Sous-groupes distingués de S_n pour $n \geq 5$

Préparation à l'agrégation de mathématiques
Université de Nice - Sophia Antipolis
Antoine Ducros

10 octobre 2006

Un résultat bien connu (et qui peut faire l'objet d'un développement) assure que pour tout n au moins égal à 5 le groupe A_n est simple, c'est-à-dire que ses seuls sous-groupes distingués sont lui-même et le groupe trivial. Le but de ce qui suit est d'expliquer comment on peut déduire de ce fait la liste des sous-groupes distingués de S_n pour $n \geq 5$.

Proposition. *Soit n un entier au moins égal à 5. Les sous-groupes distingués de S_n sont S_n, A_n et $\{\mathrm{Id}\}$.*

Démonstration. Il est immédiat que ces trois sous-groupes sont distingués ; en ce qui concerne A_n, le plus simple est sans doute de le caractériser comme le noyau de la signature.

Réciproquement, soit G un sous-groupe distingué de S_n. Son intersection avec A_n est un sous-groupe distingué de A_n et donc est, d'après le résultat rappelé en introduction, ou bien égale à A_n, ou bien égale à $\{\mathrm{Id}\}$.

- Si $G \cap A_n = A_n$ alors G contient A_n ; son cardinal divise celui de S_n, qui est égal à $n!$, et est multiple de celui de A_n, qui est égal à $\dfrac{n!}{2}$. Le cardinal de G vaut donc ou bien $n!$, et dans ce cas G est égal à S_n, ou bien $\dfrac{n!}{2}$, et dans ce cas G est égal à A_n.
- Supposons que $G \cap A_n = \{\mathrm{Id}\}$. On va montrer par l'absurde que G est trivial. On suppose donc qu'il ne l'est pas, c'est-à-dire qu'il contient une permutation σ qui est différente de l'identité. Soit τ un élément de G différent de l'identité. Comme $G \cap A_n = \{\mathrm{Id}\}$ les permutations τ et σ ne peuvent appartenir à A_n, elles sont donc toutes deux impaires. Leur produit est donc pair, c'est-à-dire qu'il appartient à $G \cap A_n$ qui est trivial ; en conclusion $\sigma\tau = \mathrm{Id}$.

  Autrement dit *tout élément non trivial de G est égal à σ^{-1}*. Cela implique que σ lui-même est égal à σ^{-1} (autrement dit, σ est d'ordre 2) ; en conséquence *tout élément non trivial de G est égal à σ*. Le groupe G est donc réduit à $\{\mathrm{Id}, \sigma\}$. Comme σ est d'ordre 2, c'est un produit de l transpositions à supports deux à deux disjoints, où l est un entier au moins égal à 1.

  Par hypothèse G est un sous-groupe distingué de S_n, il contient donc tous les conjugués de σ, à savoir *tous les produit de l transpositions à* *supports deux à deux disjoints.* Mais il existe au moins un tel produit qui est différent de σ (justifiez-le !), et qui constitue donc un élément de G distinct et de l'identité, et de σ ; on aboutit ainsi à une contradiction, ce qui permet de conclure que $G = \{\mathrm{Id}\}$.