Partiel Algèbre 1
16 novembre 2016 - 2 heures

Le polycopié 2016-2017 du cours est autorisé.

Notations
Pour H un sous-groupe d'un groupe G, nous notons

$$N_G(H) = \{g \in G \text{ tel que } gHg^{-1} = H\}.$$

Les résultats du cours (hors Remarques) peuvent être utilisés sans être redémontrés.

A. Un sous-groupe du groupe spécial linéaire.
Soit G le sous-groupe du groupe spécial linéaire formé des matrices triangulaires supérieures à coefficients dans le corps à 7 éléments $\mathbb{F}_7$:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{F}_7, a \neq 0 \right\}.$$

1. Quel est l'ordre de G ? Le groupe G est-il abélien ?
2. Montrer que G admet un unique sous-groupe de 7-Sylow S_7. Expliciter un générateur de S_7.
3. Montrer que G est un produit semi-direct de S_7 et du sous-groupe K des matrices diagonales.
4. Déterminer le centre de G.
5. Déterminer le groupe dérivé $D(G)$ de G.
6. Décrire les classes de conjugaison de G.

B. Groupes d'ordre 42.
1. Déterminer à isomorphisme près les groupes d'ordre 21.
2. Soit C_2 un groupe d'ordre 2 et P un groupe abélien d'ordre 21. Décrire les quatre morphismes $C_2 \longrightarrow \operatorname{Aut} P$.
3. Déterminer à isomorphisme près les groupes d'ordre 42.
4. Nous notons $\mathfrak{S}_7$ le groupe des permutations d'un ensemble à 7 éléments. Combien $\mathfrak{S}_7$ a-t-il de sous-groupes de 7-Sylow ?
5. Soit S_7 un sous-groupe de 7-Sylow de $\mathfrak{S}_7$. Déterminer le groupe $N_G(S_7)$ à isomorphisme près.

C. Groupe nilpotent.
Soit G un groupe nilpotent.
1. Soit H un sous-groupe de G distinct de 1 et de G. Montrer que $H \neq N_G(H)$.

2. En déduire que pour tout nombre premier p, G admet un unique sous-groupe de p-Sylow.
3. Montrer que G est produit direct de ses sous-groupes de Sylow.
4. Montrer qu'un groupe est nilpotent si et seulement si il est produit direct de ses sous-groupes de Sylow.

D. Groupe d'ordre 420.
Supposons qu'il existe un groupe simple G d'ordre 420. Si p premier, nous notons n_p le nombre de sous-groupes de p-Sylow de G. Pour H un sous-groupe de G, nous notons $C_G(H)$ le sous-groupe de G formé des éléments qui commutent avec tous les éléments de H.
1. Montrer que G n'a pas de sous-groupe d'indice inférieur ou égal à 6.
2. Montrer que $n_7 = 15$, $n_5 = 21$.
3. Notons S_7 un sous-groupe de 7-Sylow de G et supposons que G admette un sous-groupe d'indice 7.
3.a Montrer que G s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{A}_7$.
3.b Calculer les ordres $|N_G(S_7)|$ et $|N_{\mathfrak{A}_7}(S_7)|$.
3.c Montrer que $N_G(S_7)$ est un sous-groupe de $N_{\mathfrak{A}_7}(S_7)$.
3.d En déduire que G n'a pas de sous-groupe d'indice 7.
4. Montrer que $n_3 = 70$.
5. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que $C_G(H)$ est un sous-groupe normal de $N_G(H)$ et que $N_G(H)/C_G(H)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(H)$.
6. Soit S_7 un sous-groupe de 7-Sylow de G. Montrer qu'il existe $s \in C_G(S_7)$ d'ordre 14. Montrer que S_7 est le seul sous-groupe de 7-Sylow de G stable par conjugaison par s.
7. En faisant agir G sur l'ensemble de ses sous-groupes de 7-Sylow, montrer que G s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{A}_{15}$.
8. Déduire des questions **6.** et **7.** que les groupes d'ordre 420 ne sont pas simples.

A. Un sous-groupe du groupe spécial linéaire.
1. Le groupe G est un groupe non abélien d'ordre $7 * 6 = 42$. En effet, il existe $a, b \in \mathbb{F}_7 - \{0\}$ avec $a \neq a^{-1}$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ba^{-1} \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\neq \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ab \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

2. Le nombre n_7 de sous-groupes de 7-Sylow de G divise 6 et satisfait $n_7 \equiv 1 \mod 7$. Donc G admet un unique sous-groupe H de 7-Sylow. Par unicité

$$H = \{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{F}_7, a \neq 0 \right\}.$$

En particulier, l'élément $h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un générateur de H.
3. Par unicité, le sous-groupe de 7-Sylow H est normal dans G. Le sous-groupe K des matrices diagonales

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a \in \mathbb{F}_7^*, \right\}$$

est monogène d'ordre $p - 1$ engendré par $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ pour α générateur du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_7^*$. Ainsi tout élément $g \in G$ s'écrit sous la forme $g = hk$, $h \in H$ et $k \in K$ et cette écriture est unique ($K \cap H = \mathrm{Id}$)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{F}_7, a \neq 0.$$

Par conséquent $G = H \rtimes K$.
4. Le centre de G est $\{\pm \mathrm{Id}\}$.
5. Comme $G/H \simeq K = \mathbb{F}_7^*$ est abélien, G non abélien et $H \simeq C_7$, le sous-groupe H est le plus petit sous groupe normal tel que G/H est abélien. Donc $D(G) = H$.
6. L'opération de K sur H est donnée par :

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a^{-2}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le conjugué d'un élément de K par un élément de H est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b(a - a^{-1}) \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Nous en déduisons les 4 classes de conjugaisons comportant 7 éléments des matrices diagonales outre $\pm$id :

$$C_a = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, b \in \mathbb{F}_7 \right\}, a \in \mathbb{F}_7^*, a \neq \pm 1.$$

De plus, il y a quatre classes de conjugaison ayant 3 éléments en notant α un générateur de $\mathbb{F}_7^*$ (donc α n'est pas un carré) :

$$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{F}_7^* \right\}, C_1' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha a^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{F}_7^* \right\},$$

$$C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & a^2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{F}_7^* \right\}, C_2' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & \alpha a^2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{F}_7^* \right\}.$$

D'où une description des 10 classes de conjugaison de G.

B. Groupes d'ordre 42.

1. Un groupe G d'ordre 21 admet un unique sous-groupe $S_7 =< a >$ de 7-Sylow qui est normal. Soit $S_3 =< b >$ un sous-groupe de 3-Sylow, alors $P = S_7 \rtimes S_3$ est un sous-groupe de G. Le groupe $\operatorname{Aut} S_7 \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ à un unique sous-groupe d'ordre 3. Ainsi nous obtenons deux classes d'isomorphismes pour P : $C_{21} = \{a, b | a^7, b^3\}$, $C_7 \rtimes_\tau C_3 = \{a, b | a^7, b^3, bab^{-1} = a^2\}$.

2. Soit $P = C_7 \times C_3 = \{a, b | a^7, b^3\}$ un groupe abélien d'ordre 21. Alors $\operatorname{Aut} P \simeq \operatorname{Aut} C_7 \times \operatorname{Aut} C_3$. Les morphismes possibles $\theta : C_2 \mapsto \operatorname{Aut} P$ sont déterminés par l'image de l'élément c d'ordre 2 de C_2. Ainsi, nous disposons de 4 morphismes θ pour $\theta(c)$ de l'une des formes suivantes :

$$\begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto b \end{cases} \begin{cases} a \mapsto a^{-1} \\ b \mapsto b \end{cases} \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto b^{-1} \end{cases} \begin{cases} a \mapsto a^{-1} \\ b \mapsto b^{-1} \end{cases}$$

3. Un sous-groupe P d'ordre 21 donc d'indice 2 de G est normal, ainsi

$$G = P \rtimes_\theta C_2$$

avec $\theta : C_2 \longrightarrow \operatorname{Aut} P$ et $\theta(b)\theta(a)\theta(b^{-1})\theta(a^{-2}) = e$ si $P = \{a, b | a^7, b^3, bab^{-1} = a^2\}$. n'est pas abélien.

Par conséquent, nous obtenons 6 groupes d'ordre 42 :

$$G_1 = C_{42} = \{a, b, c | a^7, b^3, c^2, ab = ba, ac = ca, bc = cb\}, |Z(G_1)| = 42$$

$$G_2 = \{a, b, c | a^7, b^3, c^2, ab = ba, cac^{-1} = a^{-1}, bc = cb\}, |Z(G_2)| = 3$$

$$G_3 = \{a, b, c | a^7, b^3, c^2, ab = ba, ac = ca, cbc^{-1} = b^{-1}\}, |Z(G_3)| = 7$$

$$G_4 = D_{21} = \{a, b, c | a^7, b^3, c^2, ab = ba, cac^{-1} = a^{-1}, cbc^{-1} = b^{-1}\}, |Z(G_4)| = 1$$

$$G_5 = \{a, b, c | a^7, b^3, c^2, bab^{-1} = a^2, ac = ca, bc = cb\}, |Z(G_5)| = 2$$

$$G_6 = \{a, b, c | a^7, b^3, c^2, bab^{-1} = a^2, cac^{-1} = a^{-1}, bc = cb\}, |Z(G_6)| = 1$$

Les groupes G_i $1 \leq i \leq 5$ ont des centres d'ordre distincts donc sont non isomorphes. Le groupe G_4 a un sous-groupe cyclique d'ordre 21 mais pas G_6.

4. Le groupe $\mathfrak{S}_7$ est d'ordre 7!. Ses sous-groupes de 7-Sylow sont d'ordre 7, donc engendrés par un cycle de longueur 7. Il y a 720 cycles d'ordre 7 distincts, donc $720/6 = 120$ sous-groupes de 7-Sylow.

5. Soit $h = (a_1, \ldots, a_7)$ un générateur du sous-groupe de 7-Sylow S_7. Un élément $\tau \in N_{\mathfrak{S}_7}(S_7)$ si et seulement si

$$\tau h \tau^{-1} = (\tau(a_1), \ldots, \tau(a_7)) \in S_7.$$

Donc $N_{\mathfrak{S}_7}(S_7)$ est un groupe non abélien d'ordre 42 de centre réduit à 1 qui ne contient pas de cycle d'ordre 21, donc $N_{\mathfrak{S}_7}(S_7) \simeq G_6$.

C. Groupe nilpotent.

1. Soit H un sous-groupe de G distinct de 1 et G. Pour tout i, $C_i(G) \lhd G$ et posons $H_i = HC_i(G)$. Montrons que $H_{i+1} \lhd H_i$: soit $h \in H_{i+1}$ et $g \in C_i(G)$, alors

$$ghg^{-1} = ghg^{-1}h^{-1}h \in [G, C_i(G)]H_{i+1} = C_{i+1}(G)H_{i+1} = H_{i+1},$$

donc $ghg^{-1} \in H_{i+1}$. Par conséquent, il existe une suite :

$$H = H_n \subset \cdots \subset H_2 \subset H_1 = G$$

vérifiant $H_{i+1} \lhd H_i$ et $H_n = H$. Nous pouvons supposer que $H_n \neq H_{n-1}$. Or $N_G(H) \subset H_{n-1}$ car $H = H_n \lhd H_{n-1}$. D'où H strictement inclus dans $N_G(H)$.

2. Soit S_p un p-Sylow de G, comme $N_G(S_p) \neq S_p$, $N_G(S_p) = G$ et S_p est normal dans G ; donc G admet un unique sous-groupe de p-Sylow.

3. Pour tout premier $\ell \neq p$ divisant l'ordre de G, $S_p \cap S_\ell = \{e\}$, d'où un morphisme injectif du produit de ses sous-groupes de Sylow vers G qui est bijectif pour des raisons d'ordre.

4. Un produit direct de sous-groupes de Sylow est nilpotent. En effet, les p-groupes sont nilpotents et $C_i(G_1 \times G_2) = C_i(G_1) \times C_i(G_2)$.

D'après **3.** si G est nilpotent, il est produit direct de ses sous-groupes de Sylow. Ainsi un groupe est nilpotent si et seulement si il est produit direct de ses sous-groupes de Sylow.

D. Groupe d'ordre 420.

1. Soit H un sous-groupe d'indice $m \leq 6$ de G. Alors G opère transitivement sur les classes à gauche de H dans G :

$$\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Bij}(G/H) = \mathfrak{S}_m$$

Ainsi $\ker \varphi \neq G$ est un sous-groupe normal de G simple, donc $\ker \varphi = 1$ et φ est une injection ce qui est exclu car $|G|$ ne divise pas 6!.

2. Le nombre de sous-groupes de 7-Sylow de G satisfait $n_7 > 1$ (car G est simple), $n_7(G) \equiv 1 \mod 7$ et $n_7(G)$ divise 60. Par conséquent $n_7 = 15$.

De même $n_5(G) \in \{6, 21\}$. Si $n_5 = 6$ et si S_5 est un sous-groupe de 5-Sylow de G, $N_G(S_5)$ est un sous-groupe d'indice 6 de G, ce qui est exclu. D'où $n_5 = 21$.

3.a Si H est un sous-groupe d'indice 7 de G, le même raisonnement qu'en **1.** permet d'identifier G à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_7$. Ainsi $G \cap \mathfrak{A}_7 \neq 1$ est un sous-groupe normal de G simple donc $G \cap \mathfrak{A}_7 = G$. Ainsi G est un sous-groupe de $\mathfrak{A}_7$.

3.b Soit S_7 un sous-groupe de 7-Sylow de G. Nous avons $|N_G(S_7)| = |G|/15 =$

$7 \cdot 2^2$ et $|N_{\mathfrak{A}_7}(S_7)| = |\mathfrak{A}_7|/5! = 7 \cdot 3$.
3.c Comme G est un sous-groupe de $\mathfrak{A}_7$, $N_G(S_7)$ est un sous-groupe de$N_{\mathfrak{A}_7}(P_7)$.
3.d Comme $N_G(S_7)$ est un sous-groupe de$N_{\mathfrak{A}_7}(S_7)$, **3.b.** est en contradiction avec le théorème de Lagrange. Donc G n'admet pas de sous-groupe d'indice 7.
4. D'après le théorème de Sylow et comme G n'admet de sous-groupe d'indice inférieur ou égal à 7, nous obtenons $n_3(G) \in \{10, 28, 70\}$.
Si $n_3 = 10$, soit P_3 un sous-groupe de 3-Sylow de G. Le groupe $N_G(P_3)$ d'ordre $2 \cdot 3 \cdot 7$ admet un unique sous-groupe de 7-Sylow P_7. Donc P_7 est normal dans $N_G(P_3)$ donc P_3 est un sous-groupe de $N_G(P_7)$ ce qui est exclu car $|N_G(P_7)| = 7 \cdot 2^2$.
Si $n_3 = 28$, et P_3 un sous-groupe de 3-Sylow de G, alors $N_G(P_3)$ d'ordre $3 \cdot 5$ admet un unique sous-groupe de 5-Sylow P_5. Ainsi P_3 est un sous-groupe de $N_G(P_5)$ qui est d'ordre 20, ce qui est exclu.
Par conséquent $n_3 = 70$.
5. Le centralisateur $C_G(H)$ est un sous-groupe de G inclus dans $N_G(H)$. De plus pour tous $n \in N_G(H)$, $c \in C_G(H)$ et $h \in H$, $cn^{-1}hnc^{-1} = n^{-1}hn$ donc $ncn^{-1}hnc^{-1}n^{-1} = h$. Donc $C_G(H) \lhd N_G(H)$. Le morphisme de groupes $\varphi : N_G(H) \longrightarrow \operatorname{Aut} H$, $n \mapsto (h \mapsto nhn^{-1})$ a pour noyau $\ker \varphi = C_G(H)$ donc $N_G(H)/C_G(H)$ s'identifie à un sous-groupe de $\operatorname{Aut}(H)$.
5. D'après **18.**, $N_G(S_7)/C_G(S_7)$ est un sous-groupe de $\operatorname{Aut} S_7 \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Or $|N_G(S_7)| = |G|/n_7 = 2^2 \cdot 7$. Donc $|C_G(S_7)|$ admet un élément s d'ordre 14. Ainsi s^2 est d'ordre 7 et engendre S_7. Par conséquent s^2 et s ne stabilisent que le sous-groupe de 7-Sylow fixé S_7.
7. Le groupe G opère par conjugaison sur l'ensemble de ses 15 sous-groupes de 7-Sylow. Le noyau du morphisme de groupes induit par cette action $\psi : G \longrightarrow \mathfrak{S}_{15}$ est un sous-groupe normal de G distinct de G. Comme dans la question **3.a**, nous identifions G à un sous-groupe de $\mathfrak{A}_{15}$.
8. D'après **6.** et **7.**, $\mathfrak{A}_{15}$ contient un élément s d'ordre 14 qui stabilise un unique élément de $\{1, \ldots, 15\}$. En décomposant s en cycles disjoints, nous obtenons que $s \notin \mathfrak{A}_{15}$. D'où l'absurdité. Donc G n'est pas simple.