eta) = \dim_\eta Y_{ij, \xi}$. Il suffit pour conclure de démontrer que $\overline{\{\eta\}}^{(Y_{ij})_{\text{zar}}}$ est de dimension $d + n$; autrement dit, on s’est ramené au cas où $Y \rightarrow X$ est à fibres géométriquement connexes. Comme ce morphisme est quasi-lisse, il est plat et son image est donc un domaine analytique compact et Γ -strict de X ; en remplaçant X par ce dernier, on se ramène au cas où toutes les fibres de $Y \rightarrow X$ sont non vides, et partant géométriquement irréductibles.

Soit Z l’adhérence de Zariski de y dans Y , munie de sa structure réduite. Puisque $Y \rightarrow X$ est quasi-lisse à fibres géométriquement irréductibles, le faisceau d’idéaux définissant Z possède un «idéal des coefficients» définissant un sous-espace analytique fermé T de X ([Duc21], Théorème 3.9). Puisque $\dim_c((Y_x)_G^\Gamma, y) = \dim_y Y_x$ et puisque Y_x est irréductible, l’adhérence de Zariski de y dans Y_x est égale à Y_x tout entier. Par conséquent, Z_x coïncide ensemblistement avec Y_x , et est donc égal à Y_x comme espace $\mathcal{H}(x)$ -analytique puisque Y_x est réduit ; on en déduit que x appartient à T , qui contient dès lors (ensemblément) la composante irréductible X_0 de X sur laquelle est située x , laquelle est de dimension n . Il s’ensuit que Z contient ensemblistement $Y \times_X X_0$, qui est de dimension $n + d$. Par conséquent, $\dim Z = n + d$. \square

7. Platitude et anneaux \mathbf{G} -locaux

7.1. — Soit X un espace k -analytique, soit x un point de X et soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X . Si X est bon, nous noterons \mathcal{F}_x la fibre en x du faisceau \mathcal{F} restreint à la catégories des ouverts de X . Si X est Γ -strict et si ξ désigne un point de $\widetilde{(X, x)}^\Gamma$, nous noterons $\mathcal{F}_{X_G^\Gamma, x}$ (resp. $\mathcal{F}_{X_G^\Gamma, x, \xi}$) la colimite des $\mathcal{F}(V)$ où V parcourt l’ensemble des domaines affinoïdes Γ -stricts de X contenant x (resp. contenant x et tels que $\xi \in \widetilde{(V, x)}^\Gamma$).

7.2. — Nous allons maintenant exhiber de nouveaux exemples de situations dans lesquelles la platitude se détecte au niveau des anneaux locaux analytiques, voire au niveau des anneaux locaux algébriques lorsque cela peut avoir un sens, c’est-à-dire lorsque les espaces en jeu sont des analytifiés de schémas de type fini sur une algèbre affinoïde. Nous renvoyons à la section 2.6 de [Ber93] pour la définition et les propriétés de base des analytifiés (on pourra trouver quelques compléments au

chapitre 2 de [Duc18], et plus spécialement à la section 2.7). Si \mathcal{X} est un schéma de type fini sur une algèbre affinoïde A , nous désignerons par \mathcal{X}^{an} son analytifié, et par \mathcal{F}^{an} l'analytifié d'un faisceau cohérent \mathcal{F} sur \mathcal{X} . L'application continue naturelle $\mathcal{X}^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{X}$ sera notée $x \mapsto x^{\text{al}}$.

7.3. Théorème. — *Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme entre bons espaces k -analytiques Γ -stricts. Soit y un point de Y et soit x son image sur X ; on suppose que $\dim_c(X_{\mathbb{G}}, x)$ est égal à $\dim \overline{\{x\}}^{X_{\text{Zar}}}$.*

- (1) *Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur Y tel que \mathcal{F}_y soit un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module plat. Le faisceau \mathcal{F} est alors X -plat en y .*
- (2) *Supposons que $X = \mathcal{X}^{\text{an}}$ pour un certain schéma de type fini \mathcal{X} sur une algèbre k -affinoïde Γ -stricte A , que $Y = \mathcal{Y}^{\text{an}}$ pour un certain schéma de type fini \mathcal{Y} sur une algèbre A -affinoïde Γ -stricte B , que $Y \rightarrow X$ est induit par un A -morphisme $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, et que $\overline{\{x\}}^{X_{\text{Zar}}}$ est l'analytifié d'un fermé de Zariski de \mathcal{X} . Si \mathcal{G} est un faisceau cohérent sur \mathcal{Y} qui est \mathcal{X} -plat en y^{al} alors \mathcal{G}^{an} est X -plat en y .*

7.4. Commentaires. — Sous les hypothèses de (2), le sous-espace $\overline{\{x^{\text{al}}\}}^{\text{an}}$ de X est irréductible ([Duc18], Prop. 2.7.16) et la condition d'algébricité de $\overline{\{x\}}^{X_{\text{Zar}}}$ revient donc simplement à demander que $\dim(\overline{\{x^{\text{al}}\}}^{\text{an}}) = \dim \overline{\{x\}}^{X_{\text{Zar}}}$. En vertu des théorèmes GAGA (cf. [Poi10], appendice A), c'est automatique dès que \mathcal{X} est propre sur A , et en particulier si $\mathcal{X} = \text{Spec } A$ (auquel cas $X = \mathcal{M}(A)$, mais le résultat découle alors directement de la définition de la topologie de Zariski, sans qu'il soit nécessaire d'invoquer GAGA).

Démonstration du théorème 7.3. — On procède en plusieurs étapes.

7.4.1. Réduction de l'assertion (1) à l'assertion (2). — L'assertion (1) est locale sur la source et le but, ce qui permet de supposer X et Y affinoïdes ; notons \mathcal{X} et \mathcal{Y} les spectres de leurs algèbres respectives. Le faisceau cohérent \mathcal{F} est donné par un $\mathcal{O}(Y)$ -module de type fini M . Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{Y,y} & \longleftarrow & \mathcal{O}_{X,x} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_{Y^{\text{al}},y^{\text{al}}} & \longleftarrow & \mathcal{O}_{X^{\text{al}},x^{\text{al}}} \end{array}$$

les flèches verticales sont fidèlement plates. Il s'ensuit que si $M \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \mathcal{O}_{Y,y}$ est plat sur $\mathcal{O}_{X,x}$, il l'est sur $\mathcal{O}_{X^{\text{al}},x^{\text{al}}}$, ce qui entraîne à son tour la platitude de $M \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \mathcal{O}_{\mathcal{Y},y^{\text{al}}}$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x^{\text{al}}}$. Il suffit donc pour démontrer (1) de s'assurer que si $M \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \mathcal{O}_{\mathcal{Y},y^{\text{al}}}$ est plat sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x^{\text{al}}}$ alors \mathcal{F} est X -plat en y . Mais c'est un cas particulier de l'assertion (2), à savoir celui où \mathcal{G} est le faisceau cohérent sur \mathcal{Y} associé à M .

7.4.2. Preuve de (2) dans le cas Zariski-générique. — Nous allons tout d'abord démontrer (2) en supposant que $\dim \overline{\{x\}}^{X_{\text{Zar}}} = \dim_x X$. L'assertion est locale sur \mathcal{X} (et \mathcal{Y}), ce qui permet de supposer que \mathcal{X} est affine. Soit Z le lieu des points de Y en lesquels \mathcal{F} n'est pas X -plat. C'est un fermé de Zariski de Y (qui est même

l'analytifié d'un fermé de Zariski de \mathcal{Y} , d'après [Duc18], Th. 10.7.4 (2b), mais nous n'en aurons pas besoin). Raisonnons par l'absurde et supposons donc que $y \in Z$.

Puisque $\dim \overline{\{x\}}^{X_{\text{Zar}}} = \dim_x X$, l'adhérence de x^{al} dans \mathcal{X} est une composante irréductible de ce dernier, et l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, x^{\text{al}}}$ est donc artinien. Choisissons un faisceau cohérent d'idéaux \mathcal{I} sur le schéma affine \mathcal{X} tel que $\mathcal{I}_{x^{\text{al}}}$ soit l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, x^{\text{al}}}$, et une résolution

$$(*) \quad \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^m \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^n \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{I} \rightarrow 0$$

de faisceaux cohérents sur \mathcal{X} . Par hypothèse, $\mathcal{G}_{y^{\text{al}}}$ est plat sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, x^{\text{al}}}$; comme l'idéal $\mathcal{I}_{x^{\text{al}}}$ est nilpotent, cela équivaut en vertu du critère local de platitude [Sta22, Tag 051C] aux deux affirmations suivantes :

- ◇ $\mathcal{G}_{y^{\text{al}}}/\mathcal{I}_{x^{\text{al}}}\mathcal{G}_{y^{\text{al}}}$ est plat sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, x^{\text{al}}}/\mathcal{I}_{x^{\text{al}}}$, ce qui est ici automatique puisque ce dernier est un corps;
- ◇ $\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathcal{X}, x^{\text{al}}}}(\mathcal{G}_{y^{\text{al}}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}, x^{\text{al}}}/\mathcal{I}_{x^{\text{al}}}) = 0$, ce qui signifie que la suite

$$(\mathcal{G}_{y^{\text{al}}})^m \rightarrow (\mathcal{G}_{y^{\text{al}}})^n \rightarrow \mathcal{G}_{y^{\text{al}}}$$

déduite de (*) est exacte.

Choisissons un polyrayon r constitué d'éléments de Γ , constituant une famille libre du \mathbf{Q} -espace vectoriel $\mathbf{R}_+^{\times}/|k^{\times}|^{\mathbf{Q}}$, tel que $|k_r^{\times}| \neq \{1\}$ et tel que A_r et B_r soient strictement k_r -affinoïdes. Remarquons que comme k_r est une k -algèbre affinoïde Γ -stricte, tout espace strictement k_r -analytique est également de manière naturelle un espace k -analytique Γ -strict.

Soient η et ξ les images respectives de y et x sur Y_r et X_r par la section de Shilov ([Duc18], 1.2.16); puisque $y \in Z$, le point η est situé sur Z_r . Le morphisme $Y_r \rightarrow Y$ est plat, si bien que $\mathcal{O}_{Y_r, \eta}$ est un $\mathcal{O}_{Y, y}$ -module plat; puisque $\mathcal{O}_{Y, y}$ est lui-même plat sur $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, y^{\text{al}}}$, la suite $(\mathcal{G}_{\eta}^{\text{an}})^m \rightarrow (\mathcal{G}_{\eta}^{\text{an}})^n \rightarrow \mathcal{G}_{\eta}^{\text{an}}$ est encore exacte. Il en résulte qu'il existe un voisinage strictement k_r -affinoïde V de η dans Y_r tel que la suite $(\mathcal{G}_V^{\text{an}})^m \rightarrow (\mathcal{G}_V^{\text{an}})^n \rightarrow \mathcal{G}_V^{\text{an}}$ soit exacte. La fibre $(Z_r \cap V)_{\xi}$ est un fermé de Zariski non vide de l'espace strictement $\mathcal{H}(\xi)$ -analytique V_{ξ} (il contient η). Il possède dès lors un point $\mathcal{H}(x)$ -rigide ζ .

D'après le lemme 10.3.6 de [Duc18], il existe un espace strictement k_r -analytique X' , un morphisme quasi-étale $X' \rightarrow X_r$ et un antécédent ζ' de ζ sur $Y' := Y_r \times_{X_r} X'$ qui appartient à $\text{Int}(Y'/X')$; quitte à restreindre X' , on peut le supposer affinoïde. Soit x' l'image de ζ' sur X' . Le point x' appartient à $\mathbf{A}(X'_x)$ puisque $X' \rightarrow X_r$ est quasi-étale et puisque ξ est le point de Shilov de la fibre $(X_r)_x$, et il vérifie donc l'égalité $\dim_c((X'_x)_{\mathbf{G}}, x') = \dim_{x'} X'_x$. Comme $\dim_c(X_{\mathbf{G}}, x) = \dim_x X$, on déduit du théorème 6.10 que $\dim_c((X')_{\mathbf{G}}, x') = \dim_{x'} X'$, ce qui implique que l'anneau local $\mathcal{O}_{X', x'}$ est artinien. Le sous-schéma fermé de \mathcal{X} défini par \mathcal{I} contient x^{al} et est réduit en ce dernier; il en résulte que le sous-espace analytique fermé de X défini par \mathcal{I}^{an} contient x et est réduit en ce dernier. Puisque $X' \rightarrow X$ est quasi-lisse (comme composé d'une flèche quasi-étale et de $X_r \rightarrow X$), on en déduit que le sous-espace analytique fermé de X' défini par $\mathcal{I}^{\text{an}}\mathcal{O}_{X'}$ contient x' et est réduit en ce dernier; l'anneau local artinien $\mathcal{O}_{X', x'}/\mathcal{I}_{x^{\text{al}}}\mathcal{O}_{X', x'}$ est dès lors un corps. En conséquence, $\mathcal{G}_{\zeta'}^{\text{an}}/\mathcal{I}_{x^{\text{al}}}\mathcal{G}_{\zeta'}^{\text{an}}$ est plat sur

$\mathcal{O}_{X',x'}/\mathcal{I}_{x'}\mathcal{O}_{X',x'}$. Et comme la suite $(\mathcal{G}_V^{\text{an}})^n \rightarrow (\mathcal{G}_V^{\text{an}})^m \rightarrow \mathcal{G}_V^{\text{an}}$ est exacte et que $Y' \rightarrow Y$ est plat (car quasi-étale), la suite

$$(\mathcal{G}_{\zeta'}^{\text{an}})^n \rightarrow (\mathcal{G}_{\zeta'}^{\text{an}})^m \rightarrow \mathcal{G}_{\zeta'}^{\text{an}}$$

est exacte. En vertu du critère local de platitude rappelé plus haut, ceci entraîne que $\mathcal{G}_{\zeta'}^{\text{an}}$ est plat sur $\mathcal{O}_{X',x'}$. Le point ζ' appartenant à $\text{Int}(Y'/X')$, il s'ensuit que $\mathcal{G}_{Y'}^{\text{an}}$ est X' -plat en ζ' ([Duc18], Th. 8.3.4). Combiné au fait que $Y' \rightarrow X'$ se déduit de $Y \rightarrow X$ par changement de base plat, ceci entraîne que \mathcal{G}^{an} est X -plat en l'image z de ζ' sur Y . Mais comme ζ a été choisi sur Z_r , le point z appartient à Z , ce qui contredit la X -platitude de \mathcal{G}^{an} en z et achève la démonstration lorsque $\dim \overline{\{x\}}^{X_{\text{Zar}}} = \dim_x X$.

7.4.3. Le cas général. — Par hypothèse, il existe un faisceau cohérent \mathcal{I} d'idéaux sur \mathcal{X} tel que le lieu des zéros de \mathcal{I}^{an} soit égal à $\overline{\{x\}}^{X_{\text{Zar}}}$. Soit X' un bon espace analytique défini sur une extension complète de k et muni d'un morphisme $X' \rightarrow X$, soit y' un point de $Y' := Y \times_X X'$ situé au-dessus de y et soit x' son image sur X' . Nous allons montrer que $\mathcal{G}_{y'}^{\text{an}}$ est un $\mathcal{O}_{X',x'}$ -module plat, ce qui permettra de conclure. Soit n un entier. En vertu du critère de platitude [Sta22, Tag 0523], il suffit de prouver que $\mathcal{G}_{y'}^{\text{an}}/\mathcal{I}_{x'}^n \mathcal{G}_{y'}^{\text{an}}$ est plat sur $\mathcal{O}_{X',x'}/\mathcal{I}_{x'}^n \mathcal{O}_{X',x'}$.

Par hypothèse, $\mathcal{G}_{y^{\text{al}}}$ est plat sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x^{\text{al}}}$, ce qui entraîne que $\mathcal{G}_{y^{\text{al}}}/\mathcal{I}_{x^{\text{al}}}^n \mathcal{G}_{y^{\text{al}}}$ est plat sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x^{\text{al}}}/\mathcal{I}_{x^{\text{al}}}^n \mathcal{O}_{\mathcal{X},x^{\text{al}}}$. Soit \mathcal{Z} le sous-schéma fermé de \mathcal{X} défini par le faisceau cohérent \mathcal{I}^n ; posons

$$\mathcal{T} = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}, Z = \mathcal{Z}^{\text{an}} \text{ et } T = \mathcal{T}^{\text{an}},$$

puis $Z' = X' \times_X Z$ et $T' = T \times_Z Z'$. Par ce qui précède, $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ est \mathcal{Z} -plat en y^{al} . Comme on a par hypothèse $\dim_c(Z_G^{\Gamma}, x) = \dim \overline{\{x\}}^{Z_{\text{Zar}}} = \dim_x Z$, il résulte du cas particulier traité en 7.4.2 que $\mathcal{G}_T^{\text{an}}$ est Z -plat en y . Il s'ensuit que $\mathcal{G}_{T'}^{\text{an}}$ est Z' -plat en y' , ce qui implique que $\mathcal{G}_{y'}^{\text{an}}/\mathcal{I}_{x'}^n \mathcal{G}_{y'}^{\text{an}}$ est plat sur $\mathcal{O}_{X',x'}/\mathcal{I}_{x'}^n \mathcal{O}_{X',x'}$. \square

7.5. Théorème. — Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme entre espaces k -analytiques Γ -stricts, soit y un point de Y et soit x son image sur X . Soit η un point de $(Y, y)^{\Gamma}$ et soit ξ son image sur $(X, x)^{\Gamma}$. Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur Y . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) \mathcal{F} est X -plat en y ;
- (ii) $\mathcal{F}_{Y_G^{\Gamma}, y}$ est plat sur $\mathcal{O}_{X_G^{\Gamma}, x}$.

De plus si elles sont satisfaites alors $\mathcal{F}_{Y_G^{\Gamma}, y, \eta}$ est plat sur $\mathcal{O}_{X_G^{\Gamma}, x, \xi}$.

Démonstration. — Supposons que \mathcal{F} est X -plat en y . Soit U un domaine affinoïde Γ -strict de X contenant x . Si V est un domaine affinoïde Γ -strict de $Y \times_X U$ contenant y , alors $\mathcal{F}_{V, y}$ est plat sur $\mathcal{O}_{U, x}$ puisque \mathcal{F} est X -plat en y . Par passage à la limite en faisant varier V , on en déduit que $\mathcal{F}_{Y_G^{\Gamma}, y}$ est plat sur $\mathcal{O}_{U, x}$. Par passage à la limite en faisant varier U , on en déduit que $\mathcal{F}_{Y_G^{\Gamma}, y}$ est plat sur $\mathcal{O}_{X_G^{\Gamma}, x}$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}_{Y_G^{\Gamma}, y}$ est plat sur $\mathcal{O}_{X_G^{\Gamma}, x}$. Soit U un domaine affinoïde Γ -strict de X contenant x et tel que $\dim \overline{\{x\}}^{U_{\text{Zar}}} = \dim_c(X_G^{\Gamma}, x)$. Comme

$\mathcal{O}_{X_G^\Gamma, x}$ est plat sur $\mathcal{O}_{U, x}$ par la proposition 6.7 (3) ; le $\mathcal{O}_{U, x}$ -module $\mathcal{F}_{Y_G^\Gamma, y}$ est plat. Or ce module est la colimite filtrante des $\mathcal{F}_{V, y}$ pour V parcourant l'ensemble des domaines affinoïdes Γ -stricts de $Y \times_X U$ contenant y ; il en résulte qu'il existe un tel V avec $\mathcal{F}_{V, y}$ plat sur $\mathcal{O}_{U, x}$, ce qui entraîne d'après le théorème 7.3 que \mathcal{F}_V est U -plat en y , c'est-à-dire encore que \mathcal{F} est X -plat en y .

On a donc démontré que (i) \iff (ii). Supposons maintenant que ces propriétés soient satisfaites. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X_G^\Gamma, x} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Y_G^\Gamma, y} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_{X_G^\Gamma, x, \xi} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Y_G^\Gamma, y, \eta} \end{array}$$

les flèches verticales sont fidèlement plates d'après la proposition 6.7 (2) ; il en résulte aussitôt au vu de (ii) que $\mathcal{F}_{Y_G^\Gamma, y, \eta}$ est plat sur $\mathcal{O}_{X_G^\Gamma, x, \xi}$. \square

7.6. Exemple. — Reprenons les notations de l'exemple 6.5, en supposant de plus que la valeur absolue de k n'est pas triviale et que $r \notin |k^\times|^\mathbb{Q}$. On a vu alors (à la toute fin de l'étude de cet exemple) que $\dim_c(X_G^{\{1\}}, x) = 2 = \dim_x X$. Ceci entraîne que l'anneau local $\mathcal{O}_{X_G^{\{1\}}, x}$ est artinien d'après la proposition 6.7 (1), et il est réduit puisque X est réduit ; c'est donc un corps. On déduit alors du théorème 7.5 ci-dessus que pour tout espace *strictement* k -analytique Y muni d'un morphisme $Y \rightarrow X$, tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur Y , et tout antécédent y de x sur Y , le faisceau \mathcal{F} est X -plat en y .

Notons que l'hypothèse que Y est strict est indispensable : l'immersion $Z \hookrightarrow X$ décrite au début de l'exemple 6.5 n'est en effet pas plate en x , puisque son changement de base le long de $V \hookrightarrow X$ en fait une immersion fermée d'une courbe dans une surface.

Références

- [Ber90] V. BERKOVICH – *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [Ber93] ———, « Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **78** (1993), p. 5–161.
- [BGR84] S. BOSCH, U. GÜNTZER & R. REMMERT – *Non-Archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [BL93] S. BOSCH & W. LÜTKEBOHMERT – « Formal and rigid geometry. II. Flattening techniques », *Math. Ann.* **296** (1993), no. 3, p. 403–429.
- [BLR90] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT & M. RAYNAUD – « Néron models », *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, vol. 21, 1990, p. x+325.
- [Duc07] A. DUCROS – « Variation de la dimension relative en géométrie analytique p -adique », *Compos. Math.* **143** (2007), no. 6, p. 1511–1532 (French).

- [Duc09] ———, « Les espaces de Berkovich sont excellents », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **59** (2009), no. 4, p. 1443–1552 (French).
- [Duc12] ———, « Espaces de Berkovich, polytopes, squelettes et théorie des modèles », *Confluentes Math.* **4** (2012), no. 4, p. 1250007, 57 (French), arXiv:1203.6498.
- [Duc18] ———, « Families of Berkovich spaces », *Astérisque* **400** (2018), vii+262 p.
- [Duc21] ———, « Dévisser, découper, éclater et aplatir les espaces de Berkovich », *Compos. Math.* **157** (2021), no. 2, p. 236–302.
- [EGA III₁] A. GROTHENDIECK – « Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents.I », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **11** (1961), p. 167 (French).
- [Kie67] R. KIEHL – « Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie », *Invent. Math.* **2** (1967), p. 191–214 (German).
- [Lip93] L. LIPSHITZ – « Rigid subanalytic sets », *Amer. J. Math.* **115** (1993), no. 1, p. 77–108.
- [Mar79] J. MAROT – « Limite inductive plate de P -anneaux », *J. Algebra* **57** (1979), no. 2, p. 484–496.
- [Poi10] J. POINEAU – « Raccord sur les espaces de Berkovich », *Algebra Number Theory* **4** (2010), no. 3.
- [RG71] M. RAYNAUD & L. GRUSON – « Critères de platitude et projectivité. techniques de «platification» d'un module. », *Invent. Math.* **13** (1971).
- [Sta22] T. STACKS PROJECT AUTHORS – « The stacks project », <https://stacks.math.columbia.edu>, 2022.
- [Tem04] M. TEMKIN – « On local properties of non-Archimedean analytic spaces. II », *Israel J. Math.* **140** (2004), p. 1–27.