Complexe de de Rham-Witt d'une $\mathbf{F}_p$-algèbre, Comparaison avec le complexe de de Rham

D'après B. Bhatt, J. Lurie, A. Mathew, *Revisiting the de Rham-Witt Complex*

Samuel, Cédric et Coline

Le 21 novembre 2019

L'objectif de ce travail est l'étude d'une construction du *complexe de de Rham-Witt*, associé à une variété, sur un corps parfait de caractéristique p. À cet effet, on introduit la notion de *Complexe de Dieudonné*, un type de complexe de cochaines de groupes abéliens (M, d) particulier, équipé d'une application de groupes abéliens gradués $F : M \to M$ satisfaisant $dF = pFd$. Cette partie est consacrée à l'étude des particularités de certains complexes de Dieudonné. Notamment, pour tout complexe de Dieurdonné (M, d, F), l'application F (dite application de Frobenius) détermine une application de complexes de cochaines

$$(M/pM, d) \to (M/pM, d).$$

On dira que le complexe considéré M est de *type Cartier* s'il n'a pas de p-torsion et si l'application précédente est un quasi-isomorphisme, c'est-à-dire induit un isomorphisme en homologie. On débute par des rappels de la partie précédente concernant la définition d'un complexe de Dieudonné et la manière dont on lui associe sa saturation. On étudie ensuite les complexes de type Cartier en établissant notamment le critère de Cartier. Ce dernier montre que lorsque le complexe de Dieudonné considéré, M, est de type Cartier, sa saturation ne modifie pas la cohomologie de M/pM.

On étudie dans un second temps une classe spéciale de complexes de Dieudonné saturés. Pour un tel complexe, l'application $F : M \to M$ est injective et son image est contenue dans le sous-complexe pM de M. Il en résulte que pour tout $x \in M^n$, il existe un unique élément $Vx \in M^n$ satisfaisant $F(Vx) = px$. L'application $V : M \to M$ est appelée le *Verschiebung*. La deuxième section a pour but d'introduire des complexes de Dieudonnés saturés qui sont complets par rapport à la filtration déterminée par l'opérateur V. La dernière section est consacrée à l'étude des propriétés de la complétion d'un complexe de Dieudonné saturé, en montrant notamment le fait qu'elle soit stricte et universelle parmis les complexes de Dieudonné recevant une application de M.

L'ensemble des résultats développés dans cet exposé proviennent de la partie 2. de l'article [1], *Revisiting the de Rham-Witt Complex*, 2018 Sections 2.1-2.7, de B. Bhatt, J. Lurie et A. Mathew.

7. Complexes de Dieudonné II.

0.1 Définition d'un complexe de Dieudonné, saturation

Dans toute la suite, l'entier $p \in \mathbb{N}$ désigne un nombre premier. On présente dans cette section quelques rappels de l'exposé précédent, "Complexes de Dieudonné I.", inspiré des sections 2.1-2.3 de l'article [1], portant sur la définition d'un complexe de Dieudonné ainsi que sa saturation.

Définition 1 (complexe de Dieudonné)**.**

1. Un *complexe de Dieudonné* est un triplet (M, d, F) [1] où (M, d) est un complexe de groupes abéliens et $F : M \to M$ est un morphisme de groupes abéliens gradués tel que :
$$\forall x \in M, \quad dF(x) = pF(dx).$$
L'application F est appelée le *Frobenius* du complexe de Dieudonné.
2. Un *morphisme de complexes* de Dieudonné $(M, d, F) \to (M', d', F')$ est un morphisme $f : M \to M'$ de groupes abéliens gradués telle que pour tout x dans M :
$$d'f(x) = f(dx), \text{ et } F'(f(x)) = f(F(x)).$$

Remarque 2. L'identité $\mathrm{Id} : M \to M$ est un morphisme de complexes de Dieudonné et ces morphismes se composent de façon évidente : il en résulte que les complexes de Dieudonné forment une catégorie, que nous notons DC.

Construction 3. Soit $M = (M^n)_n$ un groupe abélien gradué. On suppose M sans p-torsion, c'est-à-dire :
$$\forall x \in M, \quad px = 0 \to x = 0$$
(l'expression $x \in M$ signifie que x est dans l'un des M^n). Nous notons $M[p^{-1}]$ le groupe abélien gradué tel que $(M[p^{-1}])^n = M^n[p^{-1}]$. Les applications $M^n \to M^n[p^{-1}]$ sont injectives car M est sans p-torsion. On peut ainsi identifier M à un sous-groupe gradué de $M[p^{-1}]$ *via* le morphisme ϕ qu'elles induisent.

Si M est muni d'une différentielle d, $M[p^{-1}]$ hérite aussi d'une structure de complexes de groupes abéliens donnée par $d(\frac{x}{p^n}) = \frac{dx}{p^n}$. Elle est obtenue en localisant en p le morphisme composé
$$M \xrightarrow{d} M \xrightarrow{\phi} M[p^{-1}].$$

1. Souvent, on identifie le triplet (M, d, F) au seul groupe abélien gradué M, la donnée de d et de F étant implicite.

Le morphisme ϕ est alors un morphisme injectif de complexes de groupes abéliens qui identifie M à un sous-complexe de $M[p^{-1}]$.

Définition 4. Le sous-complexe $\eta_p M$ de $M[p^{-1}]$ est défini par,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (\eta_p M)^n = \{x \in p^n M^n,\ dx \in p^{n+1} M^{n+1}\}.$$ [2]

Remarque 5. Si $f : M \to N$ est un morphisme de groupes abéliens gradués sans p-torsion, il s'étend en un morphisme $M[p^{-1}] \to N[p^{-1}]$ donné par $f(\frac{x}{p^n}) = \frac{f(x)}{p^n}$, en localisant le morphisme composé

$$M \to N \to N[p^{-1}].$$

Si de plus, M et N sont des complexes de groupes abéliens, la formule de la différentielle, sur $M[p^{-1}]$ et $N[p^{-1}]$, montre qu'il s'agit d'un morphisme de complexes. Si $x \in (\eta_p M)^n$, on a $dx \in p^{n+1} M^{n+1}$ donc $dx = p^{n+1} y$ où $y \in M^{n+1}$. Il en résulte que $df(x) = f(dx) = p^{n+1} f(y) \in p^{n+1} N^{n+1}$. Ainsi, f induit un morphisme de complexes $\eta_p M \to \eta_p N$ par restriction.

Il est donc immédiat que ces morphismes se composent naturellement, et que η_p préserve l'identité. Autrement dit, le morphisme η_p est un *endofoncteur* de la catégorie des complexes de groupes abéliens sans p-torsion.

Si de plus, M est un objet de DC, le morphisme F induit un morphisme de groupes abéliens gradués $\eta_p M \to \eta_p M$ par $x \mapsto Fx$ et par définition de la différentielle sur η_p, il s'agit d'un Frobenius pour $\eta_p M$. Le foncteur η_p est donc aussi un endofoncteur de la sous-catégorie pleine de DC dont les objets sont les complexes de Dieudonné sans p-torsion.

Remarque 6. Si (M, d, F) est un complexe de Dieudonné, avec M sans p-torsion, le Frobenius F induit un morphisme $\alpha_F : M \to \eta_p M$ de complexes par la formule,

$$\alpha_F(x) = p^n F(x) \text{ , si } x \in M^n.$$

En effet, si $x \in M^n$, $p^n F(x) \in p^n M^n$ et,

$$d\alpha_F(x) = dp^n F(x) = p^{n+1} F(dx) \in p^{n+1} M^{n+1}$$

par la relation $dF = pFd$. On en déduit que $\alpha_F : M \to \eta_p M$ est un morphisme de groupes abéliens gradués. Par ailleurs, si $x \in M^n$, $dx \in M^{n+1}$, $\alpha_F(dx) = p^{n+1} F(dx) = d\alpha_F(x)$. Ainsi, α_F est un morphisme de complexes de groupes abéliens. Notons que si on munit $\eta_p M$ du Frobenius défini dans la remarque précédente, α_F est de façon évidente un morphisme de complexes de Dieudonnés (sans p-torsion).

En outre, si $f : M \to N$ est un morphisme de complexes de Dieudonné sans p-torsion, le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccc} M^* & \xrightarrow{\alpha_F} & (\eta_p M)^* \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_p f} \\ N^* & \xrightarrow{\alpha_F} & (\eta_p N)^* \end{array}$$

2. Notons que si M est concentré en degrés positifs (ce qui est souvent le cas dans la suite), $\eta_p M$ est naturellement un sous-complexe de M.

est commutatif. En effet, si $x \in M^n$, on a $\eta_p f \circ \alpha_F(x) = f(p^n Fx) = p^n f(Fx) = p^n F(fx)$ et

$$\alpha_F(f(x)) = p^n F(fx).$$

Autrement dit, l'association $(M, d, F) \mapsto \alpha_F$ est une transformation naturelle du foncteur identité vers le foncteur η_p. Réciproquement, si $\alpha : M \to \eta_p M$ est un morphisme de complexes, la formule $F(x) = p^{-n}\alpha(x)$ pour tout $x \in M^n$ définit un Frobenius pour le complexe (M, d).

Définition 7 (Complexe de Dieudonné saturé)**.** Le complexe de Dieudonné (M, d, F) est dit *saturé* lorsque :

— le groupe abélien gradué M est sans p-torsion,

— pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme $M^n \to \{x \in M^n,\ dx \in pM^{n+1}\}$, $x \mapsto Fx$ induit par le Frobenius F est un isomorphisme.[3]

Nous notons $\mathsf{DC}_{\mathsf{sat}}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie DC formée des complexes de Dieudonné saturés.

Remarque 8. Si (M, d, F) est un complexe de Dieudonné et M est sans p-torsion, on vérifie aisément que (M, d, F) est saturé si, et seulement si, le morphisme $\alpha_F : M \to \eta_p M$ construit précédemment est un isomorphisme.

Construction 9 (Le Verschiebung)**.** Soit (M, d, F) un complexe de Dieudonné *saturé*. Le Frobenius F est alors *injectif* et son image contient le sous-complexe pM. En effet, si $x \in M^n$, $d(px) = p(dx)$ est dans pM^{n+1} donc il existe (un unique) x' dans M^n tel que $px = Fx'$. Par conséquent, si $x \in M^n$, il existe un unique Vx dans M^n tel que, $F(Vx) = px$.

L'application $V : M \to M$ ainsi définie est appelée le *Verschiebung* du complexe (M, d, F). L'unicité de Vx pour $x \in M$ implique que le Verschiebung V est un morphisme de groupes abéliens gradués. Il est en outre injectif et il vérifie les propriétés suivantes :

$$F \circ V = V \circ F = p\mathrm{Id}, \quad F \circ d \circ V = \mathrm{Id}, \quad p(d \circ V) = V \circ d.$$

Construction 10 (Saturation)**.** Soit M un complexe de Dieudonné. Considérons le foncteur covariant $G : \mathsf{DC}_{\mathsf{sat}} \to \mathsf{Ens}$ défini par, $G : K \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{DC}}(M, K)$, l'action sur les flèches étant l'action habituelle $g \mapsto (f \mapsto g \circ f)$. Si le foncteur G est représentable[4], un représentant de G est une *saturation* de M. Il vient avec une flèche universelle $f : M \to N$. Le couple (N, f), s'il existe, est unique à unique isomorphisme près et noté $N = \mathrm{Sat}(M)$.

Si M est un complexe de Dieudonné, sa saturation $\mathrm{Sat}(M)$ est explicitement donnée par la limite inductive du diagramme :

$$M \xrightarrow{\alpha_F} \eta_p M \xrightarrow{\eta_p \alpha_F} \eta_p(\eta_p M) \to \cdots$$

et la flèche $M \to \mathrm{Sat}(M)$ est la flèche naturelle venant de la limite inductive. En particulier :

3. Si $x \in M^n$, on a $dFx = pFdx \in pM^{n+1}$, ce qui montre que le morphisme est bien défini.
4. Nous verrons plus bas que c'est toujours le cas.

Proposition 11 (Bhatt-Lurie-Mathew [1, Proposition 2.3.1])**.** *Tout complexe de Dieudonné admet une saturation.*

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 12 (Bhatt-Lurie-Mathew [1, Corollary 2.3.2])**.** *Le foncteur d'inclusion de* $\mathsf{DC}_{\mathsf{sat}}$ *dans* DC *est adjoint à droite du foncteur* $M \mapsto \mathrm{Sat}(M)$*.*

0.2 Le critère de Cartier

Si A est un complexe de groupes abéliens sans p-torsion, la différentielle d induit par passage au quotient une différentielle sur A/p^jA pour tout $j \in \mathbb{N}$: il est toujours sous-entendu que A/p^jA est muni de cette différentielle.

Construction 13. Soit M un complexe de Dieudonné. Nous notons $[x]$ la classe dans $\mathrm{H}^i(M/pM)$ de $x \in M^i/pM^i$. Si $x \in M^i$, nous avons $dF = pFd$ donc :

$$d(Fx + pM^i) = dFx + pdM^i \subseteq pFdx + pM^{i+1} = pM^{i+1}.$$

Ainsi, Fx définit un cocycle du complexe M/pM d'où un élément $[Fx + pM]$ du i-ème groupe de cohomologie $\mathrm{H}^i(M/pM)$. L'application $x \mapsto Fx + pM$ induit par linéarité de F un morphisme :

$$\tilde{F}^i : M^i/pM^i \to \mathrm{H}^i(M/pM), \quad x + pM^i \mapsto [Fx + pM^i]$$

dit induit par le Frobenius F.

Définition 14 (complexe de type Cartier)**.** Le complexe de Dieudonné M est dit *de type Cartier* lorsque,

— le groupe abélien M est sans p-torsion,
— le morphisme $\tilde{F}^i : M^i/pM^i \to \mathrm{H}^i(M/pM)$ induit par le Frobenius est un isomorphisme de groupes abéliens pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Théorème 15 (Bhatt-Lurie-Mathew[1, Theorem 2.4.2], critère de Cartier)**.** *Soit M un complexe de Dieudonné de type Cartier. Alors, l'application naturelle $M \to \mathrm{Sat}(M)$ induit un quasi-isomorphisme de complexes*

$$M/pM \to \mathrm{Sat}(M)/p\,\mathrm{Sat}(M).$$

Remarque 16. Autrement dit, modulo p, la saturation d'un complexe de type Cartier (qui est *a priori* un objet compliqué) est quasi-isomorphe à ce complexe. Nous commençons par étudier de plus près le foncteur η_p et introduire quelques notations.

Construction 17 (Le morphisme de comparaison γ)**.** Soit M un complexe de groupes abéliens sans p-torsion. Si $x \in (\eta_p M)^i$, par définition, $d(p^{-i}x + p(\eta_p M)^i) = p^{-i}dx + pd(\eta_p M)^{i+1} = 0$ modulo pM^{i+1} car $dx \in p^{i+1}M^{i+1}$. Ainsi, $p^{-i}x$ définit un cocycle du complexe M/pM. Notons $\overline{\gamma}$ l'application,

$$(\eta_p M)^i \to \mathrm{H}^i(M/pM), \quad x \in (\eta_p M)^i \mapsto [\overline{p^{-i}x}^p]$$

où $[u]$ est la classe en cohomologie d'un cocycle u du complexe M/pM. Si $x \in p(\eta_p M)^i$, il vient $p^{-i}x = 0$ modulo pM donc $\overline{\gamma}(x) = 0$: $\overline{\gamma}$ se factorise ainsi de manière unique selon $(\eta_p M)^i \twoheadrightarrow (\eta_p M)^i/p(\eta_p M)^i \xrightarrow{\gamma} \mathrm{H}^i(M/pM)$.

La deuxième étape est consiste à munir la cohomologie de M/pM. On fait appel ici à une construction classique en algèbre homologique : le *morphisme de Bockstein*.

Construction 18 (application de Bockstein)**.** Les applications $M \to M/p^2M,\ x \mapsto px + p^2M$, $M \to M/pM,\ x \mapsto x + pM$ passent au quotient en des morphismes,

$$M/pM \xrightarrow{p} M/p^2M,\ x + pM \mapsto px + p^2M, \quad M/p^2M \to M/pM,\ x + p^2M \mapsto x + pM$$

dont on voit aisément qu'ils commutent à la différentielle : ce sont donc des morphismes de complexes. La suite de complexes de groupes abéliens :

$$0 \to M/pM \xrightarrow{p} M/p^2M \to M/pM \to 0$$

ainsi définie est alors *exacte*. Il s'agit d'une conséquence de l'exactitude de la suite,

$$0 \to M \xrightarrow{p} M \to M/pM \to 0.$$

Nous en déduisons une suite exacte longue en cohomologie :

$$0 \to \mathrm{H}^0(M/pM) \to \cdots \to \mathrm{H}^i(M/p^2M) \to \mathrm{H}^i(M/pM) \xrightarrow{\beta_i} \mathrm{H}^{i+1}(M/pM) \to \cdots$$

Le morphisme $\beta = \bigoplus \beta_i$ défini par les morphismes connectants β_i est l'application de Bockstein. Nous vérifions qu'il s'agit d'une différentielle, c'est-à-dire que $\beta^2 = 0$. Rappelons comment est obtenu le morphisme β. Soit $z \in M^n$ tel que $z + pM^n$ est un cocycle de M/pM. Nous avons donc $dz + pM^{n+1} = 0$, c'est-à-dire qu'il existe $u \in M^{n+1}$ tel que $dz = pu$. Notons qu'alors, $pdu = d^2z = 0$ donc, puisque M est sans p-torsion, il vient $du = 0$. Nous avons $\pi(dz + p^2M^{n+1}) = 0$ donc nous pouvons écrire par exactitude de la suite $0 \to M/pM \xrightarrow{p} M/p^2M \to M/pM \to 0$: $dz + p^2M^{n+1} = pv + p^2M^{n+1}$ où $v + pM^{n+1}$ est uniquement déterminé, toujours par exactitude de la suite

$$0 \to M/pM \xrightarrow{p} M/p^2M \to M/pM \to 0.$$

Il en résulte que $v + pM^{n+1} = u + pM^{n+1}$. La classe $[u + pM^{n+1}]$ de $u + pM^{n+1}$ dans la cohomologie $\mathrm{H}(M/pM)$ est alors bien déterminée par la classe $[z + pM^n]$ de $z + pM$ dans la cohomologie de M/pM et nous posons $\beta[z + pM] = [u + pM]$. Nous obtenons $\beta[z + pM] = [p^{-1}dz + pM]$ pour tout $z \in M^n$ définissant un cocycle de M/pM (c'est-à-dire tel que $dz \in pM$), c'est-à-dire, en écrivant $dz = pu$, $\beta[z + pM] = [u + pM]$. Nous avons alors $\beta^2[z+pM] = \beta[u+pM] = [p^{-1}du+pM]$. Comme $du = 0$, nous en déduisons, $\beta^2[\overline{z}^p] = 0$ comme voulu.

La proposition suivante est un cas particulier d'un résultat sur le décalage dû à Deligne.

Proposition 19 (Bhatt-Morrow-Scholze [2, Proposition 6.12])**.** *Soit M un complexe de groupes abéliens sans p-torsion. Alors, la construction,*

$$\gamma : (\eta_p M)^i/p(\eta_p M)^i \to \mathrm{H}^i(M/pM)$$

donnée plus haut induit un quasi-isomorphisme de complexes de groupes abéliens, étant entendu que la cohomologie $\mathrm{H}(M/pM)$ *est muni de la différentielle β définie par l'opérateur de Bockstein.*

Démonstration. 1. **L'application γ définit un morphisme de complexes de chaînes.** On le montre d'abord pour $\overline{\gamma}$. Soit $y \in (\eta_p M)^i$. Nous avons

$$\beta(\overline{\gamma}(y)) = \beta([p^{-i}y + pM]) = [p^{-(i+1)}dy + pM] = \overline{\gamma}(dy).$$

Ainsi, $\overline{\gamma}$ est un morphisme de complexes de groupes abéliens. Par définition de la différentielle sur le complexe $(\eta_p M)/p(\eta_p M)$, il en résulte que γ est un morphisme de complexes.

2. **Le morphisme γ est un quasi-isomorphisme.** Soit K (respectivement C) le noyau (respectivement le conoyau) de γ. Nous notons u la restriction de γ : $(\eta_p M)/p(\eta_p M) \to \operatorname{Im}\gamma$ et v l'inclusion $\operatorname{Im}\gamma \subseteq \mathrm{H}(M/pM)$. Nous avons deux suites exactes de complexes :

$$0 \to K \to (\eta_p M)/p(\eta_p M) \to \operatorname{Im}\gamma \to 0$$

et :

$$0 \to \operatorname{Im}\gamma \to \mathrm{H}(M/pM) \to C \to 0$$

induites par γ, u et v. Nous en déduisons des suites exactes longues en cohomologie :

$$\cdots \to \mathrm{H}^i(K) \to \mathrm{H}^i((\eta_p M)/p(\eta_p M)) \xrightarrow{\mathrm{H}^i(u)} \mathrm{H}^i(\operatorname{Im}\gamma) \to \mathrm{H}^{i+1}(K) \to \cdots$$

Ainsi, si K est acyclique (c'est-à-dire si sa cohomologie est nulle), le morphisme u induit un quasi-isomorphisme $(\eta_p M)/p(\eta_p M) \to \operatorname{Im}\gamma$. De même, si C est acyclique, le morphisme v induit un quasi-isomorphisme $\operatorname{Im}\gamma \to \mathrm{H}(M/pM)$. Ainsi, $v \circ u = \gamma$ induit un quasi-isomorphisme lorsque K et C sont acycliques. Nous allons donc le montrer.

3. **Le morphisme γ est surjectif.** On montre en d'autres termes que le complexe C est nul (donc acyclique). Comme γ et $\overline{\gamma}$ ont même image, il suffit de le faire pour $\overline{\gamma}$. Soit $z \in M^i$ tel que $dz + pM^{i+1} = 0$. Nous posons $y = p^i z$: c'est alors un élément de $(\eta_p)^i$. Alors, par définition de $\overline{\gamma}$, nous avons $\overline{\gamma}(y) = [p^{-i}y + p(\eta_p M)] = [dz + pM]$. La surjectivité de $\overline{\gamma}$ est établie.

4. **Le complexe $K = \operatorname{Ker}\gamma$ est acyclique.** Commençons par donner une description plus maniable de K. Soit $x \in (\eta_p M)^i$ tel que $\overline{\gamma}(x) = [p^{-i}x + pM] = 0$. Nous avons donc $p^{-i}x + pM^i = dz + pM^i$ pour un $z \in M^{i-1}$, d'où $p^{-i}x = dz + py$ où $y \in M^i$ et :

$$x = p^i dz + p^{i+1}y, \quad z \in M^{i-1},\ y \in M^i.$$

Réciproquement, si x est de cette forme, nous avons $\overline{\gamma}(x) = 0$. Nous en déduisons que $\operatorname{Ker}\overline{\gamma}$ s'identifie en degré n à :

$$d(p^n M^{n-1}) + p^{n+1}M^n \subseteq M^n[p^{-1}].$$

Comme $p(\eta_p M)^n = p^{n+1}M^n \cap d^{-1}(p^{n+2}M^{n+1})$, nous en déduisons que K^n s'identifie au sous-quotient de $M[p^{-1}]$ donné par :

$$K^n = (p^{n+1}M^n + d(p^n M^{n-1}))/(p^{n+1}M^n \cap d^{-1}(p^{n+2}M^{n+1}).$$

Soit à présent $e \in K^n$ tel que $de = 0$; nous voulons montrer que e est un cobord. Alors, e est l'image par le morphisme quotient $p^{n+1}M^n + d(p^n M^{n-1}) \to K^n$ de

$p^{n+1}x+d(p^n y)$ avec $x \in M^n$ et $y \in M^{n-1}$. Comme $de = 0$ dans K^{n+1}, nous avons $d(p^{n+1}x + d(p^n y)) = d(p^{n+1}x) \in p^{n+2}M^{n+1} \cap d^{-1}(p^{n+3}M^{n+2})$. En particulier, $d(p^{n+1}x) \in p^{n+2}M^{n+1}$ donc $p^{n+1}x \in d^{-1}(p^{n+2}M^{n+1})$. Par conséquent, $p^{n+1}x = 0$ dans K^n et e est aussi représenté par $d(p^n y)$: c'est bien un cobord de K^n. Le complexe K est acyclique, ce qui achève la preuve.

□

Corollaire 20 (Bhatt-Lurie-Mathew[1, Corollary 2.4.5.])**.** *Soit $f : M \to N$ un morphisme de complexes de groupes abéliens, où M et N sont sans p-torsion. Si f induit un quasi-isomorphisme $M/pM \to N/pN$, alors le morphisme,*

$$\eta_p f : (\eta_p M)/p(\eta_p M) \to (\eta_p N)/p(\eta_p N)$$

induit par f est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. Nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\eta_p M)/p(\eta_p M) \arrow[r, "\eta_p f"] \arrow[d, "\gamma"] & (\eta_p N)/p(\eta_p N) \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathrm{H}(M/pM) \arrow[r, "\mathrm{H}(f)"] & \mathrm{H}(N/pN)
\end{tikzcd}$$

Nous en déduisons que, puisque γ est un quasi-isomorphisme, pour montrer que $\eta_p f$ est un quasi-isomorphisme, il suffit de montrer que $H(f)$ est un quasi-isomorphisme (pour les structures de complexes induites par le morphisme de Bockstein). Par hypothèse, il s'agit d'un isomorphisme donc en particulier un quasi-isomorphisme. □

Corollaire 21. *Soit M un complexe de Dieudonné de type Cartier. Alors, le morphisme $\alpha_F : M/pM \to (\eta_p M)/p(\eta_p M)$ est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. Nous reprenons la notation γ de la proposition précédente. Par définition de α_F et de γ, nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
M/pM \arrow[rr, "\alpha_F"] \arrow[dr, "\tilde{F}"] & & (\eta_p M)/p(\eta_p M) \arrow[dl, "\gamma"] \\
& \mathrm{H}(M/pM) &
\end{tikzcd}$$

où $\tilde{F}$ désigne le morphisme $M/pM \to \mathrm{H}(M/pM)$ induit par le Frobenius F. Or, M est de type Cartier donc le morphisme F est un isomorphisme : c'est donc un quasi-isomorphisme. Par ailleurs, γ est un quasi-isomorphisme par la proposition précédente. Nous en déduisons que α_f est un quasi-isomorphisme. □

Démontrons à présent le critère de Cartier.

Démonstration. Soit M un complexe de Dieudonné de type Cartier. Nous savons que $\mathrm{Sat}(M)$ s'identifie à la limite inductive filtrante du diagramme :

$$M \xrightarrow{\alpha_F} (\eta_p M) \xrightarrow{\eta_p \alpha_F} \eta_p(\eta_p M) \to \cdots$$

L'application naturelle $M/pM \to \mathrm{Sat}(M)/p\,\mathrm{Sat}(M)$ est celle induite par l'application naturelle $M \to \mathrm{Sat}(M)$ fournie par la propriété universelle de la limite inductive filtrante. Nous en déduisons qu'il suffit de montrer que le morphisme :

$$(\eta_p^j M)/p(\eta_p^j M) \to (\eta_p^{j+1} M)/p(\eta_p^{j+1} N)$$

induit par $\eta_p^j \alpha_F$ est un quasi-isomorphisme. Par récurrence, avec le corollaire précédent, nous nous ramenons au cas $k = 0$: il s'agit alors exactement du corollaire énoncé précédemment 21.

□

0.3 Les complexes de Dieudonné stricts

Définition 22 (complétion)**.** Soit M un complexe de Dieudonné saturé. Pour chaque entier $r \geq 0$, notons $\mathscr{W}_r(M)$ le quotient de M par le sous-complexe $\mathrm{im}(V^r) + \mathrm{im}(dV^r)$.[5] Nous pouvons former la tour de complexes de cochaines

$$\to \cdots \to \mathscr{W}_3(M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathscr{W}_2(M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathscr{W}_1(M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathscr{W}_0(M) = 0$$

où les flèches sont les morphismes quotients $\mathrm{Res} : \mathscr{W}_{r+1}(M) \to \mathscr{W}_r(M)$. La limite projective de cette tour de complexes est notée $\mathscr{W}(M)$ et appelée la *complétion* du complexe de Dieudonné saturé M.

Remarque 23 (Frobenius et Verschiebung)**.** Soit M un complexe de Dieudonné saturé. Nous définissons sur sa complétion $\mathscr{W}(M)$ un opérateur F qui lui donne une structure de complexe de Dieudonné. En utilisant les égalités $F \circ d \circ V = d$ et $F \circ V = p\,\mathrm{id}$, on voit que $F(\mathrm{im}(V^r) + \mathrm{im}(dV^r)) \subseteq \mathrm{im}(V^{r-1}) + \mathrm{im}(dV^{r-1})$. Par conséquent, il existe un unique morphisme de groupes abéliens gradués $F : \mathscr{W}_r(M) \to \mathscr{W}_{r-1}(M)$ qui rend le diagramme

$$\begin{tikzcd} M^* \arrow[r, "F"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ \mathscr{W}_r(M) \arrow[r, "F"] & \mathscr{W}_{r-1}(M) \end{tikzcd}$$

commutatif. En passant à la limite projective, on obtient un morphisme $F : \mathscr{W}(M) \to \mathscr{W}(M)$ qui vérifie bien $d \circ F = p(F \circ d)$.

De manière analogue, l'identité $V \circ d = p(d \circ V)$ implique que $V(\mathrm{im}(V^r) + \mathrm{im}(dV^r)) \subseteq \mathrm{im}(V^{r+1}) + \mathrm{im}(dV^{r+1})$, d'où l'existence d'un unique $V : \mathscr{W}_r(M) \to \mathscr{W}_{r+1}(M)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "V"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ \mathscr{W}_r(M) \arrow[r, "V"] & \mathscr{W}_{r+1}(M) \end{tikzcd}$$

commute. Comme précédemment, la limite projective de ces applications définit un morphisme $V : \mathscr{W}(M) \to \mathscr{W}(M)$ tel que $V \circ d = p(d \circ V)$. La commutativité des deux diagrammes précédents permet immédiatement d'obtenir des identités telles que $F \circ V = V \circ F = p(\mathrm{id})$ et $F \circ d \circ V = d$ sur $\mathscr{W}(M)$.

5. Comme $d(V^r(M^i) + dV^r(M^{i-1})) \subseteq V^r(M^{i+1}) + dV^r(M^i)$, $\mathscr{W}_r(M)$ est effectivement un complexe de cochaines pour l'application induite par d, que l'on notera également d.

Lemme 24. *Avec les notations précédentes, on a :*

1. *Pour tout $x \in M$, si l'image de px s'annule dans $\mathscr{W}_{r+1}(M)$, l'image de x s'annule dans $\mathscr{W}_r(M)$.*
2. *Pour tout $\overline{x} \in \mathscr{W}_r(M)$, si $d\overline{x}$ est divisible par p, alors $\overline{x}$ appartient à l'image de $F : \mathscr{W}_{r+1}(M) \to \mathscr{W}_r(M)$.*
3. *Le noyau de* $\mathrm{Res} : \mathscr{W}_{r+1}(M) \to \mathscr{W}_r(M)$ *est exactement le sous-module $\mathscr{W}_{r+1}(M)[p]$ des éléments $\overline{x} \in \mathscr{W}_{r+1}(M)$ tels que $p\overline{x} = 0$.*

Corollaire 25. *La complétion $\mathscr{W}(M)$ d'un complexe de Dieudonné saturé M est un complexe de Dieudonné saturé.*

Démonstration. — Soit $x = (x_r)_{r\geq 0}$ un élément de $\mathscr{W}(M)$ tel que $px = 0$. Alors $px_r = 0$ pour tout r, ce qui implique $x_{r-1} = 0$ par le lemme précédent. Donc $x = 0$, ce qui montre que $\mathscr{W}(M)$ est sans p-torsion.

— Il reste à montrer que, si $x = (x_r)_{r\geq 0}$ est un élément de $\mathscr{W}(M)$ tel que dx est divisible par p, alors x est dans l'image de F. Pour chaque r, le lemme précédent indique qu'il existe $y_{r+1} \in \mathscr{W}_{r+1}(M)^*$ tel que $F(y_{r+1}) = x_r$. Mais (y_r) n'est pas nécessairement une suite de la limite projective. Néanmoins, la différence $\mathrm{Res}(y_{r+1}) - y_r$ est dans le noyau de F, donc également dans celui de $p = VF$, et finalement dans celui de Res, par le lemme précédent. Il s'ensuit que la suite $y := (\mathrm{Res}(y_{r+1}))$ détermine un élément de $\mathscr{W}(M)$ qui satisfait bien $Fy = x$.

□

Remarque 26 (fonctorialité)**.** Soit $f : M \to N$ un morphisme de complexes de Dieudonné saturés. Alors f induit un morphisme $\mathscr{W}(f) : \mathscr{W}(M) \to \mathscr{W}(N)$, défini par limite projective des applications [6]

$$\mathscr{W}_r(f) : \mathscr{W}_r(M) = M/(\mathrm{im}(V^r) + \mathrm{im}(dV^r)) \xrightarrow{f} N/(\mathrm{im}(V^r) + \mathrm{im}(dV^r)) = \mathscr{W}_r(N).$$

Ceci, avec [1, section 2.6], montre que le procédé de complétion définit un foncteur covariant

$$\mathscr{W} : \mathbf{DC_{sat}} \to \mathbf{DC_{sat}}.$$

Pour tout complexe de Dieudonné saturé M, la tour de complexes de cochaines

$$M \to \cdots \to \mathscr{W}_3(M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathscr{W}_2(M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathscr{W}_1(M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathscr{W}_0(M) = 0$$

détermine une application canonique $\rho_M : M \to \mathscr{W}(M)$. Cette application est un morphisme de complexes de Dieudonné qui dépend de M de manière fonctorielle. Nous nous intéressons maintenant aux complexes de Dieudonné saturés M qui sont isomorphes à leur propre complétion par ρ_M.

Définition 27. Soit M un complexe de Dieudonné. On dit que M est *strict* si M est saturé et $\rho_M : M \to \mathscr{W}(M)$ est un isomorphisme. Nous notons $\mathbf{DC_{str}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{DC}$ des complexes de Dieudonné stricts.

Remarque 28. Soit M un complexe de Dieudonné strict. Alors, chaque M^i est un groupe abélien sans torsion. En effet, d'une part, M^i est sans p-torsion par hypothèse de saturation de M. D'autre part, M^i est sans l-torsion pour $l \neq p$ car M^n est p-adiquement complet.

6. Noter que V et f commutent puisque c'est le cas de F et f.

Exemple 29. Soit A un groupe abélien et soit $F : A \to A$ un endomorphisme. On pose

$$(M^n, d) = \begin{cases} A & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

le complexe de cochaines qui consiste en le groupe abélien A en degré zéro (et d est nulle). Alors :

1. (M, d, F) est un complexe de Dieudonné.
2. C'est un complexe de Dieudonné *saturé* si et seulement si A est sans p-torsion et F est un automorphisme.
3. Si ces conditions (en 2) sont satisfaites, M est un complexe de Dieudonné *strict* si et seulement si A est p-adiquement complet, i.e. l'application canonique $A \to \varprojlim A/p^r A$ est un isomorphisme. En effet, on a $V = p(F^{-1})$, d'où $\mathrm{im}(V^r) + \mathrm{im}(dV^r) = p^r A$, donc

$$\mathscr{W}_r(M) = \cdots \to 0 \to 0 \to A/p^r A \to 0 \to 0 \to \cdots$$

et par conséquent

$$\mathscr{W}(M) = \cdots \to 0 \to 0 \to \varprojlim A/p^r A \to 0 \to 0 \to \cdots .$$

Exemple 30 (complexes de Dieudonnés stricts *libres*)**.** Soit M^0 le groupe abélien consistant en les expressions formelles

$$\sum_{m \geq 0} a_m F^m x + \sum_{n > 0} b_n V^n x$$

où les coefficients $a_m, b_n \in \mathbf{Z}_p$ vérifient que la première suite (a_m) converge vers 0 pour la topologie p-adique. Similairement, soit M^1 le groupe abélien des expressions formelles

$$\sum_{m \geq 0} a_m F^m dx + \sum_{n > 0} b_n dV^n x$$

où les coefficients a_m et b_n sont des entiers p-adiques tels que $a_m \to_{v_p} 0$. On peut alors former le complexe de Dieudonné

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M^0 \xrightarrow{d} M^1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

où la différentielle d est donnée par

$$d\Big(\sum_{m \geq 0} a_m F^m x + \sum_{n > 0} b_n V^n x\Big) = \sum_{m \geq 0} p^m a_m F^m dx + \sum_{n > 0} b_n dV^n x.$$

Proposition 31. *Le complexe M ainsi défini est un complexe de Dieudonné strict. De plus, M est libre dans le sens suivant : pour tout complexe de Dieudonné strict N, l'évaluation induit une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DC}}(M, N) \simeq N^0.$$

Démonstration. 1. **C'est un complexe de Dieudonné.** Pour les éléments de M^0, on définit

$$F\Big(\sum_{m\geq 0} a_m F^m x + \sum_{n>0} b_n V^n x\Big) := pb_1 x + \sum_{m\geq 1} a_{m-1} F^m x + \sum_{n>0} pb_{n+1} V^n x,$$

et, en degré 1, on pose

$$F\Big(\sum_{m\geq 0} a_m F^m dx + \sum_{n>0} b_n dV^n x\Big) := b_1 dx + \sum_{m\geq 1} a_{m-1} F^m dx + \sum_{n>0} b_{n+1} dV^n x.$$

On vérifie alors immédiatement que $d \circ F = p(F \circ d)$.

2. **Il est saturé.** Il est clair que M est sans torsion. On définit maintenant une application $V : M \to M$ par

$$V\Big(\sum_{m\geq 0} a_m F^m x + \sum_{n>0} b_n V^n x\Big) := \sum_{m\geq 0} pa_{m+1} F^m x + a_0 Vx + \sum_{n>1} b_{n-1} V^n x$$

en degré zéro et

$$V\Big(\sum_{m\geq 0} a_m F^m dx + \sum_{n>0} b_n dV^n x\Big) := \sum_{m\geq 0} pa_{m+1} F^m dx + pa_0 dVx + \sum_{n>1} pb_{n-1} dV^n x$$

en degré 1. Au vu des définitions de F et V, on a $F(V(x)) = px$ pour tout $x \in M^i$, $i \in \{0, 1\}$. Il s'ensuit que M est saturé, et par unicité que V est le Verschiebung.

3. **Il est strict.** Un calcul montre que, pour $r \geq 0$,

$$V^r(M^0) = \Big\{\sum_{m\geq 0} p^r a_{m+r} F^m x + \sum_{n=1}^{r} a_{r-n} p^{r-n} V^n x + \sum_{n>r} b_{n-r} V^n x \mid a_m \to 0 \text{ dans } \mathbf{Z}_p\Big\},$$

donc

$$\begin{aligned}\mathscr{W}_r(M)^0 &\simeq \{\sum_{m\geq 0} a_m F^m x + \sum_{n=1}^{r} b_n V^n x \mid a_m \in \mathbf{Z}_p/p^r\mathbf{Z}_p \text{ nuls pour } m \gg 0; b_n \in \mathbf{Z}_p/p^{r-n}\mathbf{Z}_p\}\\ &\simeq \Big(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}\Big)^{(\mathbb{N})} \oplus \bigoplus_{n=1}^{r} \mathbf{Z}/p^{r-n}\mathbf{Z}.\end{aligned}$$

De manière similaire, on calcule $V^r(M^1) + dV^r(M^0)$ et on conclut que

$$\mathscr{W}_r(M)^1 \simeq \Big(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}\Big)^{(\mathbb{N})} \oplus \bigoplus_{n=1}^{r} \mathbf{Z}/p^{r-n}\mathbf{Z}.$$

Noter que, sous ces isomorphismes, le Frobenius $F : \mathscr{W}_{r+1}(M)^0 \to \mathscr{W}_r(M)^0$ s'écrit

$$F\Big((a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{1\leq n\leq r+1}\Big) = \Big((pb_1, a_0, a_1, \ldots), (pb_2, pb_3, \ldots, pb_{r+1})\Big),$$

et pour $V : \mathscr{W}_r(M)^0 \to \mathscr{W}_{r+1}(M)^0$, on a [7] [8]

$$V\Big((a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{1\leq n\leq r}\Big) = \Big((pa_1, pa_2, pa_3, \ldots), (a_0, b_1, b_2, \ldots, b_r)\Big).$$

7. D'où la terminologie, Verschiebung signifiant "décalage" en français.
8. En degré 1, la multiplication par p se fait uniquement à travers V, on a :

$$\begin{cases} F\Big((a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{1\leq n\leq r+1}\Big) = \Big((b_1, a_0, a_1, \ldots), (b_2, b_3, \ldots, b_{r+1})\Big)\\ V\Big((a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{1\leq n\leq r}\Big) = \Big((pa_1, pa_2, pa_3, \ldots), (pa_0, pb_1, pb_2, \ldots, pb_r)\Big).\end{cases}$$

En passant à la limite projective des $((\mathscr{W}_r(M))_{r\geq 0}, \mathrm{Res})$, on a effectivement un isomorphisme $\rho_M : M \to \mathscr{W}(M)$.

4. **Il est libre.** Pour vérifier la dernière propriété sur M, il faut observer que la somme infinie et la multiplication par un élément de $\mathbf{Z}_p$ ont du sens dans N.

□

0.4 La complétion d'un complexe de Dieudonné saturé

Soit M un complexe de Dieudonné saturé. On montre dans cette section deux propriétés de la complétion $\mathscr{W}(M)$: il s'agit d'un complexe strict et qui est universel parmis les complexes de Dieudonné recevant une application de M.

Proposition 32 (Bhatt-Lurie-Mathew [1, Proposition 2.7.1])**.** *Soit $r \in \mathbb{N}$. Alors l'application $F^r : M \to M$ induit un isomorphisme de groupes abéliens gradués*

$$\mathscr{W}_r(M) \to \mathrm{H}(M/p^r M).$$

Démonstration. En itérant l'égalité $d \circ F = pF \circ d$, on montre que $d \circ F^r = p^r(F^r d)$. Ainsi, pour tout $x \in M$, on a $\overline{dF^r(x)} = \overline{p^r(F^r \circ dx)} = \overline{0}$ dans $M/p^r M$, $\overline{x}$ désignant la classe de x dans ce quotient. On en déduit que F^r envoie tout élément de M sur un cycle dans le quotient $M/p^r M$.
De même, on a les identitées $F^r V^r(x) = p^r x$ et $F^r dV^r(y) = dy$ qui permettent de montrer que F^r envoie $im(V^r) + im(dV^r)$ dans les bords de $M/p^r M$. En effet, si $z = V^r(y) + dV^r(t)$ avec $y, t \in M^*$ alors $F^r z = p^r y + dt$ donc $\overline{F^r z} = d\overline{t}$. On obtient un homomorphisme $\theta : \mathscr{W}(M) \to \mathrm{H}(M/p^r M)$ qui est bien défini par ce qui précède. Reste à montrer qu'il s'agit bien d'un isomorphisme.

Surjectivité. Elle découle de la proposition 2.2.5 qui montre que F^r induit un isomorphisme et en particulier une surjection $F^r : M^n \to \{x \in M^n : dx \in p^r M^{n+1}\}$ pour tout n.

Injectivité. On suppose que $x \in M^n$ est tel que $\overline{F^r x} = 0$ dans $\mathrm{H}^n(M/p^r M)$, ou en d'autre termes que $F^r x$ est un bord dans $M^n/p^r M^n$. On peut ainsi écrire $F^r x = p^r y + dz$ pour $y \in M^n$ et $z \in M^{n-1}$. Alors

$$p^r x = V^r F^r x = V^r(p^r y + dz) = p^r V^r(y) + p^r dV^r(z)$$

donc $x = V^r(y) + dV^r(z) \in im(V^r) + im(dV^r)$. □

Corollaire 33 (Bhatt-Lurie-Mathew [1, Corollary 2.7.2])**.** *Soit (M, d, F) un complexe de Dieudonné saturé. Alors l'application quotient*

$$u : M/pM \to \mathscr{W}_1(M)$$

est un quasi-isomorphisme de complexes de cochaines.

Démonstration. Comme précédemment, on voit $\mathrm{H}(M/pM)$ comme un complexe de cochaines par rapport à l'opération de Bockstein. On a alors un diagramme commutatif de complexes de cochaines :

$$\begin{tikzcd} M/pM \arrow[r, "\alpha_F"] \arrow[d, "u"'] & (\eta_p M)/p(\eta_p M) \arrow[d] \\ \mathscr{W}_1(M) \arrow[r, "\theta"'] & \mathrm{H}(M/pM), \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de droite correspond au quasi-isomorphisme de la proposition 2.4.4. Or, les applications θ et α_F sont toutes deux des isomorphismes puisque par hypothèses, M est saturé. On en déduit que u est également un isomorphisme. □

Remarque 34. Par un argmument similaire ainsi qu'une généralisation de la proposition 2.4.4, on montre que si M est un complexe de Dieudonné saturé, alors l'application quotient $M/p^r M \to \mathscr{W}_r(M)$ est également un quasi-isomorphisme pour tout $r \geq 0$.

Corollaire 35 (Bhatt-Lurie-Mathew [1, Corollary 2.7.4])**.** *Soit $f : M \to N$ un morphisme de complexes de Dieudonné saturé. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application induite $M/pM \to N/pN$ est un quasi-isomorphisme de complexes de cochaines.*
2. *L'application induite $\mathscr{W}_1(M) \to \mathscr{W}_1(N)$ est un isomorphisme de complexes de cochaines.*
3. *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'application $M/p^r M \to N/p^r N$ est un quasi-isomorphisme de complexes de cochaines.*
4. *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'application $\mathscr{W}_r(M) \to \mathscr{W}_r(N)$ est un isomorphisme de complexes de cochaines.*

Démonstration. Les équivalences 1. $\iff$ 2. et 3. $\iff$ 4. découlent de la proposition 2.7.1. On démontre 1. $\iff$ 3. par induction sur r. □

Proposition 36 (Bhatt-Lurie-Mathew [1, Proposition 2.7.5])**.** *Soit M un complexe de Dieudonné saturé. Alors l'application $\rho_m : M \to \mathscr{W}(M)$ induit un isomorphisme*

$$\mathscr{W}_r(M) \to \mathscr{W}_r(\mathscr{W}(M)), \text{ pour tout } r \geq 0.$$

Démonstration. Par le corollaire précédent, on est ramenés à montrer le cas où $r = 1$. Soit $\gamma : \mathscr{W}_1(M) \to \mathscr{W}_1((M))$ l'application déterminée par ρ_M.

Injectivité. Soit $\overline{x} \in \mathscr{W}_1(M)^n$ tel que $\gamma(\overline{x}) = 0$. On peut donc écrire $\rho_M(x) = Vy + dVz$ pour $y \in (M)^n$ et $y \in (M)^{n-1}$. On identifie y et z avec les deux suites compatibles $\overline{y_m} \in \mathscr{W}_m(M)n$ et $\overline{z_m} \in \mathscr{W}_m(M)^{n-1}$. Il en découle $\overline{x} = V(\overline{y_0}) + dV(\overline{z_0}) = 0$.

Surjectivité. Soient $e \in \mathscr{W}_1((M))^n$ et $x \in (M)^n$ représentant e que l'on peut alors identifier à la suite compatible $\overline{x_m} \in \mathscr{W}_m(M)^n$ représentée par $x_m \in M^n$. Par compatibilité de la suite, on peut écrire $x_{m+1} = x_m + V^m y_m + dV^m z_m$ pour $y_m \in M^n$ et $z_m \in M^{n-1}$. Alors on a l'identité

$$x = \rho_M(x_1) + V(\sum_{m \geq 0} V^m y_{m+1}) + dV(\sum_{m \geq 0} V^m z_{m+1})$$

dans $\mathscr{W}(M)^n$. On obtient alors l'identité $e = \gamma(\overline{x_1})$ dans $\mathscr{W}_1((M))^n$. □

Corollaire 37 (Bhatt-Lurie-Mathew [1, Corollary 2.7.6])**.** *Soit M un complexe de Dieudonné saturé. Alors la complétion $\mathscr{W}(M)$ est un complexe de Dieudonné strict.*

Démonstration. Soit $\rho_M : M \to \mathscr{W}(M)$ l'application canonique qui induit deux applications de complexes de Dieudonné : $\rho_{\mathscr{W}(M)}$ et $\mathscr{W}(\rho_M) : \mathscr{W}(M) \to \mathscr{W}(\mathscr{W}(M))$. On veut montrer que $\rho_{\mathscr{W}(M)}$ est un isomorphisme. Par la proposition précédente, il suffit de montrer que $\rho_{\mathscr{W}(M)}$ et $\mathscr{W}(\rho_M)$ coïncident car $\mathscr{W}(\rho_M)$ est un isomorphisme.

Soit $x \in \mathscr{W}(M)^n$. On veut montrer que $\rho_{\mathscr{W}(M)(x)}$ et $\mathscr{W}(\rho_M)(x)$ ont la même image dans $\mathscr{W}_r(\mathscr{W}(M))^n$ pour tout $r \geq 0$. Quitte à remplacer x par $x + V^r y + dV^r z$, on peut supposer sans perte de généralité que $x = \rho_M(x')$ pour $x' \in M^n$. Cependant, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "\rho_M"'] & \mathscr{W}(M) \arrow[d] \\ \mathscr{W}_r(M) \arrow[r] & \mathscr{W}_r(\mathscr{W}(M)), \end{tikzcd}$$

qui montre que les images coïncident bien. □

Proposition 38 (Bhatt-Lurie-Mathew [1, Propositon 2.7.7])**.** *Soit M et N deux complexes de Dieudonné saturés, avec N strict. Alors la composition avec l'application ρ_M induit une bijection*

$$\theta : \mathrm{Hom}_{\mathbf{DC}}(\mathscr{W}(M), N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{DC}}(M, N).$$

Démonstration.

— **Injectivité.** Soit $f : \mathscr{W}(M) \to N$ telle que $f \circ \rho_M = 0$, montrons que $f = 0$. Pour chaque $r \geq 0$, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d] & \mathscr{W}(M) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[d, "\pi_r"] \\ \mathscr{W}_r(M) \arrow[r, "\mathscr{W}_r(\rho_M)"'] & \mathscr{W}_r(\mathscr{W}(M)) \arrow[r, "\mathscr{W}_r(f)"'] & \mathscr{W}_r(N) \end{tikzcd}$$

commute, par définition de $\mathscr{W}_r(\rho_M), \mathscr{W}_r(f)$. On a donc $\mathscr{W}_r(f) \circ \mathscr{W}_r(\rho_M) = 0$. Or, $\mathscr{W}_r(\rho_M)$ est un isomorphisme par la proposition 36, donc $\mathscr{W}_r(f) = 0$. Par commutativité du diagramme ci-dessus, on en déduit $\pi_r \circ f = 0$ pour tout $r \geq 0$, d'où $\rho_N \circ f = 0$. Mais N est strict donc ρ_N est un isomorphisme, et on déduit que $f = 0$.

— **Surjectivité.** Soit $f_0 : M \to N$ un morphisme de complexes de Dieudonnés. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"'] \\ \mathscr{W}(M) \arrow[r, "\mathscr{W}(f_0)"'] & \mathscr{W}(N), \end{tikzcd}$$

l'application ρ_N est un isomorphisme puisque N est strict. Par conséquent,

$$f = \rho_N^{-1} \circ \mathscr{W}(f_0) \circ \rho_M$$

est dans l'image de θ.

□

On en déduit immédiatement :

Corollaire 39 (Bhatt-Lurie-Mathew [1, Corollary 2.7.8])**.** *Le foncteur d'inclusion* $\mathbf{DC}_{str} \to \mathbf{DC}_{sat}$ *a un adjoint à gauche, donné par* $M \mapsto \mathscr{W}(M)$.

Bibliographie

[1] B. Bhatt, J. Lurie, A. Mathew, *Revisiting the de Rham-Witt Complex.* , 2018. Sections 2.5 (pas 2.5.7), 2.4 et 2.7. https ://arxiv.org/abs/1805.05501.

[2] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze. *Integral p-adic Hodge theory.* eprints. arXiv :1602.03148.