Complexe de de Rham-Witt d'une $\mathbf{F}_p$-algèbre, Comparaison avec le complexe de de Rham

D'après B. Bhatt, J. Lurie, A. Mathew, *Revisiting the de Rham-Witt Complex*

7. Complexes de Dieudonné II.

Samuel, Cédric et Coline

ENS - Département de mathématiques et applications

Plan

1. Le critère de Cartier
2. Les complexes de Dieudonné stricts
3. La complétion d'un complexe de Dieudonné saturé

1. Le critère de Cartier

Soit M un complexe de Dieudonné. Nous avons donc $dF = pFd$.

Si $z \in M^i$:

$$d(Fz+pM^i) = dFz+pdM^i = pFdz+pdM^i \subseteq pFdz+pM^{i+1} = pM^{i+1}$$

d'où un élément :

$$\tilde{F}^i z = [Fz] \in \mathrm{H}^i(M/pM).$$

Définition (complexe de type Cartier)

Le complexe de Dieudonné M est *de type Cartier* lorsque :

- M est sans p-torsion,
- les $\tilde{F}^i$, $i \in \mathbf{Z}$, sont des isomorphismes.

1. Le critère de Cartier

Théorème (Bhatt-Lurie-Mathew, Theorem 2.4.2, critère de Cartier)

Soit M un complexe de Dieudonné de type Cartier. Alors, le morphisme naturel $M \to \mathrm{Sat}(M)$ induit un quasi-isomorphisme $M/pM \to \mathrm{Sat}(M)/p\,\mathrm{Sat}(M)$.

Nous commençons par passer en revue quelques propriétés du foncteur η_p.

1. Le critère de Cartier

Soit M un complexe de Dieudonné sans p-torsion.

Soit $x \in (\eta_p M)^i$:

$$x \in p^i M^i, \quad dx \in p^{i+1} M^{i+1}.$$

Alors, $p^{-i}x$ définit un cocycle de M/pM d'où un élément :

$$\overline{\gamma}(x) = [p^{-i}x] \in \mathrm{H}^i(M/pM)$$

puis un morphisme :

$$\overline{\gamma} : \eta_p M \to \mathrm{H}(M/pM).$$

Nous factorisons $\overline{\gamma}$ selon :

$$\eta_p M \to (\eta_p M)/p(\eta_p M) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{H}(M/pM).$$

1. Le critère de Cartier

Nous munissons $\mathrm{H}(M/pM)$ d'une différentielle. Nous considérons la suite exacte :

$$0 \to M/pM \xrightarrow{p} M/p^2M \to M/pM \to 0$$

de complexes de groupes abéliens.

Nous en déduisons une suite exacte longue :

$$\cdots \to \mathrm{H}^i(M/pM) \to \mathrm{H}^i(M/p^2M) \to \mathrm{H}^i(M/pM) \xrightarrow{\beta} \mathrm{H}^{i+1}(M/pM) \to \cdots$$

On vérifie que $\beta : \mathrm{H}(M/pM) \to \mathrm{H}(M/pM)$ ainsi définie est une différentielle appelée *morphisme de Bockstein*. Nous avons :

$$\beta[z] = [p^{-1}dz]$$

pour tout $z \in M/pM$.

1. Le critère de Cartier

Proposition (Bhatt-Lurie-Matthew, Proposition 2.4.4)

Soit M un complexe de Dieudonné sans p-torsion. Alors, le morphisme :

$$\gamma : (\eta_p M)/p(\eta_p M) \to \mathrm{H}(M/pM)$$

construit précédemment est un quasi-isomorphisme.

C'est un cas particulier d'un résultat sur le "décalage" dû à Deligne.

1. Le critère de Cartier

L'application γ est un morphisme de complexes.

Il suffit de le faire pour $\overline{\gamma}$. Soit $x \in (\eta_p M)^i$. Nous avons :

$$\beta[\overline{\gamma}(x)] = \beta[p^{-i}x] = [p^{-1}d(p^{-i}x)] = [p^{-(i+1)}dx].$$

Par ailleurs, comme $dx \in (\eta_p M)^{i+1}$:

$$\overline{\gamma}(dx) = [p^{-(i+1)}dx].$$

Ainsi, $\overline{\gamma}$ est un morphisme de complexes et de même pour γ.

1. Le critère de Cartier

Nous notons K (respectivement C) le noyau (respectivement le conoyau) de γ.

Nous voyons qu'*il suffit de montrer que K et C sont acycliques* pour établir que γ est un quasi-isomorphisme.

1. Le critère de Cartier

Le morphisme γ est surjectif. Ainsi, C est nul donc acyclique.

Soit $z \in M^i$ tel que $dz \in pM^{i+1}$. Alors :

$$x = p^i z \in (\eta_p M)^i$$

et par définition :

$$\overline{\gamma}(x) = [z].$$

Ainsi, $\overline{\gamma}$ est surjectif : comme γ et $\overline{\gamma}$ ont même image, γ est surjectif.

1. Le critère de Cartier

Le complexe K est acyclique.

Soit $x \in (\eta_p M)^i$ tel que $\overline{\gamma}(x) = [p^{-i}x] = 0$. Il existe $y \in M^{i-1}$ tel que :

$$p^{-i}x - dy \in pM^i$$

puis $z \in M^i$ tel que :

$$x = p^{i+1}z + p^i dy.$$

Ainsi :

$$(\operatorname{Ker}\overline{\gamma})^i = p^{i+1}M^i + d(p^i M^{i-1}).$$

Comme :

$$p(\eta_p M)^i = p^{i+1}M^i \cap d^{-1}(p^{i+2}M^{i+1})$$

nous en déduisons :

$$K^i = (p^{i+1}M^i + d(p^i M^{i-1}))/p^{i+1}M^i \cap d^{-1}(p^{i+2}M^{i+1}).$$

1. Le critère de Cartier

Le complexe K est acyclique.

Nous avons donc :

$$K^i = (p^{i+1}M^i + d(p^iM^{i-1}))/p^{i+1}M^i \cap d^{-1}(p^{i+2}M^{i+1}).$$

Nous notons $N_i = p^{i+1}M^i \cap d^{-1}(p^{i+2}M^{i+1})$.

Soit $e \in K^i$ tel que $de = 0$, représenté par :

$$e = p^{i+1}x + d(p^iy) + N_i, \quad x \in M^i,\ y \in M^{i-1}.$$

Nous avons alors :

$$de = d(p^{i+1}x) + N_{i+1} = N_{i+1} \subseteq p^{i+2}M^{i+1}.$$

Nous en déduisons que $p^{i+1}x \in d^{-1}(p^{i+2}M^{i+1})$ donc :

$$p^{i+1}x = 0 \mod N_i.$$

Par conséquent, $e = d(p^iy) + N_i$ est un cobord.

1. Le critère de Cartier

Corollaire (Bhatt-Lurie-Matthew, Corollary 2.4.5)

Soit M et N des complexes de Dieudonné sans p-torsion, $f : M \to N$ un morphisme. Si f induit un quasi-isomorphisme $M/pM \to N/pN$, alors le morphisme :

$$(\eta_p M)/p(\eta_p M) \to (\eta_p N)/p(\eta_p N)$$

induit par f est un quasi-isomorphisme.

Preuve. Nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}(M/pM) \arrow[r, "\mathrm{H}(f)"] & \mathrm{H}(N/pN) \\
(\eta_p M)/p(\eta_p M) \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r] & (\eta_p N)/p(\eta_p N) \arrow[u, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

Les flèches γ et $\mathrm{H}(f)$ sont des quasi-isomorphismes, ce qui permet de conclure.

1. Le critère de Cartier

Corollaire

Soit M un complexe de Dieudonné de type Cartier. Alors, le morphisme $\alpha_F : M \to \eta_p M$ induit un quasi-isomorphisme :

$$M/pM \to (\eta_p M)/p(\eta_p M).$$

Preuve. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
M/pM \arrow[rr, "\alpha_F"] \arrow[dr, "\tilde{F}"'] & & (\eta_p M)/p(\eta_p M) \arrow[dl, "\gamma"] \\
& \mathrm{H}(M/pM) &
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Comme $\tilde{F}$ est un isomorphisme et γ est un quasi-isomorphisme, α_F est un quasi-isomorphisme.

1. Le critère de Cartier

Preuve (critère de Cartier). Soit M un complexe de type Cartier. On a :

$$\mathrm{Sat}(M) = \varinjlim(M \xrightarrow{\alpha_F} \eta_p M \xrightarrow{\eta_p \alpha_F} \eta_p \eta_p M \xrightarrow{\eta_p \eta_p \alpha_F} \eta_p \eta_p \eta_p M \to \cdots)$$

$M/pM \to \mathrm{Sat}(M)/p\,\mathrm{Sat}(M)$ est induite par $M \to \mathrm{Sat}(M)$. Il suffit donc de vérifier que :

$$(\eta_p^j M)/p(\eta_p^j M) \xrightarrow{\eta_p^j \alpha_F} (\eta_p^{j+1} M)/p(\eta_p^{j+1})M$$

est un quasi-isomorphisme pour tout j. Le premier corollaire nous ramène au cas $j = 0$, autrement dit :

$$M \xrightarrow{\alpha_F} \eta_p M$$

et c'est alors le second corollaire.

Plan

1. Le critère de Cartier
2. Les complexes de Dieudonné stricts
3. La complétion d'un complexe de Dieudonné saturé

2. Les complexes de Dieudonné stricts

Définition (Complétion)

Soit M un complexe de Dieudonné saturé.
Pour $r \geq 0$, notons $\mathcal{W}_r(M)$ le quotient

$$M/(\mathrm{im}(V^r) + \mathrm{im}(dV^r))$$

On a la tour de complexes de cochaines

$$\to \cdots \to \mathcal{W}_3(M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathcal{W}_2(M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathcal{W}_1(M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathcal{W}_0(M) = 0$$

où $\mathrm{Res} : \mathcal{W}_{r+1}(M) \to \mathcal{W}_r(M)$ sont les morphismes quotients .
La limite projective de cette tour de complexes est notée $\mathcal{W}(M)$ et appelée la complétion du complexe de Dieudonné saturé M.

2. Les complexes de Dieudonné stricts

Frobenius et Verschiebung

Soit $M \in \mathbf{DC}_{sat}$. Nous définissons sur sa complétion $\mathcal{W}(M)$ des opérateurs F et V.
En utilisant les égalités $F \circ d \circ V = d$ et $F \circ V = p\,\mathrm{id}$, on voit que

$$F(\mathrm{im}(V^r) + \mathrm{im}(dV^r)) \subseteq \mathrm{im}(V^{r-1}) + \mathrm{im}(dV^{r-1}).$$

Par conséquent, il existe un unique morphisme $F : \mathcal{W}_r(M) \to \mathcal{W}_{r-1}(M)$ qui rend le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "F"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ \mathcal{W}_r(M) \arrow[r, "F"] & \mathcal{W}_{r-1}(M) \end{tikzcd}$$

commutatif. En passant à la limite projective, on obtient un morphisme $F : \mathcal{W}(M) \to \mathcal{W}(M)$ qui vérifie bien $d \circ F = p(F \circ d)$.

2. Les complexes de Dieudonné stricts

Frobenius et Verschiebung

De manière analogue, l'identité $V \circ d = p(d \circ V)$ implique que $V(\mathrm{im}(V^r) + \mathrm{im}(dV^r)) \subseteq \mathrm{im}(V^{r+1}) + \mathrm{im}(dV^{r+1})$, d'où l'existence d'un unique $V : \mathcal{W}_r(M) \to \mathcal{W}_{r+1}(M)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "V"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ \mathcal{W}_r(M) \arrow[r, "V"] & \mathcal{W}_{r+1}(M) \end{tikzcd}$$

commute. Comme précédemment, on obtient $V : \mathcal{W}(M) \to \mathcal{W}(M)$ tel que $V \circ d = p(d \circ V)$.

De plus, $F \circ V = V \circ F = p(\mathrm{id})$ et $F \circ d \circ V = d$ sur $\mathcal{W}(M)$.

2. Les complexes de Dieudonné stricts

La complétion est saturée

Lemme

Avec les notations précédentes, on a:

1. *Pour tout $x \in M$, si l'image de px s'annule dans $\mathcal{W}_{r+1}(M)$, l'image de x s'annule dans $\mathcal{W}_r(M)$.*
2. *Pour tout $\overline{x} \in \mathcal{W}_r(M)$, si $d\overline{x}$ est divisible par p, alors $\overline{x}$ appartient à l'image de $F : \mathcal{W}_{r+1}(M) \to \mathcal{W}_r(M)$.*
3. *Le noyau de $\mathrm{Res} : \mathcal{W}_{r+1}(M) \to \mathcal{W}_r(M)$ est exactement le sous-module $\mathcal{W}_{r+1}(M)[p]$ des éléments $\overline{x} \in \mathcal{W}_{r+1}(M)$ tels que $p\overline{x} = 0$.*

Proposition

La complétion $\mathcal{W}(M)$ d'un complexe de Dieudonné saturé M est un complexe de Dieudonné saturé.

2. Les complexes de Dieudonné stricts

La complétion est saturée : preuve (1/4)

1. Pour tout $x \in M$, si l'image de px s'annule dans $\mathcal{W}_{r+1}(M)$, l'image de x s'annule dans $\mathcal{W}_r(M)$.

Preuve.

Soit $x \in M$ tel que $px = V^{r+1}a + dV^{r+1}b$.

- $dV^{r+1}a = p(\ldots)$ donc $da = F^{r+1}dV^{r+1}a = p(\ldots)$. Comme M est saturé, $a = F(\tilde{a})$.
- On a $px = V^{r+1}F\tilde{a} + dV^{r+1}b$, donc $dV^{r+1}b = p(\ldots)$. Donc il existe $\tilde{b}$ tel que $b = F(\tilde{b})$.
- Finalement, $px = pV^r\tilde{a} + pdV^r\tilde{b}$ d'où

$$x = V^r\tilde{a} + dV^r\tilde{b}.$$

□

2. Les complexes de Dieudonné stricts

La complétion est saturée : preuve (2/4)

2. Pour tout $\overline{x} \in \mathcal{W}_r(M)$, si $d\overline{x}$ est divisible par p, alors $\overline{x}$ appartient à l'image de $F : \mathcal{W}_{r+1}(M) \to \mathcal{W}_r(M)$.

Preuve.

Soit $x \in M$ tel que $d\overline{x} = p(\ldots)$, donc $dx = py + V^r a + dV^r b$.

- $dV^{r+1}a = p(\ldots)$ donc $da = F^{r+1}dV^{r+1}a = p(\ldots)$.
  Comme M est saturé, $a = F(\tilde{a})$.
- On a $dx = py + V^r F\tilde{a} + dV^r b$, donc $d(x - V^r b) = p(\ldots)$.
  Par saturation de M, il existe z tel que $x - V^r b = Fz$.
- Alors $\overline{x} = F(\overline{z})$.

$\square$

2. Les complexes de Dieudonné stricts

La complétion est saturée : preuve (3/4)

3. Le noyau de $\mathrm{Res} : \mathcal{W}_{r+1}(M) \to \mathcal{W}_r(M)$ est exactement le sous-module $\mathcal{W}_{r+1}(M)[p]$ des éléments $\overline{x} \in \mathcal{W}_{r+1}(M)$ tels que $p\overline{x} = 0$.

Preuve.

- Si $x \in M$, $\overline{x} = 0$ dans $\mathcal{W}_r(M)$, $x \in \mathrm{im}(V^r) + \mathrm{im}(dV^r)$ donc

$$\begin{aligned} px \in \mathrm{im}(pV^r) + \mathrm{im}(pdV^r) &= \mathrm{im}(V^{r+1}F) + \mathrm{im}(dV^{r+1}F) \\ &\subseteq \mathrm{im}(V^{r+1}) + \mathrm{im}(dV^{r+1}) \end{aligned}$$

- Si $x \in M$, $p\overline{x} = 0$ dans $\mathcal{W}_{r+1}(M)$, alors l'image de x est nulle dans $\mathcal{W}_r(M)$ par le 1.

$\square$

2. Les complexes de Dieudonné stricts

La complétion est saturée : preuve (4/4)

Preuve de la proposition.

- Sans p-torsion : Si $x = (x_r)_{r\geq 0} \in \mathcal{W}(M)$ vérifie $px = 0$, alors $px_r = 0$ pour tout r, donc $x_{r-1} = 0$ pour tout r par le 1.
- Condition sur F : Soit $x = (x_r)_{r\geq 0} \in \mathcal{W}(M)$, tq $dx = p(\ldots)$. Pour tout r, $dx_r = p(\ldots)$ donc il existe $y_{r+1} \in \mathcal{W}_{r+1}(M)$ tel que $F(y_{r+1}) = x_r$ par le 2.

  La suite $y := (\mathrm{Res}(y_{r+1}))_{r\geq 0}$
  - appartient à $\mathcal{W}(M)$ car l'élément $\mathrm{Res}(y_{r+1}) - (y_r)$ est annulé par F, donc par $p = VF$, donc (d'après le 3.) par Res.
  - vérifie $Fy = x$.

$\square$

2. Les complexes de Dieudonné stricts

Fonctorialité

Soit $f : M \to N$ un morphisme de complexes de Dieudonné saturés. Alors f induit un morphisme $\mathcal{W}(f) : \mathcal{W}(M) \to \mathcal{W}(N)$, défini par limite projective des applications

$$\mathcal{W}_r(f) : \underbrace{M/(\mathrm{im}(V^r) + \mathrm{im}(dV^r))}_{=\mathcal{W}_r(M)} \to \underbrace{N/(\mathrm{im}(V^r) + \mathrm{im}(dV^r))}_{=\mathcal{W}_r(N)}.$$

Ceci montre que le procédé de complétion définit un foncteur covariant

$$\mathcal{W} : \mathbf{DC_{sat}} \to \mathbf{DC_{sat}}.$$

2. Les complexes de Dieudonné stricts

Définition

Pour tout complexe de Dieudonné saturé M, la tour de complexes de cochaines

$$M \to \cdots \to \mathcal{W}_3(M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathcal{W}_2(M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathcal{W}_1(M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathcal{W}_0(M)$$

détermine un morphisme canonique $\rho_M : M \to \mathcal{W}(M)$.

Définition

Soit M un complexe de Dieudonné. On dit que M est strict si

- *M est saturé, et*
- *$\rho_M : M \to \mathcal{W}(M)$ est un isomorphisme.*

Nous notons $\mathbf{DC_{str}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{DC}$ des complexes de Dieudonné stricts.

2. Les complexes de Dieudonné stricts

Premier exemple

Soit A un groupe abélien et soit $F : A \to A$ un endomorphisme. On pose

$$M^n = \begin{cases} A & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (M, d, F) est un complexe de Dieudonné.
2. C'est un complexe de Dieudonné saturé ssi
   A est *sans p-torsion* et F est un *automorphisme*.
3. Si ces conditions (en 2) sont satisfaites, M est un complexe de Dieudonné strict si et seulement si A est *p-adiquement complet*, i.e. $A \to \varprojlim A/p^r A$ isomorphisme.
   En effet, on a $V = p(F^{-1})$, d'où $\mathrm{im}(V^r) + \mathrm{im}(dV^r) = p^r A$,

$$\Longrightarrow \mathcal{W}_r(M) = \cdots \to 0 \to 0 \to A/p^r A \to 0 \to 0 \to \cdots$$

$$\Longrightarrow \mathcal{W}(M) = \cdots \to 0 \to 0 \to \varprojlim A/p^r A \to 0 \to 0 \to \cdots$$

2. Les complexes de Dieudonné stricts

Deuxième exemple

Soit M^0 le groupe abélien consistant en les expressions formelles

$$\sum_{m\geq 0} a_m F^m + \sum_{n>0} b_n V^n$$

où $a_m, b_n \in \mathbf{Z}_p$ et $a_m \to_{v_p} 0$. Similairement, soit

$$M^1 := \Big\{ \sum_{m\geq 0} a_m F^m d + \sum_{n>0} b_n d V^n \mid a_m, b_n \in \mathbf{Z}_p, a_m \to_{v_p} 0 \Big\}.$$

On peut alors former le complexe de Dieudonné strict

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M^0 \xrightarrow{d} M^1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

où la différentielle d est donnée par

$$d\Big(\sum_{m\geq 0} a_m F^m + \sum_{n>0} b_n V^n \Big) = \sum_{m\geq 0} p^m a_m F^m d + \sum_{n>0} b_n d V^n.$$

Plan

1. Le critère de Cartier
2. Les complexes de Dieudonné stricts
3. La complétion d'un complexe de Dieudonné saturé

3. La complétion d'un complexe de Dieudonné saturé

Soit M un complexe de Dieudonné saturé.

Objectifs :

- $\mathcal{W}(M)$ est un complexe de Dieudonné strict
- $\mathcal{W}(M)$ est universel parmi les complexes de Dieudonné stricts recevant une application de M.

Proposition (Bhatt-Lurie-Mathew, Proposition 2.7.1)

Soit $r \in \mathbb{N}$. Alors l'application $F^r : M \to M$ induit un isomorphisme de groupes abéliens gradués,

$$\theta : \mathcal{W}_r(M) \to H(M/p^r M).$$

Preuve :

- L'application est bien définie
  - $d \circ F^r = p^r(F^r \circ d)$

    $\forall x \in M$, $\overline{dF^r(x)} = \overline{p^r(F^r \circ dx)} = \overline{0}$ dans $M/p^r M$.
  - $F^r V^r(x) = p^r x$ et $F^r dV^r(y) = dy$

    Si $z = V^r(y) + dV^r(t)$ avec $y, t \in M$ alors $F^r z = p^r y + dt$ donc $\overline{F^r z} = d\overline{t}$.

    $\implies$ F^r envoie $im(V^r) + im(dV^r)$ dans les cobords de $M/p^r M$

- Surjectivité. Elle découle de la proposition 2.2.5 qui montre que F^r induit un isomorphisme et en particulier une surjection $F^r : M^n \to \{x \in M^n : dx \in p^r M^{n+1}\}$.

- Injectivité. Soit $x \in M^n$ tel que $\overline{F^r x} = 0$ dans $H^n(M/p^r M)$.

  $F^r x = p^r y + dz$ pour $y \in M^n$ et $z \in M^{n-1}$

  Alors

$$p^r x = V^r F^r x = V^r(p^r y + dz) = p^r V^r(y) + p^r dV^r(z)$$

  donc $x = V^r(y) + dV^r(z) \in im(V^r) + im(dV^r)$.

Corollaire (Bhatt-Lurie-Mathew, Corollary 2.7.2)

Soit (M, d, F) un complexe de Dieudonné saturé. Alors l'application quotient

$$u : M/pM \to \mathcal{W}_1(M)$$

est un quasi-isomorphisme de complexes de cochaines.

Preuve :

$$\begin{tikzcd} M/pM \arrow[r, "\alpha_F"] \arrow[d, "u"'] & (\eta_p M)/p(\eta_p M) \arrow[d] \\ \mathcal{W}_1(M) \arrow[r, "\theta"'] & H(M/pM), \end{tikzcd}$$

Corollaire (Bhatt-Lurie-Mathew, Corollary 2.7.4)

Soit $f : M \to N$ un morphisme de complexes de Dieudonné saturé. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *L'application induite $M/pM \to N/pN$ est un quasi-isomorphisme de complexes de cochaines.*
2. *L'application induite $\mathcal{W}_1(M) \to \mathcal{W}_1(N)$ est un isomorphisme de complexes de cochaines.*
3. *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'application $M/p^r M \to N/p^r N$ est un quasi-isomorphisme de complexes de cochaines.*
4. *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'application $\mathcal{W}_r(M) \to \mathcal{W}_r(N)$ est un isomorphisme de complexes de cochaines.*

Proposition (Bhatt-Lurie-Mathew, Proposition 2.7.5)

Soit M un complexe de Dieudonné saturé. Alors l'application $\rho_M : M \to \mathcal{W}(M)$ induit un isomorphisme

$$\mathcal{W}_r(M) \to \mathcal{W}_r(\mathcal{W}(M)), \text{ pour tout } r \geq 0.$$

Preuve : Soit $\gamma : \mathcal{W}_1(M) \to \mathcal{W}_1(\mathcal{W}(M))$ l'application déterminée par ρ_M.

- Injectivité. Soit $\overline{x} \in \mathcal{W}_1(M)^n$ tel que $\gamma(\overline{x}) = 0$.

  $\rho_M(x) = Vy + dVz$ pour $y \in \mathcal{W}(M)^n$ et $z \in \mathcal{W}(M)^{n-1}$

  On identifie y et z avec les deux suites compatibles $\overline{y_m} \in \mathcal{W}_m(M)^n$ et $\overline{z_m} \in \mathcal{W}_m(M)^{n-1}$.

  $\overline{x} = V(\overline{y_0}) + dV(\overline{z_0}) = 0.$

- Surjectivité. Soient $e \in \mathcal{W}_1(\mathcal{W}(M))^n$ et $x \in \mathcal{W}(M)^n$ représentant e.

  On identifie x à la suite compatible $\overline{x_m} \in \mathcal{W}_m(M)^n$.

  Par compatibilité de la suite, $x_{m+1} = x_m + V^m y_m + dV^m z_m$ pour $y_m \in M^n$ et $z_m \in M^{n-1}$.

  Alors
  $x = \rho_M(x_1) + V(\sum_{m\geq 0} V^m y_{m+1}) + dV(\sum_{m\geq 0} V^m z_{m+1})$
  dans $\mathcal{W}(M)^n$.

  On obtient alors l'identité $e = \gamma(\overline{x_1})$ dans $\mathcal{W}_1(\mathcal{W}(M))^n$.

Corollaire (Bhatt-Lurie-Mathew, (Corollary 2.7.6))

Soit M un complexe de Dieudonné saturé. Alors la complétion $\mathcal{W}(M)$ est un complexe de Dieudonné strict.

Preuve :

L'application canonique $\rho_M : M \to \mathcal{W}(M)$ induit deux applications de complexes de Dieudonné :

- $\rho_{\mathcal{W}(M)} : \mathcal{W}(M) \to \mathcal{W}(\mathcal{W}(M))$
- $\mathcal{W}(\rho_M) : \mathcal{W}(M) \to \mathcal{W}(\mathcal{W}(M))$

Soit $x \in \mathcal{W}(M)^n$. On veut montrer que $\rho_{\mathcal{W}(M)}(x)$ et $\mathcal{W}(\rho_M)(x)$ ont la même image dans $\mathcal{W}_r(\mathcal{W}(M))^n$ pour tout $r \geq 0$.

Quitte à remplacer x par $x + V^r y + dV^r z$, on peut supposer sans perte de généralité que $x = \rho_M(x')$ pour $x' \in M^n$ et

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "\rho_M"'] & \mathcal{W}(M)^n \arrow[d] \\ \mathcal{W}_r(M)^n \arrow[r] & \mathcal{W}_r(\mathcal{W}(M))^n. \end{tikzcd}$$

Proposition

Soit M et N deux complexes de Dieudonné saturés, avec N strict. Alors la composition avec l'application ρ_M induit une bijection

$$\theta : Hom_{\mathbf{DC}}(\mathcal{W}(M), N) \to Hom_{\mathbf{DC}}(M, N).$$

Preuve :

- Injectivité.
  Soit $f : \mathcal{W}(M) \to N$ telle que $f \circ \rho_M = 0$.

  Pour chaque $r \geq 0$,

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d] & \mathcal{W}(M) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[d, "\pi_r"'] \\
\mathcal{W}_r(M) \arrow[r, "\mathcal{W}_r(\rho_M)"'] & \mathcal{W}_r(\mathcal{W}(M)) \arrow[r, "\mathcal{W}_r(f)"'] & \mathcal{W}_r(N)
\end{tikzcd}$$

On a donc $\mathcal{W}_r(f) \circ \mathcal{W}_r(\rho_M) = 0$. Or, $\mathcal{W}_r(\rho_M)$ est un isomorphisme, donc $\mathcal{W}_r(f) = 0$.

$\pi_r \circ f = 0$ pour tout $r \geq 0$, d'où $\rho_N \circ f = 0$.

Mais N est strict donc ρ_N est un isomorphisme, et $f = 0$.

- Surjectivité. Soit $f_0 : M \to N$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"'] \\ \mathcal{W}(M) \arrow[r, "\mathcal{W}(f_0)"'] & \mathcal{W}(N), \end{tikzcd}$$

ρ_N est un isomorphisme puisque N est strict.

$f_0 = \rho_N^{-1} \circ \mathcal{W}(f_0) \circ \rho_M$ est dans l'image de θ.

Corollaire

Le foncteur d'inclusion $\mathbf{DC}_{str} \to \mathbf{DC}_{sat}$ *a un adjoint à gauche, donné par* $M \mapsto \mathcal{W}(M)$.