# Différentielles de Kähler et complexe de de Rham

Manh-Linh

Week-end d'Algèbre 2, du 11 au 14 novembre 2019

**Résumé**

Les différentielles de Kähler est un outil qui nous permet de faire des calculs différentiels sur les objets algébriques. Nous voulons similariser la définion des formes différentielles et celle du complexe de de Rham, de façon complètement algébrique. Dans cette enquête, nous allons construire ces objets-là et étudier ses propriétés.

L'auteur voudrait remercier professeur Ariane Mézard, aussi bien que professeur Luc Illusie, qui m'ont donnés des perspicacités et des conseils sur ce projet.

## Table des matières

**1 Le module des différentielles de Kähler** **1**

**2 Compatibilité avec les opérations d'anneaux** **5**

**3 Deux suites exactes fondamentales** **7**

**4 Le complexe de de Rham** **10**

## 1 Le module des différentielles de Kähler

Dans ce qui suit, tous les anneaux (et algèbres) sont commutatifs, sauf si spécifié.
Soient $A$ un anneau, $B$ une $A$-algèbre et $M$ un $B$-module.

**Définition 1.1.** Une *$A$-dérivation* de $B$ à valeurs dans $M$ est un morphisme $D : B \to M$ de $A$-modules qui vérifie la *loi de Leibniz* suivante

$$\forall x, y \in B, \qquad D(xy) = xDy + yDx. \tag{1}$$

On note $\mathrm{Der}_A(B, M)$ l'ensemble de $A$-dérivations de $B$ à valeurs dans $M$.

**Remarque.**

1. $\mathrm{Der}_A(B, M)$ est muni d'une structure de $B$-module.
2. Si $D \in \mathrm{Der}_A(B, M)$, alors $D(x^n) = nx^{n-1}Dx$ pour tout $x \in B$ et tout entier $n$.
3. Une application additive $D : B \to M$ vérifiant (1) est $A$-linéaire (i.e. elle est une $A$-dérivation) si et seulement si $Da = 0$ pour tout $a \in A$.

On veut définir le module des différentielles de Kähler $\Omega^1_{B/A}$ comme le module des $A$-dérivations « le plus général » de $B$. Autrement dit, il existe une $A$-dérivation « universelle » $d_{B/A} : B \to \Omega^1_{B/A}$.

**Définition 1.2.** Le *module des différentielles de Kähler* de $B/A$ est un $B$-module $\Omega^1_{B/A}$ avec une $A$-dérivation $d_{B/A} : B \to \Omega^1_{B/A}$ tels que pour tout $B$-module $M$, l'application

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M) \to \mathrm{Der}_A(B, M), \qquad u \mapsto u \circ d_{B/A} \tag{2}$$

soit bijective.

Étant défini par une propriété universelle, $\Omega^1_{B/A}$ est unique à unique isomorphisme près, lorsqu'il existe. Si $D \in \mathrm{Der}_A(B, M)$ et $f \in \mathrm{Hom}_B(M, N)$, alors $f \circ D \in \mathrm{Der}_A(B, N)$. On a définit un fonteur

$$\mathrm{Der}_A(B, -) : B\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ens}.$$

De plus, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Der}_A(B, M) \arrow[r, "d^*_{B/A}"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathrm{Hom}_B(\Omega, M) \arrow[d, "f_*"] \\
\mathrm{Der}_A(B, N) \arrow[r, "d^*_{B/A}"'] & \mathrm{Hom}_B(\Omega, N)
\end{tikzcd}$$

est commutatif, i.e. la bijection (2) est naturelle en $M$. On a donc

**Proposition 1.3.** Le foncteur $\mathrm{Der}_A(B, -)$ est représenté par $\Omega^1_{B/A}$.

Dans la suite, on va construire un modèle pour $\Omega^1_{B/A}$. Une construction directe est de prendre le $B$-module libre sur les symboles formels $dx$, $x \in B$, modulo les relations $da = 0$ pour $a = 0$, $d(x + y) = dx + dy$ et $d(xy) = xdy + ydx$. On vérifie sans peine que cette construction satisfait la propriété universelle (2). La deuxième construction suivante est moins directe, mais elle peut être généralisée au cas des schémas.

Soit $\mu : B \otimes_A B \to B$ la multiplication $x \otimes y \mapsto xy$. Soient $I_{B/A} := \mathrm{Ker}\,\mu$ et $\Omega^1_{B/A} := I_{B/A}/I^2_{B/A}$.

**Lemme 1.4.** $I_{B/A}$ est engendré (à gauche et à droit) par les éléments $1 \otimes x - x \otimes 1$, $x \in B$.

*Démonstration.* Soit $\sum_i x_i \otimes y_i \in I_{B/A}$, i.e. $\sum_i x_i y_i = 0$ dans $B$. Alors

$$\sum_i x_i \otimes y_i = \sum_i (x_i \otimes 1)(1 \otimes y_i - y_i \otimes 1) = -\sum_i (1 \otimes x_i - x_i \otimes 1)(1 \otimes y_i).$$

□

**Corollaire 1.5.** Les deux structures de $B$-algèbre sur $B$

$$b \mapsto 1 \otimes b \qquad \text{et} \qquad b \mapsto b \otimes 1$$

induisent la même structure de $B$-module sur $\Omega^1_{B/A}$.

On définit maintenant la dévration universelle

$$d_{B/A} : B \to \Omega^1_{B/A}, \qquad x \mapsto [1 \otimes x - x \otimes 1].$$

Bien sûr, $d_{B/A}$ est à linéaire. Elle vérifie aussi (1). En effet, pour tous $x, y \in B$

$$\begin{aligned} x \cdot d_{B/A}y + y \cdot d_{B/A}x &= [(1 \otimes x)(1 \otimes y - y \otimes 1) + (y \otimes 1)(1 \otimes x - x \otimes 1)] \\ &= [1 \otimes xy - xy \otimes 1] \\ &= d_{B/A}(xy), \end{aligned}$$

i.e. $d_{B/A}$ est une $A$-dérivation. Montrons que $(\Omega^1_{B/A}, d_{B/A})$ vérifie la propriété universelle mentionée dans la Définition 1.2. L'injectivité est facile : on suppose que $u \in \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M)$ satisfait $u \circ d_{B/A} = 0$. De Lemme 1.4, les éléments $d_{B/A}x$, $x \in B$ engendrent le $B$-module $\Omega^1_{B/A}$, donc $u = 0$. Il reste la surjectivité de (2). Pour ce faire, soit $D : B \to M$ une $A$-dérivation. L'application

$$B \times B \to M, \quad (x, y) \mapsto xDy$$

est $A$-bilinéaire, donc elle induit un morphisme de $A$-modules

$$U : I_{B/A} \to M, \qquad \sum_i x_i \otimes y_i \mapsto \sum_i x_i D y_i,$$

qui s'annule sur $I^2$. En effet, si $\sum_i x_i \otimes y_i \in I$ et $\mu\left(\sum_j x'_j \otimes y'_j\right) \in I$, alors

$$\begin{aligned} U\left(\left(\sum_i x_i \otimes y_i\right)\left(\sum_j x'_j \otimes y'_j\right)\right) &= \sum_{i,j} x_i x'_j D(y_i y'_j) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_i x'_j D y'_j + \sum_{i,j} x'_j y'_j x_i D y_i \\ &= \left(\sum_i x_i y_i\right)\left(\sum_j x'_j D y'_j\right) + \left(\sum_j x'_j y'_j\right)\left(\sum_i x_i D y_i\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Elle induit donc une application $A$-linéaire $u : \Omega^1_{B/A} \to M$. De plus, pour $b \in B$ et $\sum_i x_i \otimes y_i \in I_{B/A}$

$$u\left([(b \otimes 1)] \sum_i [x_i \otimes y_i]\right) = u\left(\sum_i [b x_i \otimes y_i]\right) = \sum_i b x_i D y_i = bu\left(\sum_i x_i D y_i\right) = bu\left(\sum_i [x_i \otimes y_i]\right),$$

i.e. $u$ est un morphisme de $B$-modules. Finalement, pour tout $x \in B$

$$u(d_{B/A}x) = u([1 \otimes x - x \otimes 1]) = 1Dx - xD1 = Dx,$$

i.e. $u \circ d_{B/A} = D$. Ainsi, on a montré la surjectivité de (2).

On va calculer $\Omega^1_{B/A}$ dans un cas simple.

**Proposition 1.6.** Si $E$ est un $A$-module et $B = S_A(E)$, l'algèbre symmétrique sur $E$, alors l'application

$$\varphi : B \otimes_A E \to \Omega^1_{B/A}, \qquad b \otimes x \mapsto b \cdot d_{B/A}x$$

est un isomorphisme de $B$-modules.

On a besoin de

**Lemme 1.7** (Lemme de Yoneda)**.** Soient $A$, $B$ deux objets d'une catétogrie $\mathbf{C}$. Si l'on a une bijection naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,-) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B,-)$, alors le morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B)$ correspondant à l'identité $\mathrm{id}_B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B,B)$ est un isomorphisme.

*Démonstration de Proposition 1.6.* Soit $M$ un $B$-module. On va contruire une bijection

$$\mathrm{Hom}_A(E,M) \to \mathrm{Der}_A(B,M). \tag{3}$$

On se donne un morphisme de $A$-modules $f : E \to M$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application

$$E^n \to M, \qquad (x_1,\dots,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j\neq i} x_j\right) f(x_i)$$

est $A$-multilinéaire est symmétrique. Elle induit donc un morphisme de $A$-modules

$$f_n : S_A^n(E) \to M, \qquad x_1\cdots x_n \mapsto \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j\neq i} x_j\right) f(x_i).$$

En particulier, $f_0 = 0$ et $f_1 = f$. Les $f_n$, $n \in \mathbb{N}$ induisent un morphisme de $A$-modules

$$f_\bullet : S_A(E) \to M$$

qui vérifie la loi de Leibniz (1). Par linéarité, il suffit de la vérifier pour $x = x_1\cdots x_n \in S_A^n(E)$ et $y = y_1\cdots y_m \in S_A^m(E)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
f_\bullet(xy) &= f_{m+n}(x_1\cdots x_n y_1\cdots y_m)\\
&= \sum_{i=1}^m x_1\cdots x_n \left(\prod_{j\neq i} y_j\right) f(y_i) + \sum_{i=1}^m y_1\cdots y_m \left(\prod_{j\neq i} x_j\right) f(x_i)\\
&= x_1\cdots x_n f_m(y_1\cdots y_m) + y_1\cdots y_m f_n(x_1\cdots x_n)\\
&= x f_\bullet(y) + y f_\bullet(x),
\end{aligned}$$

i.e. $f_\bullet$ est une $A$-dérivation. La flèche au sens reciproque dans (3) est simplement la précomposition avec l'inclusion naturelle $E \to B$. On a des bijections

$$\mathrm{Hom}_B(B\otimes_A E, M) \simeq \mathrm{Hom}_A(E,M) \simeq \mathrm{Der}_A(B,M) \simeq \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M), \tag{4}$$

toutes sont naturelles en $M$. Il suit du Lemme 1.7 que $B\otimes_A E \simeq \Omega^1_{B/A}$. En prennant $M = \Omega^1_{B/A}$ dans 4, on voit facilement que l'identité de $\Omega^1_{B/A}$ correspond à $\varphi$. □

**Corollaire 1.8.** Si $B = A[x_i]_{i\in\mathcal{I}}$, l'algèbre de polynômes en les variables $x_i$, alors

$$\Omega^1_{B/A} = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} B\cdot d_{B/A}x_i.$$

*Démonstration.* Soit $E = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} Ax_i$, alors $B = S_A(E)$. Il suit de la Proposition 1.6 que

$$\Omega^1_{B/A} \simeq B\otimes_A \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} Ax_i \simeq \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} (B\otimes_A Ax_i),$$

qui est un $B$-module libre à base $\{1\otimes x_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. De plus cet isomorphisme-là associe $1\otimes x_i$ à $d_{B/A}x_i$. □

## 2 Compatibilité avec les opérations d'anneaux

Dans la suite, on notera simplement $d$ pour $d_{B/A}$. Les différentielles de Kähler commutent avec l'extension de scalaires. Autrement dit, on a

**Proposition 2.1.** Soient $A'$ une $A$-algèbre et $B' := A' \otimes_A B$. On a un isomorphisme de $B'$-modules

$$B' \otimes_B \Omega^1_{B/A} \simeq \Omega^1_{B'/A'}.$$

*Démonstration.* Soit $M$ un $B'$-modules. On a une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_A(B, M) \simeq \mathrm{Hom}_{A'}(B', M) \tag{5}$$

qui associe chaque morphisme $f \in \mathrm{Hom}_A(B, M)$ au morphisme

$$F : B' = A' \otimes_A B \to M, \qquad F(a' \otimes b) = (a' \otimes 1)f(b).$$

Si $f \in \mathrm{Der}_A(B, M)$, alors pour tous $a'_1, a'_2 \in A'$ et tous $b_1, b_2 \in B$, on aura

$$\begin{aligned} F((a'_1 \otimes b_1)(a'_2 \otimes b_2)) &= F(a'_1 a'_2 \otimes b_1 b_2) \\ &= (a'_1 a'_2 \otimes 1) f(b_1 b_2) \\ &= (a'_1 a'_2 \otimes 1)((1 \otimes b_1) f(b_2) + (1 \otimes b_2) f(b_1)) \\ &= (a'_1 \otimes b_1)(a'_2 \otimes 1) f(b_2) + (a'_2 \otimes b_2)(a'_1 \otimes 1) f(b_1) \\ &= (a'_1 \otimes b_1) F(a'_2 \otimes b_2) + (a'_2 \otimes b_2) F(a'_1 \otimes b_1), \end{aligned}$$

i.e. $F \in \mathrm{Der}_{A'}(B', M)$. Inversement, si $F \in \mathrm{Der}_{A'}(B', M)$, on aura pour tous $b_1, b_2 \in B$

$$F(1 \otimes b_1 b_2) = F((1 \otimes b_1)(1 \otimes b_2)) = (1 \otimes b_1) F(1 \otimes b_2) + (1 \otimes b_2) F(1 \otimes b_1),$$

i.e. $f(b_1 b_2) = (1 \otimes b_1) f(b_2) + (1 \otimes b_2) f(b_1)$. On conclure que la bijection (5) se restreint à une bijection entre les dérivations. Les bijections

$$\mathrm{Hom}_{B'}(B' \otimes_B \Omega^1_{B/A}, M) \simeq \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M) \simeq \mathrm{Der}_A(B, M) \simeq \mathrm{Der}_{A'}(B', M) \simeq \mathrm{Hom}_{B'}(\Omega^1_{B'/A'}, M)$$

sont naturelles en $M$. Il suit du Lemme 1.7 que $B' \otimes_B \Omega^1_{B/A} \simeq \Omega^1_{B'/A'}$, et l'isomorphisme correspond à l'identité de $\Omega^1_{B'/A'}$, i.e. il est donné par $b' \otimes dx \mapsto b' d(1 \otimes x)$. □

Les différentielles de Kähler est également compatible avec localisation.

**Proposition 2.2.** Soit $S \subseteq B$ une partie multiplicative. On a un isomorphisme de $S^{-1}B$-modules

$$S^{-1}\Omega^1_{B/A} \simeq \Omega^1_{S^{-1}B/A}.$$

*Démonstration.* Soit $M$ un $S^{-1}B$-module et $D : B \to M$ un morphisme de $A$-modules. Si $D \in \mathrm{Der}_A(B, M)$, on peut l'étendre à une $A$-dérivation $\Delta$ de $S^{-1}B$ à valeurs dans $M$ en posant

$$\Delta\left(\frac{x}{s}\right) = u(x, s) := \frac{sDx - xDs}{s^2},$$

qui est bien défini. En effet, pour tout $b \in S$

$$u(bx, bs) = \frac{bsD(bx) - bxD(bs)}{s^2 b^2} = \frac{b^2 sDx + bsxDb - bxsDb - b^2 xDs}{s^2 b^2} = \frac{sDx - xDs}{s^2} = u(x, s).$$

Ainsi, si $rtx = rys$ pour un certain $r \in S$, on aura

$$u(x,s) = u(rxt, rst) = u(rys, rst) = u(y,t).$$

Inversement, toute $A$-dérivation de $S^{-1}B$ se restreint à une $A$-dérivation de $B$. On a des bijections

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}B}(S^{-1}\Omega^1_{B/A}, M) \simeq \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M) \simeq \mathrm{Der}_A(B, M) \simeq \mathrm{Der}_A(S^{-1}B, M) \simeq \mathrm{Hom}_{S^{-1}B}(\Omega^1_{S^{-1}B/A}, M),$$

toutes naturelles en $M$, d'où le résultat suit. □

**Exemple 2.3.** Si $A$ et $B$ sont intègres, $K = \mathrm{Frac}(A)$ et $L = \mathrm{Frac}(B)$, on aura un isomorphisme

$$L \otimes_B \Omega^1_{B/A} \simeq \Omega^1_{L/A} = \Omega^1_{L/K}$$

de $L$-espace vectoriels. En effet, les notions de $A$-linéaires et de $K$-linéaires sont indifférenciables.

Les différentielles de Kähler comporte bien avec la somme directe.

**Proposition 2.4.** Soient $B$ et $B'$ des $A$-algèbres. On a un isomorphisme de $(B \oplus B')$-modules

$$\Omega^1_{B\oplus B'/A} \simeq \Omega^1_{B/A} \oplus \Omega^1_{B'/A}.$$

*Démonstration.* On vérifie sans peine que l'application

$$\delta : B \oplus B' \to \Omega^1_{B/A} \oplus \Omega^1_{B'/A}, \qquad (x, x') \mapsto (dx, dx')$$

est une $A$-dérivation. Soit $M$ un $(B \oplus B')$-module. Si $\Delta : B \oplus B' \to M$ est une $A$-dérivation, alors

$$\Delta \circ \iota : B \to M, \qquad \Delta \circ \iota' : B' \to M$$

sont des $A$-dérivations (où $\iota$ et $\iota'$ sont les injections canoniques). Soient $f \in \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M)$ et $f' \in \mathrm{Hom}_{B'}(\Omega^1_{B'/A}, M)$ les morphismes associés. Alors l'application

$$F : \Omega^1_{B/A} \oplus \Omega^1_{B'/A} \to M, \qquad (x, x') \mapsto f(x) + f'(x')$$

est $(B \oplus B')$-linéaire. En effet, soient $b, x_i, y_i \in B$ et $b', x'_j, y'_j \in B'$. On a

$$\begin{aligned}
F\left((b,b')\left(\sum_i x_i dy_i, \sum_j x'_j dy'_j\right)\right) &= F\left(\sum_i bx_i dy_i, \sum_j b'x'_j dy'_j\right) \\
&= f\left(\sum_i bx_i dy_i\right) + f'\left(\sum_j b'x'_j dy'_j\right) \\
&= \sum_i (bx_i, 0) f(dy_i) + \sum_j (0, b'x'_j) f(dy'_j) \\
&= \sum_i (bx_i, 0)\Delta(y_i, 0) + \sum_j (0, b'x'_j)\Delta(0, y'_j)
\end{aligned}$$

En particulier,

$$F\left(\sum_i x_i dy_i, \sum_j x'_j dy'_j\right) = \sum_i (x_i, 0)\Delta(y_i, 0) + \sum_j (0, x'_j)\Delta(0, y'_j). \tag{6}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} F\left((b,b')\left(\sum_i x_i dy_i, \sum_j x'_j dy'_j\right)\right) &= \sum_i (bx_i, 0)\Delta(y_i, 0) + \sum_j (0, b'x'_j)\Delta(0, y'_j) \\ &= \sum_i (b,b')(x_i, 0)\Delta(y_i, 0) + \sum_j (b,b')(0, x'_j)\Delta(0, y'_j) \\ &= (b,b')F\left(\sum_i x_i dy_i, \sum_j x'_j dy'_j\right). \end{aligned}$$

De plus, $F(\delta(x,x')) = F(dx, dx') = f(dx) + f'(dx') = \Delta(x,0) + \Delta(0,x') = \Delta(x,x')$ pour tout $(x,x') \in B \times B'$, i.e. $F \circ \delta = \Delta$. Finalement, si $G : \Omega^1_{B/A} \oplus \Omega^1_{B'/A} \to M$ est un morphisme de $(B \oplus B')$-modules vérifiant $G \circ \delta = \Delta$, il vérifira aussi (6), d'où $G = F$. Ainsi le $(B \oplus B')$-module $\Omega^1_{B/A} \oplus \Omega^1_{B'/A}$ et la dérivation $\delta$ vérifient la propriété universelle de $\Omega^1_{B\oplus B'/A}$. □

Les différentielles de Kähler linéarise le produit tensoriel. On a

**Proposition 2.5.** Soient $B$ et $B'$ des $A$-algèbres. On a un isomorphisme de $(B \otimes_A B')$-modules

$$\Omega^1_{B\otimes_A B'/A} \simeq \Omega^1_{B/A} \otimes_A B' \oplus B \otimes_A \Omega^1_{B'/A}.$$

*Démonstration.* Soit $M$ un $(B \otimes_A B')$-module. On va construire une bijection naturelle

$$\mathrm{Der}_A(B \otimes_A B', M) \to \mathrm{Der}_A(B, M) \times \mathrm{Der}_A(B', M). \tag{7}$$

Soit $\Delta \in \mathrm{Der}_A(B \otimes_A B', M)$, on définit alors des $A$-dérivations $D : B \to M$ et $D' : B' \to M$ par

$$\forall b \in B, \quad Db = \Delta(b \otimes 1), \qquad \forall b' \in B', \quad D'b' = \Delta(1 \otimes b').$$

Réciproquement, deux $A$-dérivations $D : B \to M$ et $D' : B' \to M$ nous donne une $A$-dérivation $\Delta : B \otimes_A B' \to M$ en posant

$$\forall (b,b') \in B \times B', \qquad \Delta(b \otimes b') = (b \otimes 1)Db + (1 \otimes b')D'b'.$$

On a donc la bijection (7), qui est a fortiori naturelle. Les bijections

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{B\otimes_A B'}(\Omega^1_{B\otimes_A B',/A}, M) &\simeq \mathrm{Der}_A(B \otimes_A B', M) \\ &\simeq \mathrm{Der}_A(B, M) \times \mathrm{Der}_A(B', M) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M) \times \mathrm{Hom}_{B'}(\Omega^1_{B'/A}, M) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{B\otimes_A B'}(\Omega^1_{B/A} \otimes_A B', M) \times \mathrm{Hom}_{B\otimes_A B'}(B \otimes_A \Omega^1_{B'/A}, M) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{B\otimes_A B'}(\Omega^1_{B/A} \otimes_A B' \oplus B \otimes_A \Omega^1_{B'/A}, M) \end{aligned}$$

sont naturelles. On en déduit le résultat. □

# 3 Deux suites exactes fondamentales

Les différentielles de Kähler se comportent bien sous le changement d'anneaux. On rappelle que les fonteurs Hom (co- et contravariant) sont exacts à gauche. On a aussi le résultat reciproque.

**Lemme 3.1.** Soit $N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3 \to 0$ une suite des morphismes de $A$-modules telle que pour tout $A$-module $M$, la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(N_3, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(N_2, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(N_1, M),$$

soit exacte. Alors la suite $N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3 \to 0$ est exacte.

*Démonstration.*

1. *Surjectivité de $g$* : Soient $M = \mathrm{Coker}\, g$ et $\pi : N_3 \to \mathrm{Coker}\, g$ la projection canonique. Comme $g^*\pi = \pi \circ g = 0$ et $g^*$ est injectif, on a $\pi = 0$. Puisque $\pi$ est surjective, on a $\mathrm{Coker}\, g = 0$, i.e. $g$ est surjectif.
2. $g \circ f = 0$ : Soit $M = N_3$, alors $g \circ f = f^* g^* \mathrm{id}_{N_3} = 0$.
3. $\mathrm{Ker}\, g \subseteq \mathrm{Im}\, f$ : Soient $M = \mathrm{Coker}\, f$ et $\pi : N_3 \to \mathrm{Coker}\, f$ la projection canonique. On a $f^*\pi = \pi \circ f = 0$, d'où $\pi = h \circ g$ pour un certain $h : N_3 \to M$. Soit $y \in \mathrm{Ker}\, g$, alors $\pi(y) = h(g(y)) = 0$, i.e. $y \in \mathrm{Im}\, f$.

□

**Proposition 3.2** (Première suite exacte fondamentale)**.** Soit $\iota : B \to C$ une $B$-algèbre commutative. On a une suite exacte de $C$-modules

$$C \otimes_B \Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{C/A} \to \Omega^1_{C/B} \to 0. \tag{8}$$

*Démonstration.* Soit $c \otimes db \mapsto cd\iota(b)$ la première flèche. De lemme 3.1, il suffit de montrer que pour tout $C$-module $M$, la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/B}, M) \to \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/A}, M) \to \mathrm{Hom}_C(C \otimes_B \Omega^1_{B/A}, M)$$

est exacte. Or $\mathrm{Hom}_C(C \otimes_B \Omega^1_{B/A}, M) \simeq \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M)$ de manière naturelle en $M$. Montrons que la suite

$$0 \to \mathrm{Der}_B(C, M) \to \mathrm{Der}_A(C, M) \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{Der}_A(B, M)$$

est exacte, où la flèche $\mathrm{Der}_B(C, M) \to \mathrm{Der}_A(C, M)$ est l'inclusion (qui est évidemment injective). Bien sûr, alors $\iota^* D = D \circ \iota = 0$ pour tout $D \in \mathrm{Der}_B(C, M)$. Reciproquement, si $D \in \mathrm{Der}_A(C, M)$ telle que $D \circ \iota = 0$, alors pour tout $b \in B$ et $c \in C$, on a

$$D(\iota(b)c) = \iota(b)Dc + cD(\iota(b)) = \iota(b)Dc,$$

i.e. $D$ est $B$-linéaire. La conclusion suit. □

La deuxième suite exacte fondamentale trait du quotient.

**Proposition 3.3** (Deuxième suite exacte fondamentale)**.** Soit $I$ un idéal de $B$ (en tant que $A$-algèbre). On a une suite exacte de $B/I$-modules

$$I/I^2 \to \Omega^1_{B/A}/I\Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{(B/I)/A} \to 0. \tag{9}$$

*Démonstration.* Pour tous $x, y \in I$, on a $d(xy) = xdy + ydx \in I\Omega^1_{B/A}$, d'où $d(I^2) \subseteq I\Omega^1_{B/A}$. Ainsi la première flèche est évidente, on l'appelle $\alpha$. Concrètement, $\alpha([x]) = [dx]$ pour $x \in I$.

Soit $\pi : B \to B/I$ la projection canonique. La $A$-dérivation $d \circ \pi : B \to \Omega^1_{(B/I)/A}$ induit un morphisme de $B$-modules $\Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{(B/I)/A}$ qui s'annule sur $I\Omega^1_{B/A}$. Ce morphisme induit la deuxième flèche, qu'on appelle $\beta$. Pour préciser, $\beta([dx]) = d\pi(x)$ pour tout $x \in B$. Il suffit de montrer que la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_{B/I}(\Omega^1_{(B/I)/A}, M) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_{B/I}(\Omega^1_{B/A}/I\Omega^1_{B/A}, M) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_{B/I}(I/I^2, M)$$

est exacte pour tout $B/I$-module $M$.

1. *Injectivité de* $\beta^*$. Soit $f \in \mathrm{Hom}_{B/I}(\Omega^1_{(B/I)/A}, M)$ tel que $f \circ \beta = 0$ : Pour tout $d \in x$, on a $f(d\pi(x)) = f(\beta[dx]) = 0$, d'où $f = 0$.
2. $\alpha^* \circ \beta^* = 0$ : En effet $\beta \circ \alpha = 0$ car si $x \in I$, $\beta(\alpha([x])) = \beta([dx]) = d\pi(x) = 0$.
3. $\mathrm{Ker}\,\alpha^* \subseteq \mathrm{Im}\,\beta^*$ : Soit $f \in \mathrm{Hom}_{B/I}(\Omega^1_{B/A}/I\Omega^1_{B/A}, M)$ tel que $f \circ \alpha = 0$. Soit $p : \Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{B/A}/I\Omega^1_{B/A}$ la projection canonique. Alors $f \circ p \circ d : B \to M$ est une $A$-dérivation. On a

$$\forall x \in I, \qquad f(p(dx))) = f([dx]) = f(\alpha([x])) = 0,$$

donc $f \circ p \circ d$ se factorise par $\pi$. Le morphisme induit est une $A$-dérivation de $B/I$ à valeurs dans $M$. Soit $\tilde{f} : \Omega^1_{(B/I)/A} \to M$ le morphisme de $B/I$-module qu'il induit, i.e. $\tilde{f} \circ d \circ \pi = f \circ p \circ d$. Il reste de montrer que $\tilde{f} \circ \beta = f$. En effet, pour $x \in B$,

$$\tilde{f}(\beta([dx])) = \tilde{f}(d\pi(x)) = f(p(dx)) = f([dx]).$$

Ainsi $f = \tilde{f} \circ \beta \in \mathrm{Im}\,\beta^*$.

De Lemme 3.1, on conclut. □

**Remarque.** On peut remplaçer $\Omega^1_{B/A}/I\Omega^1_{B/A}$ dans (9) par $(B/I) \otimes_B \Omega^1_{B/A}$.

**Corollaire 3.4.** Soient $B = A[x_i]_{i\in\mathcal{I}}$, $I$ un idéal de $B$ et $C = B/I$. Alors

$$\Omega^1_{C/A} \simeq \frac{\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} C dx_i}{d(I)}.$$

*Démonstration.* On se sert de la suite exacte (9)

$$I/I^2 \xrightarrow{\alpha} C \otimes_B \Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{C/A} \to 0.$$

On a $\Omega^1_{B/A} = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} B dx_i$ (Corolllaire 1.8). Ainsi $C \otimes_B \Omega^1_{B/A} \simeq \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} C \otimes_B B dx_i \simeq \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} C dx_i$. De plus, l'image de $\alpha$ est exactement $d(I)$. □

**Corollaire 3.5.** Soit $k$ un corps et $A$ une $k$-algèbre. Si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de $A$ dont le corps résiduel est isomorphe à $k$, on a un isomorphisme de $k$-espaces vectoriels

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq k \otimes_A \Omega^1_{A/k}.$$

*Démonstration.* On se sert de la suite exacte (9)

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to k \otimes_A \Omega^1_{A/k} \to \Omega^1_{k/k} \to 0.$$

Or $\Omega^1_{k/k} = 0$ car pour tout $k$-espace vectoriel $M$, la seule $k$-dérivation $k \to M$ est 0. Il suffit de montrer que la flèche $\alpha : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to k \otimes_A \Omega^1_{A/k}$ est injective, i.e. $\alpha^\vee : (k \otimes_A \Omega^1_{A/k})^\vee \to (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^\vee$ est surjective. En effet, la suite exacte de $k$-algèbres $0 \to \mathfrak{m} \to A \to A/\mathfrak{m} \to 0$ est scindée, donc $A = k \oplus \mathfrak{m}$ en tant que $k$-espace vectoriels. Considérons alors une application $k$-linéaire $f : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to k$. On définit

$$D_f : A \to k, \qquad x = u + m \mapsto f([m]), \qquad u \in k, m \in \mathfrak{m}$$

qui est une $k$-dérivation, car si $x = u + m$ et $y = v + n$ avec $u, v \in k$ et $m, n \in \mathfrak{m}$, alors

$$D_f(xy) = f([un+vm+mn]) = f([un+vm]) = uf([n])+vf([m]) = uD_f y+vD_f x = x\cdot D_f y+y\cdot D_f x.$$

Soit $F : k \otimes_A \Omega^1_{A/k} \to k$ associée à $D_f$ par la bijection $(k \otimes_A \Omega^1_{A/k})^\vee \simeq \mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/k}, k) \simeq \mathrm{Der}_k(A, k)$, i.e. $F(u \otimes dx) = uD_f x$ pour $u \in k$ et $x \in A$. Pour $m \in \mathfrak{m}$, on a

$$F(\alpha([m])) = F(1 \otimes dm) = D_f m = f([m]).$$

Ainsi, $\alpha^\vee(F) = f$, d'où la surjectivité de $\alpha^\vee$. □

**Exemple 3.6.** Soient $k$ un corps et $V$ un ensemble algébrique dans $k^n$. Soit $p \in V$ et $\mathcal{O}_P$ l'anneau local de $V$ en $P$. Son unique idéal maximal $\mathfrak{m}_P$ est constituté des fonctions annulant en $P$, qui est de corps résiduel $k$. L'espace $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ est appelé *espace cotangent de Zariski* de $V$ en $P$. On peut voit donc $\Omega^1_{\mathcal{O}_P/k}$ comme l'espace des formes linéaires sur l'espace tangent en $P$.

# 4 Le complexe de de Rham

On peut maintenant définir les différentielles de Kähler de degré supérieur. Soit $n \in \mathbb{N}$

**Définition 4.1.** On appelle $\Omega^n_{B/A} := \bigwedge^n_B(\Omega^1_{B/A})$ *module des différentielles de Kähler de degré $n$.*

En particulier, $\Omega^0_{B/A} = B$. On voit facilement que $\Omega^n_{B/A}$ est engendré (en tant que $B$-module) par les éléments de la forme $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, $x_1, \ldots, x_n \in B$. On veut construire les « différientielles extérieures » $d^n : \Omega^n_{B/A} \to \Omega^{n+1}_{B/A}$ pour $n \in \mathbb{N}$, qui vérifient les propriétés suivantes.

1. Les $d^n$ sont $A$-linéaires.
2. $d^{n+1} \circ d^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $d^0 = d$.
4. $d^{n+m}(\alpha \wedge \beta) = d^n\alpha \wedge \beta + (-1)^n \alpha \wedge d^m\beta$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \Omega^n_{B/A} \times \Omega^m_{B/A}$.

Commençons par le cas où $n = 1$. .L'application $A$-bilinéaire

$$B \times B \to \Omega^2_{B/A}, \qquad (x, y) \mapsto dx \wedge dy$$

induit un morphisme de $A$-modules

$$U : I_{B/A} \to \Omega^2_{B/A}, \qquad \sum_i x_i \otimes y_i \mapsto \sum_i dx_i \wedge dy_i$$

qui s'annule sur $I^2_{B/A}$. En effet, si $\sum_i x_i \otimes y_i$ et $\sum_j x'_j \otimes y'_j$ sont dans $I_{B/A}$, alors

$$\begin{aligned} U\left(\left(\sum_i x_i \otimes y_i\right)\left(\sum_j x'_j \otimes y'_j\right)\right) &= U\left(\sum_{i,j} d(x_i x'_j) \wedge d(y_i y'_j)\right) \\ &= \sum_{i,j} (x_i dx'_j + x'_j dx_i) \wedge (y_i dy'_j + y'_j dy_i) \\ &= \sum_{i,j} (x_i y_i dx'_j \wedge dy'_j + x'_j y'_j dx_i \wedge dy_i) \\ &+ \sum_{i,j} (y_i dx_i \wedge x'_j dy'_j + y'_j dx'_j \wedge x_i dy_i). \end{aligned}$$

Comme $\sum_i x_i y_i = 0$, on a $\sum_i x_i dy_i + \sum_i y_i dx_i = \sum_i d(x_i y_i) = 0$, i.e.

$$\sum_i y_i dx_i = -\sum_i x_i dy_i,$$

et de même $\sum_j y'_j dx'_j = -\sum_j x'_j dy'_j$. Il suit que

$$\sum_{i,j}(x_i y_i dx'_j \wedge dy'_j + x'_j y'_j dx_i \wedge dy_i) = \sum_i x_i y_i \sum_j dx'_j \wedge dy'_j + \sum_j x'_j y'_j \sum_i dx_i \wedge dy_i = 0$$

et que

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}(y_i dx_i \wedge x'_j dy'_j + y'_j dx'_j \wedge x_i dy_i) &= \left(\sum_i y_i dx_i\right) \wedge \left(\sum_j x'_j dy'_j\right) + \left(\sum_j y'_j dx'_j\right) \wedge \left(\sum_i x_i dy_i\right) \\ &= -\left(\sum_i x_i dy_i\right) \wedge \left(\sum_j x'_j dy'_j\right) - \left(\sum_j x'_j dy'_j\right) \wedge \left(\sum_i x_i dy_i\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $U$ induit un morphisme de $A$-modules $d^1 : \Omega^1_{B/A} \to \Omega^2_{B/A}$, $xdy \mapsto dx \wedge dy$. Montrons que $d^0 := d$ et $d^1$ vérifient les propriétés 2. et 4. En effet, pour $x \in B$, on a

$$d^1 d^0 x = d^1 dx = d1 \wedge dx = 0.$$

Quand $n = m = 0$, la propritété 4. devient la loi de Leibniz. Considérons le cas où $n = 1$ et $m = 0$. On peut supposer que $\alpha = xdy$ et $\beta = z$ avec $x, y, z \in B$. Alors

$$d^1(xdy \wedge z) = d^1(xzdy) = d(xz) \wedge dy = zdx \wedge dy + xdz \wedge dy = d(xdy) \wedge z - xdy \wedge dz,$$

i.e. $d^1(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta$ comme voulu. Dans le cas où $n = 0$ et $m = 1$, on peut simplement changer les rôles de $\alpha$ et de $\beta$.

**Théorème 4.2.** Il existe une unique famille $(d^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des flèches, où $d^n : \Omega^n_{B/A} \to \Omega^{n+1}_{B/A}$ vérifiant les propriétés 1., 2., 3. et 4.

*Démonstration. Unicité.* On considère un élément de la forme $xdx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ où $x, x_1, \ldots, x_n \in B$. On peut montrer par récurrence sur $n$ que

$$d^n(xdx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = dx \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Comme ces éléments engrendrent $\Omega^n_{B/A}$ (en tant que groupe abélien), on obtient l'unicité de $d^n$.
*Existence.* On a construit $d^0$ et $d^1$ ci-dessus. Soit $\Omega_{B/A} := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Omega^n_{B/A} = \bigwedge_B \Omega^1_{B/A}$ la $B$-algèbre extérieure sur $\Omega^1_{B/A}$. Malheureusement, le morphisme $d^1 : \Omega^1_{B/A} \to \Omega^2_{B/A} \hookrightarrow \Omega_{B/A}$ n'est pas $B$-linéaire. L'idée est de contruire une structure de $B$-algèbre *anti-commutative graduée* sur $\Omega_{B/A} \oplus \Omega_{B/A}$. On le munit tout d'abord une structure de $A$-algèbre en posant

$$\forall \alpha \in \Omega^n_{B/A}, \beta \in \Omega^m_{B/A}, \alpha', \beta' \in \Omega_{B/A}, \qquad (\alpha, \alpha')(\beta, \beta') := (\alpha \wedge \beta, \alpha' \wedge \beta + (-1)^n \beta' \wedge \alpha),$$

puis étendant à $\Omega_{B/A} \oplus \Omega_{B/A}$ tout entier par linéarité. En particulier, l'unité de cette multiplication est $(1, 0)$. Le morphisme d'anneaux

$$h^0 : B \to \Omega_{B/A} \oplus \Omega_{B/A}, \qquad x \mapsto (x, dx)$$

donne $\Omega_{B/A} \oplus \Omega_{B/A}$ une structure de $B$-algèbre. On définit

$$h^1 : \Omega^1_{B/A} \to \Omega_{B/A} \oplus \Omega_{B/A}, \qquad \omega \mapsto (\omega, d^1\omega).$$

Affirmons que $h^1$ est $B$-linéaire. En effet, pour $x \in B$ et $\omega \in \Omega^1_{B/A}$, par la propriété 4.

$$h^1(x\omega) = (x\omega, d^1(x\omega)) = (x\omega, dx \wedge \omega + xd^1\omega) = (x, dx)(\omega, d^1\omega) = h^0(x)h^1(\omega).$$

Ainsi, il existe une morphisme de $B$-algèbres $h^\bullet : \Omega_{B/A} \to \Omega_{B/A} \oplus \Omega_{B/A}$ dont la restriction sur $\Omega^1_{B/A}$ est $h^1$. On vérifie sans peine que $h^\bullet$ est une section de la projection sur la première coordonée. Soit $d^\bullet$ la composée de $h^\bullet$ et la projection sur la deuxième coordonnée. Autrement dit,

$$\forall \omega \in \Omega_{B/A}, \qquad h^\bullet(\omega) = (\omega, d^\bullet\omega).$$

Alors $d^\bullet$ est $A$-linéaire. En particulier, $d^\bullet|_B = d^0$ et $d^\bullet|_{\Omega^1_{B/A}} = d^1$. Montrons que $d^\bullet(\Omega^n_{B/A}) \subseteq \Omega^{n+1}_{B/A}$ par récurrence sur $n$. Les cas où $n = 0$ et $n = 1$ sont déjà traités. Soit donc $n \geqslant 2$. Tout élément de $\Omega^n_{B/A}$ et une somme finie d'éléments de la forme $\alpha \wedge \beta$, où $\alpha \in \Omega^1_{B/A}$ et $\beta \in \Omega^{n-1}_{B/A}$. On a

$$(\alpha \wedge \beta, d^\bullet(\alpha \wedge \beta)) = h^\bullet(\alpha \wedge \beta) = h^\bullet(\alpha)h^\bullet(\beta) = (\alpha, d^1\alpha)(\beta, d^\bullet\beta) = (\alpha \wedge \beta, d^1\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d^\bullet\beta).$$

Comme $d^\bullet\beta \in \Omega^n_{B/A}$ (l'hyphothèse de récurrence) et $d^1\alpha \in \Omega^2_{B/A}$, il suit que

$$d^\bullet(\alpha \wedge \beta) = d^1\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d^\bullet\beta \in \Omega^{n+1}_{B/A}.$$

On peut définir ainsi $d^n := d^\bullet|_{\Omega^n_{B/A}} : \Omega^n_{B/A} \to \Omega^{n+1}_{B/A}$.
Montrons la propriété 4. En effet, pour $\alpha \in \Omega^n_{B/A}$ et $\beta \in \Omega^m_{B/A}$

$$(\alpha\wedge\beta, d^{n+m}(\alpha\wedge\beta)) = h^\bullet(\alpha\wedge\beta) = h^\bullet(\alpha)h^\bullet(\beta) = (\alpha, d^n\alpha)(\beta, d^m\beta) = (\alpha\wedge\beta, d^n\alpha\wedge\beta+(-1)^n\alpha\wedge d^m\beta),$$

d'où la propriété 4. vient. Montrons finalement la propriété 2. par récurrence sur $n$. Le cas où $n = 0$ est traité. Soit $n \geqslant 1$ et $\omega = \alpha \wedge \beta$ avec $\alpha \in \Omega^1_{B/A}$ et $\Omega^{n-1}_{B/A}$. Alors

$$\begin{aligned} d^{n+1}d^n(\alpha \wedge \beta) &= d^{n+1}(d^1\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d^{n-1}\beta) \\ &= d^2d^1\alpha \wedge \beta + d^1\alpha \wedge d^{n-1}\beta - d^1\alpha \wedge d^{n-1}\beta + \alpha \wedge d^nd^{n-1}\beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

par l'hypothèse de récurrence. □

**Définition 4.3.** 1. Éléments de $\Omega^n_{B/A}$ s'appelent *$n$-formes différentielles de Kähler* de $B/A$.

2. Une $n$-forme $\alpha$ est dite *fermée* si $d^n\alpha = 0$.
3. Une $n$-forme $\alpha$ est dite *exacte* s'il existe une $(n-1)$-forme $\beta$ telle que $\alpha = d^{n-1}\beta$.
4. Le *complexe de de Rham algébrique* de $B/A$ est le complexe de cochaînes

$$0 \to B \xrightarrow{d^0} \Omega^1_{B/A} \xrightarrow{d^1} \Omega^2_{B/A} \xrightarrow{d^2} \cdots .$$

5. Le *$n$-ième groupe de cohomologie de de Rham* de $B/A$ est $\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(B/A) := \operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}$.

**Remarque.** On notera simplement $d$ pour $d^n$. Si $\alpha$ et $\beta$ sont deux formes fermées, la propriété 4. assure que $\alpha \wedge \beta$ l'est. Si $\beta$ est exacte, dit $\beta = d\gamma$ et $\alpha \in \Omega^n_{B/A}$ est fermée, alors

$$d(\alpha \wedge \gamma) = d\alpha \wedge \gamma + (-1)^n \alpha \wedge d\gamma = (-1)^n \alpha \wedge \beta$$

d'où $a \wedge \beta$ est exacte. Ainsi, le produit extérieur $\wedge$ induit une structure de $B$-algèbre anti-commutative graduée sur $\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(B/A) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(B/A)$.

**Remarque.** Soient $B$ et $B'$ deux $A$-algèbres. L'isomorphisme dans la Proposition 2.5 nous donne un isomorphisme de $(B \otimes_A B')$-algèbres

$$\Omega_{B\otimes_A B'/A} = \bigwedge_{B\otimes_A B'} (\Omega^1_{(B\otimes_A B')/A}) \simeq \bigwedge_{B\otimes_A B'} (\Omega^1_{B/A} \otimes_A B' \oplus B \otimes_A \Omega^1_{B'/A}) = \Omega_{B/A} \otimes_A \Omega_{B'/A}. \tag{10}$$

Si $A = k$ est un corps, la formule de Künneth assure que

$$\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}((B \otimes_k B')/k) = \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(B/k) \otimes_k \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}(B'/k) \tag{11}$$

en tant que $k$-espace vectoriels.

**Exemple 4.4.** Soit $B = A[x_i]_{i\in\mathcal{I}}$. De Corollaire 1.8, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Omega^n_{B/A}$ est un $B$-module libre à base $\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}\}$, indexée par les sous-ensembles $\{i_1, \ldots, i_n\}$ de $J$ de cardinal $n$. La différentielle d'une $n$-forme $\omega = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$ (où $f \in B$) est

$$d\omega = df \wedge \cdots \wedge dx_{i_n},$$

où $df = \sum_{i\in\mathcal{I}} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. En particulier, si $|\mathcal{I}| = p$, $\Omega^n_{B/A}$ est de rang $\binom{p}{n}$. Sous les conditions appropriées, on a le résultat familier suivant.

**Théorème 4.5** (Lemme de Poincaré algébrique)**.** Soit $k$ un corps de caractéristique nulle. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $A := k[x_1, \ldots, x_p]$. Les groupes de cohomologie de de Rham de $A/k$ sont nuls, sauf le 0-ième groupe qui vaut $k$.

*Démonstration.* De (11), il suffit de traiter le cas où $A = k[x]$. On a $\Omega^1_{A/k} = Adx$ et $\Omega^n_{A/k} = 0$ pour $n \geqslant 2$ (donc $\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(A/k) = 0$ si $n \geqslant 2$). Toute 1-forme $f dx$ est exacte, car tout polynôme à coefficients dans un corps de caractéristique nulle a un primitive, d'où $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/k) = 0$. Finalement, une 0-forme $f \in A$ est fermée si et seuelemnt si $f \in k$. Donc $\mathrm{H}^0_{\mathrm{dR}}(A/k) = k$. □

**Exemple 4.6.** Soient $k$ un corps de caractéristique nulle et $A = k[x, x^{-1}]$, l'anneau de polynômes de Laurent. Par la Proposition 2.2, $\Omega^1_{A/k} = Adx$. De plus $\Omega^n_{A/k} = 0$ pour $n \geqslant 2$ (les puissances extérieures commutent avec localisation). On voit facilement que $\mathrm{H}^0_{\mathrm{dR}}(A/k) = k$. Calculons $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/k)$. En effet, un polynôme de Laurent $f = \sum_{i=-n}^m a_i x^i \in A$ admet un primitive si et seulement si $a_{-1} = 0$. On conclut que

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{dR}}(A/k) = k, \qquad \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/k) = k\frac{dx}{x}, \qquad \mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(A/k) = 0 \text{ pour } n \geqslant 2.$$

Avec le même argument, si la cactéristique de $k$ est $p > 0$, on aura

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{dR}}(A/k) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} kx^{ip}, \qquad \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/k) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} kx^{ip-1}dx, \qquad \mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(A/k) = 0 \text{ pour } n \geqslant 2.$$

# Références


[1] L. Illusie, *Topics in Algebraic Geometry* (http://staff.ustc.edu.cn/∼ yiouyang/Illusie.pdf).

[2] N. Bourbaki, *Algebra I. Chapters 1-3*. Elements of Mathematics, Springer, 1998.

[3] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie*. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 32, p.5-361, 1967.

[4] R. Hartshorne, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 45, p.5-99, 1975.