Examen du 12 novembre 2018
2 heures

Les documents et les appareils électroniques ne sont pas autorisés.
A titre indicatif, nous donnons un barême approximatif :
Exercice 1 : 4 points, Exercice 2 : 10 points, Problème : 26 points.

Exercice 1.
Soit A un anneau commutatif. En utilisant un procédé de localisation, montrer que l'ensemble

$$\mathrm{rad}(0) = \{x \in A | \exists n \geq 0, x^n = 0\}$$

des éléments nilpotents de A est égal à l'intersection des idéaux premiers de A.

Exercice 2.
Soit $A = H(\mathbb{C})$ l'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$. Nous rappelons que les zéros d'une fonction holomorphe non nulle sont isolés et qu'une fonction nulle sur le disque unité est nulle sur $\mathbb{C}$ (par prolongement analytique). Enfin toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ admet une primitive holomorphe sur $\mathbb{C}$.
1. Montrer que A est un anneau intègre.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, nous notons I_k l'idéal de A des fonctions holomorphes qui s'annulent sur $\mathbb{N} - \{0, \ldots, k\}$.
2.a Montrer que $f_k(z) = \frac{\sin(\pi z)}{z(z-1)\cdots(z-k)} \in I_k$.
2.b En déduire que A n'est pas noethérien.
3. Montrer que $f \in A$ est inversible si et seulement si il existe $g \in A$ avec $f = \exp(g)$.
4. Montrer que les éléments irréductibles de A sont les fonctions admettant un unique zéro simple.
5. En déduire que A n'est pas factoriel.

Problème
Dans ce problème, A désigne un anneau commutatif unitaire.

Partie A. Lemme de Fitting
Un A-module M est dit artinien si toute suite décroissante de sous-modules est stationnaire.
1. Montrer qu'un A-module est artinien si et seulement si tout ensemble non vide de sous-modules de M possède un élément minimal pour l'inclusion.
2. Soit N un sous-module d'un A-module M.
2.a Soient L et L' des sous-M-modules tels que

$$L \subset L', \;\; L \cap N = L' \cap N \text{ et } (L+N)/N = (L'+N)/N.$$

Montrer que $L = L'$.
2.b Montrer que M est artinien si et seulement si N et M/N sont artiniens.
3. Soit M un A-module artinien et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que M^n est artinien.
4. Montrer que le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ est noethérien mais pas artinien.
5. Soit p un nombre premier. Montrer que le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ est artinien mais pas noethérien.
6. Dans cette question, M désigne un A-module artinien et noethérien et $f \in \mathrm{Hom}_A(M, M)$ un endomorphisme de M.
6.a Montrer que les suites de sous-modules $(\ker f^m)_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\mathrm{im} f^m)_{m \in \mathbb{N}}$ sont stationnaires à partir d'un rang que nous notons n.

6.b Montrer que $M = \ker f^n \oplus \mathrm{im} f^n$.
6.c Montrer que la restriction de f à $\ker f^n$ est nilpotente et que la restriction de f à $\mathrm{im} f^n$ est un automorphisme.

Partie B. Théorème de Krull-Schmidt
Un A-module M est dit indécomposable si $M \neq \{0\}$ et s'il n'existe pas de décomposition de M en somme directe $M' \oplus M''$ de deux sous-modules non nuls.
Un A-module $M \neq \{0\}$ est dit simple s'il n'admet pas de sous-modules distincts de $\{0\}$ et M.
1.a Soit K un corps. A quelle condition un K-espace vectoriel est un K-module simple ?
1.b Quels sont les $\mathbb{Z}$-modules simples ?
1.c A quelle condition un idéal de A est un A-module simple ?
1.d Montrer qu'un module simple est indécomposable.
2.a Quels sont les $\mathbb{Z}$-modules de type fini indécomposables ?
2.b L'anneau $\mathbb{Z}$ admet-il des sous-modules simples ?
2.c Un module indécomposable est-il toujours simple ?
3.a Soit M un A-module artinien. Montrer que M s'écrit comme somme directe finie $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$ de sous-modules indécomposables.
3.b Soit M un A-module noethérien. Montrer que M s'écrit comme somme directe finie

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$$

de sous-modules indécomposables.
4. Soit M un module indécomposable artinien et noethérien et $B = \mathrm{End}_A(M)$ l'anneau (non commutatif) de ses endomorphismes. Nous notons B^* le sous-ensemble des automorphismes de B. Soit $J = B - B^*$.
4.a. Montrer que J est stable par multiplication à droite et à gauche par des éléments de B.
4.b Montrer que J est un sous-groupe de B.
Un sous-groupe de B stable par multiplication à droite et à gauche est dit idéal bilatère. L'anneau B est dit local s'il admet un unique idéal bilatère maximal pour l'inclusion.
4.c En déduire que B est un anneau local.
5.a Montrer qu'un A-module M dont l'anneau des endomorphismes $B = \mathrm{End}_A(M)$ est local, est indécomposable.
5.b En déduire qu'un A-module M artinien et noethérien est indécomposable si et seulement si $\mathrm{End}_A(M)$ est local.
6. Soient $M, M', N_1, N_2, \ldots, N_n$ des A-modules. Nous supposons les N_i indécomposables, $\mathrm{End}_A(M)$ local et

$$M \oplus M' \simeq N_1 \oplus \cdots \oplus N_n.$$

Montrer qu'il existe $s \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $M \simeq N_s$ et $M' \simeq \oplus_{t \neq s} N_t$.
7. Soient $(M_1, \ldots, M_m)$ et $(N_1, \ldots, N_n)$ deux familles finies de modules indécomposables. Nous supposons que les anneaux $\mathrm{End}_A(M_i)$ sont locaux et qu'il existe un isomorphisme

$$M_1 \oplus \cdots \oplus M_m \simeq N_1 \oplus \cdots \oplus N_n.$$

7.a Montrer que $m = n$ et qu'il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ telle que $M_{\sigma(i)} = N_i$.
7.b Soit M un A-module artinien et noethérien. Montrer qu'il existe une unique décomposition (à l'ordre près et à isomorphisme des modules près) en somme directe finie de sous-modules indécomposables.

Test November 12th 2018
2 hours

Documents and electronic devices are not allowed.
For information purpose, we give an approximative scoring method
Exercise 1 : 4 points, Exercise 2 : 10 points, Problem : 26 points.

Exercise 1.
Let A be a commutative ring. Using a localization process, prove that the set

$$\mathrm{rad}(0) = \{x \in A | \exists n \geq 0, x^n = 0\}$$

of nilpotent elements of de A is equal to the intersection of prime ideals of A.

Exercise 2.
Let $A = H(\mathbb{C})$ be the ring of holomorphic function on $\mathbb{C}$. We remind that the zeros of a non zero holomorphic function are isolated and that a zero function on the unit disc is zero on $\mathbb{C}$ (by analytic continuation). Moreover any homolomorphic function admits an holomorphic primitive over $\mathbb{C}$.
1. Prove that A is an integral domain.
2. For $k \in \mathbb{N}$, let I_k denote the ideal of A given by the functions vanishing on $\mathbb{N} - \{0, \ldots, k\}$.
2.a Prove that $f_k(z) = \frac{\sin(\pi z)}{z(z-1)\cdots(z-k)} \in I_k$.
2.b Deduce that A in not noetherian.
3. Prove that $f \in A$ is invertible if and only if there exists $g \in A$ with $f = \exp(g)$.
4. Prove that the irreducible elements of A are fonctions admitting an unique simple zero.
5. Deduce that A is not an unique factorization domain.

Problem
In this problem, A is an unitary commutative ring.

Part A. Fitting's Lemma
An A-module M is said to be artinian if any decrasing sequence of submodules stabilizes.
1. Prove that a A-module is artinian if and only if any non empty set of submodules of M admits a minimal element for the inclusion.
2. Let N be a submodule of a A-module M.
2.a Let L and L' be submodules of M such that

$$L \subset L', \;\; L \cap N = L' \cap N \text{ and } (L+N)/N = (L'+N)/N.$$

Prove that $L = L'$.
2.b Prove that M is artinian if and only if N and M/N are artinian.
3. Let M be an artinian A-module and $n \in \mathbb{N}$. Prove that M^n is artinian.
4. Prove that the $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ is noetherian but not artinian.
5. Let p be a prime number. Prove that the $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ is artinian but not noetherian.
6. In this question, M is an artinian and noetherian A-module and $f \in \mathrm{Hom}_A(M, M)$ is an endomorphism of M.
6.a Prove that the sequences of submodules $(\ker f^m)_{m\in\mathbb{N}}$ and $(\mathrm{im} f^m)_{m\in\mathbb{N}}$ stabilize for $m \geq n$.
6.b Prove that $M = \ker f^n \oplus \mathrm{im} f^n$.
6.c Prove that the restriction of f to $\ker f^n$ is nilpotent and that the restriction of f to $\mathrm{im} f^n$ is an

automorphism.

Part B. Krull-Schmidt's Theorem

An A-module M is said to be indecomposable if $M \neq \{0\}$ and decomposition of M as a direct sum $M' \oplus M''$ of two non zero submodules does not exist.

An A-module $M \neq \{0\}$ is said to be simple if it does not admit any submodules distinct from $\{0\}$ and M.

1.a Let K be a field. When a K-vector space is a simple K-module?

1.b Which are the simple $\mathbb{Z}$-modules?

1.c When a ideal of A is a simple A-module?

1.d Prove that a simple module is indecomposable.

2.a Which are the finite type indecomposable $\mathbb{Z}$-modules?

2.b Does the ring $\mathbb{Z}$ admit simple submodules?

2.c Is an indecomposable module always simple ?

3.a Let M be an artinian A-module. Prove that M can be written as a finite direct sum $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$ of indecomposable submodules.

3.b Let M be a noetherian A-module. Prove that M can be written as a finite direct sum

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$$

of indecomposable submodules.

4. Let M be an indecomposable artinian and noetherian module and $B = \mathrm{End}_A(M)$ the (non commutative) ring of its endomorphisms. We denote B^* the subset of automorphisms of B. Let $J = B - B^*$.

4.a. Prove that J is stable by multiplication to the right and to the left by elements of B.

4.b Prove that J is a subgroup of B.

A subgroup of B stable by multiplication to the right and to the left is said to be a two-sided ideal. The ring B is said to be local if it admits an unique two-sided ideal maximal for inclusion.

4.c Deduce that B is a local ring.

5.a Prove that a A-module M with a local $B = \mathrm{End}_A(M)$ endomorphisms ring, is indecomposable.

5.b Deduce that an artinian and noetherian A-module M is indecomposable if and only if $\mathrm{End}_A(M)$ is local.

6. Let $M, M', N_1, N_2, \ldots, N_n$ be A-modules. We assume that the N_i's are indecomposable, $\mathrm{End}_A(M)$ is local and

$$M \oplus M' \simeq N_1 \oplus \cdots \oplus N_n.$$

Prove that there exists $s \in \{1, \ldots, n\}$ such that $M \simeq N_s$ and $M' \simeq \oplus_{t \neq s} N_t$.

7. Let $(M_1, \ldots, M_m)$ and $(N_1, \ldots, N_n)$ be two finite families of indecomposable modules. We assume that the ring $\mathrm{End}_A(M_i)$ are local and there exists an isomorphism

$$M_1 \oplus \cdots \oplus M_m \simeq N_1 \oplus \cdots \oplus N_n.$$

7.a Prove that $m = n$ and there exists a permutation σ of the set $\{1, \ldots, n\}$ such that $M_{\sigma(i)} = N_i$.

7.b Let M be an artinian and noetherian A-module. Prove that there exists an unique decomposition (up to order and up to isomorphisms of the modules) as a finite direct sum of indecomposable submodules.

Correction succincte

Exercice 1.
Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A et $x \in \mathrm{rad}(A)$. Ainsi il existe $n \geq 0$ tel que $x^n = 0 \in \mathfrak{p}$ donc $x \in \mathfrak{p}$. Réciproquement, supposons que $x \in A$ n'est pas nilpotent. Alors

$$S = \{1, x, x^2, \cdots\}$$

est un ensemble multiplicatif. Soit I un idéal maximal de l'anneau localisé $S^{-1}A$. Alors $\mathfrak{p} = A \cap I$ est un idéal premier de A, d'intersection vide avec S donc qui ne contient pas x.

Exercice 2.
1. Soient $f, g \in A$ avec $fg = 0$. Par conséquent dans le disque fermée, donc compact $\bar{B}(0,1)$, f ou g (disons f) admet une infinité de zéros. Donc $f = 0$ sur $\bar{B}(0,1)$ et donc nulle sur $\mathbb{C}$ par prolongement analytique. Donc A est intégre.
2.a Nous avons $f_k \in I_k - I_{k-1}$.
2.b La suite strictement croissante (I_k) n'est pas stationnaire dont A n'est pas noethérien.
3. Si $f \in A^*$, alors il existe $g \in A^*$ telle que $fg = 1$, donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Réciproquement si $f \in A$ n'admet pas de zéro sur $\mathbb{C}$, alors $g = 1/f \in A^*$. Ainsi A^* est l'ensemble des éléments qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{C}$.
Si $f = \exp(g)$ alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$ et $f \in A^*$. Réciproquement si $f \in A^*$, soit g une primitive holomorphe de f'/f sur $\mathbb{C}$. Ainsi $f/\exp(g) = a \in \mathbb{C}^*$ est constante sur $\mathbb{C}$ et $f = a\exp(g)$. Soit $b \in C$ avec $a = \exp(b)$, on a $f = \exp(g + b)$.
4. Soit $f \in A$ admettant un unique zéro simple z_0 et $f = gh$ avec $g \notin A^*$. Alors g et h ne s'annulent pas sur $\mathbb{C} - \{z_0\}$ et $g \notin A^*$ s'annule en z_0. Donc h ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$ et $h \in A^*$ donc f est irréductible.
Si $f \in A$ possédent au moins deux zéros z_1, z_2 comptés avec multiplicité alors $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} \in A$ et $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)g(z)$ n'est pas irréductible.
5. La fonction $f(z) = \sin(\pi z)$ a une infinité de zéros donc n'est pas produit fini d'éléments irréductibles de A. Donc A n'est pas factoriel.

Problème
Partie A.
1. Supposons qu'il existe un ensemble non vide $\mathcal{N}$ de sous-modules de M qui ne possède pas d'éléments minimal pour l'inclusion. Alors nous pouvons construire une suite strictement décroissante d'éléments de $\mathcal{N}$. Donc M n'est pas artinien.
Réciproquement, soit $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de sous-modules de M. L'ensemble $\mathcal{N} = \{N_n, n \in \mathbb{N}\}$ est non vide donc admet un élément minimal N_m. Comme la suite (N_n) est décroissante, elle est stationnaire pour $n \geq m$. Donc M est artinien.
2.a Soit $x \in L'$. Alors il existe $y \in L$ et $n \in N$ avec $x = y + n$ Ainsi $n = x - y \in L' \cap N = L \cap N$ donc $n \in L$ et $x \in L$. D'où $L = L'$.
2.b Si M est artinien, alors N et M/N sont artiniens.
Réciproquement, supposons N et M/N artiniens. Soit (L_n) une suite décroissante de sous-modules de M. Alors $(L_n \cap N)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((L_n + N)/N)_{n\in N}$ sont décroissantes donc stationnaires pour $n \geq m$. Donc $L_n \cap N = L_{n+1} \cap N$ et $L_n \cap N = L_{n+1} \cap N$ et $L_{n+1} \subset L_n$ donc $L_{n+1} = L_n$ et M est artinien.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons une suite exacte courte canonique

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M^{n+1} \longrightarrow M^n \longrightarrow 0$$

ce qui permet en utilisant 2.b de démontrer par récurrence sur n que M^n est artinien.
4. Les sous-modules de $\mathbb{Z}$ sont ses idéaux. Ils sont de la forme $m\mathbb{Z}$. Toute suite croissante d'idéaux de $\mathbb{Z}$ est stationnaire mais la suite décroissante $2^n\mathbb{Z}$ d'idéaux n'est pas stationnaire.
5. Les sous-modules propres de $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ sont les $\{a/p^n + \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}\}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Ils forment une suite

strictement croissante pour l'inclusion.
6.a La suite de sous-modules $(\ker f^n)$ est croissante donc stationnaire car M est noethérien. La suite décroissante de sous-modules (imf^n) est stationnaire car M est artinien.
6.b Si $x \in \ker f^m \cap \mathrm{im} f^m$ alors $x = f^m(y)$ et comme $f^m(x) = 0$, nous avons $y \in \ker f^{2m} = \ker f^m$ donc $x = 0$.
Pour $x \in M$, $f^m(x) \in \mathrm{im} f^m = \mathrm{im} f^{2m}$, donc il existe $y \in M$ avec $f^m(x) = f^m(y)$. Donc x est la somme d'un élélement de $\ker f^m$ et d'un élément de $\mathrm{im} f^m$.
6.c La restriction de f à $\ker f^m$ est nilpotente ; la restriction de f à $\mathrm{im} f^m$ est surjective car $f^m(\mathrm{im} f^m) = f^m(\ker f^m + \mathrm{im} f^m) = f^m(M)$.

Partie B. Le théorème de Krull-Schmidt
1.a Les K-espaces vectoriels simples sont les droites.
1.b Les $\mathbb{Z}$-modules simples sont les groupes abéliens simples, i.e les groupes cycliques d'ordre p.
1.c L'idéal I est un A-module simple si et seulement si I est un idéal minimal.
1.d Clair.
2.a Les $\mathbb{Z}$-modules de type fini indécomposables sont $\mathbb{Z}$ et les groupes cyclique d'ordre p^n avec p premier et $n > 0$.
2.b Les sous-modules non nuls de $\mathbb{Z}$ sont isomorphes à $\mathbb{Z}$ donc non simples.
2.c Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ est indécomposable et non simple.
3.a Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des sous-modules qui ne sont pas somme directe de modules indécomposables. Si $\mathcal{N}$ est non vide, il admet un élément minimal N. Comme N n'est pas indécomposable, $N = N_1 \oplus N_2$ avec N_1, N_2 non nuls dont l'un au moins n'est pas somme de modules indécomposables, ce qui contredit la minimalité de N.
3.b Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des sous-modules N de M tels que M/N n'est pas somme de modules indécomposables. Nous raisonnons comme en 3.a en utilisant la noethérianité de M.
4.a Notons $B = \mathrm{End}_A(M)$ et $J = B - B^*$. D'après le lemme de Fitting (6.c), un élément $f \in B$ est nilpotent ou inversible. Donc J est l'ensemble des éléments nilpotents de B. Soit $f \in J$, comme f est nilpotent $\ker f \neq 0$ et $\mathrm{Coker} f \neq 0$. Donc pour tout $b \in B$, $\ker bf \neq 0$ et $\mathrm{Coker} fb \neq 0$ donc bf et fb ne sont pas inversibles, donc $bf, fb \in J$.
4.b Soit $x, y \in J$. Si $x + y \notin J$, $x + y$ est inversible d'inverse $b \in B$. Ainsi $bx + by = 1$ et $bx, by \in J$. Comme by est nilpotent $bx = 1 - by$ est inversible, ce qui est absurde ! Par ailleurs $0 \in J$ et $-x \in J$ donc J est un sous-groupe de B.
4.c Soit I un idéal bilatère de B propre, i.e. $I \neq B$. Alors I ne contient aucun élément inversible de B donc $I \subset J$.
5.a Supposons M décomposable, $M = M_1 \oplus M_2$. Les projections π_1 et π_2 sont deux éléments non inversibles de B dont la somme $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{id}$ est inversible. Donc B n'est pas un anneau local.
5.b Les questions 4c. et 5.a permettent de conclure.
6. Notons $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ et $\iota_j : N_j \longrightarrow N$ et $\pi_j : N \longrightarrow N_j$ les injections et les projections canoniques. Notons $(\varphi, \varphi') : M \oplus M' \longrightarrow N$ l'isomorphisme de l'énoncé et $(\psi, \psi') : N \longrightarrow M \oplus M'$ sa réciproque : $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_M$, $\psi' \circ \varphi' = \mathrm{id}_{M'}$, $\psi' \circ \varphi = 0$ et $\varphi \circ \psi + \varphi' \circ \psi' = \mathrm{id}_N$.
Alors $\mathrm{id}_M = \psi \circ \varphi = \sum_{j=1}^n \psi \circ \iota_j \circ \pi_j \circ \varphi$. Comme $\mathrm{End}_A(M)$ est un anneau local, un des termes de cette somme est inversible, disons $\psi \circ \iota_s \circ \pi_s \circ \varphi$. Alors $\pi_j \circ \varphi : M \longrightarrow N_j$ est injective, $\psi \circ \iota_j : N_j \longrightarrow M$ est surjective et $N_j = (\pi_j \circ \varphi) \oplus \ker(\psi \circ \iota_j)$. Or N_j est indécomposable. Donc $\pi_j \circ \varphi$ est surjective et $\psi \circ \iota_j$ est injectif. Donc $M \simeq N_j$.
Posons $\phi = (\psi \circ \iota_s \circ \pi_s \circ \varphi)^{-1}$. Ainsi

$$\phi \circ \psi \circ \iota_s \circ \pi_s \circ \varphi = \mathrm{id}_M \text{ et } \pi_s \circ \varphi \circ \phi \circ \psi \circ \iota_s = \mathrm{id}_{N_s}.$$

Pour $t \neq s$, soit $\iota'_t = \psi' \circ \iota_s \in \mathrm{Hom}_A(N_t, M')$, et $\pi'_t = \pi_t \circ (\mathrm{id}_N - \varphi \circ \phi \circ \psi \circ \iota_s \circ \pi_s) \circ \varphi' \in \mathrm{Hom}_A(M', N_t)$.
Alors $\pi'_t \circ \iota'_t = \mathrm{id}_{N_t}$, $\pi'_t \circ \iota'_j = 0$ si $t \neq j$ et $\sum_{t \neq s} \mathrm{id}_{M'}$. D'où $M' \simeq \oplus_{t \neq s} N'_t$.
7.a Le résultat s'obtient par récurrence sur m à l'aide de B.6.
7.b Le résultat est un corollaire du lemme de Fitting (A.6) et de B.7.a.