Complexes de Dieudonné

Définition:

Un complexe de Dieudonné est la donnée:

(i) d'un complexe $((M^n)_{n\in\mathbb{Z}}, d : M^n \to M^{n+1})$ *de groupes abéliens.*

(ii) d'applications $F : M^n \to M^n$ *telles que* $dF = pFd$.

Définition:

Un morphisme de complexes de Dieudonné est une application $u : (M, d, F) \to (N, d', F')$ *où* u *est un morphisme de complexes tel que* $uF = F'u$.

On note $\mathcal{DC}$ *la catégorie des complexes de Dieudonné.*

Un complexe (M,d,F) est dit saturé si :

(i) M est sans p-torsion.
(ii) $F : M^n \xrightarrow{\sim} \left\{x \in M^n | dx \in pM^{n+1}\right\}$

Remarque:
Si le complexe est saturé, F est injective et $pM \subset Im(F)$.

Proposition 1:

Il existe une unique application V sur M, appelée Verschiebung, telle que $\forall x \in M^n, F(Vx) = px$.
De plus, on a FV=VF, FdV=d et Vd=pdV.

Définition:

Soit (M,d) un complexe de groupes abéliens sans p-torsion, on définit $((\eta_p M), d)$ *un sous-complexe de* $M[p^{-1}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}] \otimes M$ *par:*

$\rightarrow (\eta_p M)^{(n)} = \left\{ x \in p^n M^n | dx \in p^{n+1} M^{n+1} \right\}$

$\rightarrow \alpha_F : x \in M^n \rightarrow p^n F(x) \in M^n[\frac{1}{p}]$

Proposition 2:

Soit M un complexe de Dieudonné sans p-torsion,
Alors, α_F est un morphisme de complexes de (M, d, F) dans $((\eta_p M), d, F)$.
De plus, M est saturé si et seulement si α_F est un isomorphisme.

Saturation

$f : M \to N$ morphisme de DC
f exhibe N comme le saturé de M si :

(i) N est saturé

(ii) $\forall K \in \mathrm{Ob}_{\mathrm{DC}}$ **saturé**, la composition par f induit un iso

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{DC}}(N, K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DC}}(M, K)$$

Remarque : (N, f) est déterminé à isomorphisme unique près

Théorème

Soit $M \in Ob_{\mathrm{DC}}$, M admet un saturé, que l'on note $Sat(M)$.

Preuve : On peut supposer M sans p-torsions :
T le sous-complexe de p-torsions, N sans p-torsions, $f : M \to N$
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & N^n \\ M^n/T^n \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

La limite inductive de $\mathcal{D}$ est un saturé de M avec :

$$\mathcal{D} = M \xrightarrow{\alpha_F} \eta_p M \xrightarrow{\alpha_F} \eta_p(\eta_p M) \xrightarrow{\alpha_F} \cdots$$

Remarques : (i) $\alpha_F : (M, d, F) \to (\eta_p M, d, F)$ **morphisme**

(ii) $\eta_{p^r} = \underbrace{\eta_p \circ \cdots \circ \eta_p}_{\text{r fois}}$ et $\eta_{p^r} M = \{x \in p^{rn} M^n | dx \in p^{r(n+1)} M^{n+1}\}$

(iii) $Sat(M) = \varinjlim \mathcal{D} = \left(\bigoplus_{r \in \mathbb{N}} \eta_{p^r} M \right) \Big/ \ (x \sim \alpha_F(x))$

$$(d, F) \rightsquigarrow (d_{Sat(M)}, F_{Sat(M)})$$

Vérifions que $Sat(M)$ convient.

Propriété universelle : Soit K saturé

La donnée de $g : M \to K$ équivaut à :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\alpha_F"] \arrow[d, "g"'] & \eta_p M \arrow[r, "\alpha_F"] \arrow[d] & \eta_{p^2} M \arrow[r, "\alpha_F"] \arrow[d] & \cdots \\
K \arrow[r, "\alpha_{F_K}", "\sim"'] & \eta_p K \arrow[r, "\alpha_{F_K}", "\sim"'] & \eta_{p^2} K \arrow[r, "\alpha_{F_K}", "\sim"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

La donnée de $\tilde{g} : Sat(M) \to K$ équivaut à :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\alpha_F"] \arrow[d, "g"'] & \eta_p M \arrow[r, "\alpha_F"] \arrow[dl, "g_1"'] & \eta_{p^2} M \arrow[r, "\alpha_F"] \arrow[dll, "g_2"'] & \cdots \\
K & & &
\end{tikzcd}$$

α_{F_K} iso $\Rightarrow$ les deux diagrammes sont équivalents et

$$Hom_{\mathrm{DC}}(M, K) \simeq Hom_{\mathrm{DC}}(Sat(M), K)$$

p-torsions : $x \in Sat(M)$ tq $p^r x = 0$
$\exists x_n \in \eta_{p^n} M, \quad x = \pi_n x_n \quad$ (où $\pi_n : \eta_{p^n} M \to Sat(M)$)
$p^r x = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists N > n \quad p^r x_N = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$
Donc $Sat(M)$ sans p-torsions

Sat(M) saturé :
Critère : $\alpha_{F_{Sat(M)}} : Sat(M) \xrightarrow{\sim} \eta_p Sat(M)$

Lemme
$(E_i, u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ système inductif de groupes abéliens. Alors

$$\varinjlim_{i \geqslant 0} E_i \xrightarrow{u} \varinjlim_{i \geqslant 1} E_i$$

est un isomorphisme.

Cela donne pour $(\eta_{p^i} M, \alpha_F)_{i \in \mathbb{N}} \quad \alpha_{F\,Sat(M)} : Sat(M) \xrightarrow{\sim} Sat(\eta_p M)$

Reste à montrer $Sat(\eta_p M) = \eta_p(Sat(M))$

- $Sat(\eta_p(M)) = \alpha_F(Sat(M)) \subset \eta_p(Sat(M))$

-Réciproquement, si $x \in \eta_p(Sat(M))$ alors :

$$\begin{cases} x = \pi_N x_N & N >> 0 \\ x_N^i \in p^i(\eta_{p^N} M)^i & \\ dx_N^i \in p^{(i+1)}(\eta_{p^N} M)^{(i+1)} & \end{cases}$$

i.e. $x_N \in \eta_p(\eta_{p^N} M) = \eta_{p^{N+1}} M$
i.e. $x \in Sat(\eta_p(M))$ $\square$

Scolie

Le foncteur d'inclusion $\mathrm{DC}_{Sat} \to \mathrm{DC}$ *admet un adjoint à gauche* $M \mapsto Sat(M)$.

Description de Sat(M)

On veut identifier $Sat(M)$ à un sous-groupe gradué de $M[F^{-1}]$

$$M[F^{-1}] = \varinjlim(M \xrightarrow{F} M \xrightarrow{F} M \xrightarrow{F} \dots)$$

$$M[F^{-1}] \xrightarrow{\sim} \{F^{-m}x\}/\ (x \sim y \Leftrightarrow F^k x = y \text{ ou } x = F^k y)$$

via le morphisme :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "Id"'] & F^{-1}M \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "F"'] & F^{-2}M \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "F^2"'] & \dots \\
M \arrow[r, "F"] & M \arrow[r, "F"] & M \arrow[r, "F"] & \dots
\end{tikzcd}$$

- $M/\bigcup_n \ker F^n$ s'injecte naturellement dans $M[F^{-1}]$

M sans p-torsions
$Sat(M)$ s'injecte dans $M[F^{-}1]$ via (en degré i):

$$\begin{tikzcd}
M^i \arrow[r, "\alpha_F"] \arrow[d, "Id"] & (\eta_p M)^i \arrow[r, "\alpha_F"] \arrow[d, "\times p^{-i}"] & \cdots \arrow[r, "\alpha_F"] & (\eta_{p^n} M)^i \arrow[r, "\alpha_F"] \arrow[d, "\times p^{-ni}"] & \cdots \\
M^i \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Id"] & M^i \arrow[r, "F"] \arrow[d, "F^{-1}"] & \cdots \arrow[r, "F"] & M^i \arrow[r, "F"] \arrow[d, "F^{-n}"] & \cdots \\
M^i \arrow[r, "Id"] & F^{-1} M^i \arrow[r, "Id"] & \cdots \arrow[r, "Id"] & F^{-n} M^i \arrow[r, "F"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$p^{ni} x \in (\eta_{p^n} M)^i \mapsto F^{-n} x$ et $dx \in p^n M^{i+1}$

Inversement, $F^{-n} x \in F^{-n} M^i$ avec
$dx \in p^n M^{i+1} \Rightarrow d(p^{ni} x) \in p^{n(i+1)} M^{i+1}$
$\Rightarrow p^{ni} x \in (\eta_{p^n} M)^i$

Finalement, $Sat(M)$ s'identifie au sous-groupe abélien gradué :

- des éléments x tel que $d(F^n x) \in p^n M^{\star+1}$, $n >> 0$

- de différentielle

$$x \mapsto F^{-n} p^{-n} d F^n x, \ n >> 0$$

- Le morphisme de Frobenius est donné par la restriction

$$F : M[F^{-1}] \to M[F^{-1}]$$

Description alternative

M sans p-torsions et F injective
$d : M^\star \to M^{\star+1}$ s'étend en

$$\begin{array}{rccc} d: & M[F^{-1}] & \to & M[F^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] \\ & d(F^{-n}x) & \mapsto & p^{-n}F^{-n}dx \end{array}$$

Alors $Sat(M)$ est l'ensemble des x tq $dx \in M[F^{-1}]$:

Si $d(F^{-n}x) = F^{-m}z$, $x, z \in M$ alors $d(F^r F^{-n}x) = p^r F^{-m}z$, $r > n$
Inversement, si $F^{-n}x \in Sat(M)$ alors p^n divise dx et donc

$d(F^{-n}x) = p^{-n}F^{-n}dx \in M[F^{-1}]$