Examen du 22 janvier 2018
3 heures

A. Pfaffien. Soit $n, m \geq 1$, $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels et $A \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{R})$ une matrice antisymétrique. Nous notons $\mathrm{Pf}(A)$ le pfaffien de A.
A.1 Montrer que $\mathrm{Pf}(A^{-1}) = \pm\mathrm{Pf}(A)^{-1}$.
A.2.a Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}_{2n}(\mathbf{R})$ et des réels $(a_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbf{R}^n$ tels que PAP^{-1} s'écrive sous la forme de blocs :

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & \\ -a_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & a_2 & & \\ & & -a_1 & 0 & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

A.2.b En déduire que $\mathrm{Pf}(A^{-1}) = (-1)^n\mathrm{Pf}(A)^{-1}$.
A.3 Pour $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $\mathrm{Pf}(B' \otimes A')$.
A.4 Soit $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{R})$ une matrice réelle symétrique.
A.4.a Montrer que $B \otimes A \in \mathrm{GL}_{2nm}(\mathbf{R})$ est antisymétrique.
A.4.b Montrer que $\mathrm{Pf}(B \otimes A) = \mathrm{Pf}(A)^m(\det B)^n$ (où det désigne le déterminant).

B. Table de caractères de $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$. Nous notons $\mathbf{F}_7$ le corps à sept éléments que nous identifions à $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$. L'objet de ce problème est de déterminer la table de caractères du groupe projectif spécial linéaire de dimension 2 sur $\mathbf{F}_7$:

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)/\{\pm\mathrm{Id}\}$$

B.1 Déterminer le cardinal de $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$.
B.2 Déterminer les ordres des 6 éléments suivants de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$:

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ g_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ g_4 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\ g_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ g_6 = g_5^{-1}.$$

B.3 Pour $1 \leq i \leq 6$, nous notons $C_G(g_i)$, le centralisateur de g_i, i.e. l'ensemble des éléments de G qui commutent avec g_i. Pour éviter trop de calculs, nous admettons que $C_G(g_i) =< g_i >$ pour $3 \leq i \leq 6$.
B.3.a Montrer que $|C_G(g_1)| = 168$ et $|C_G(g_2)| = 8$.
B.3.b En déduire le cardinal des classes de conjugaison des éléments g_i, $1 \leq i \leq 6$.
B.3.c Montrer que g_i est conjugué à g_j si et seulement si $i = j$.
B.3.d En déduire que G admet exactement 6 classes de conjugaison et 6 caractères complexes irréductibles $\chi_1, \ldots, \chi_6$ distincts.
B.4.a Montrer qu'un sous-groupe H de G est normal si et seulement si il est réunion de classes de conjugaison.
B.4.b En déduire que $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$ est simple.
B.5.a Soit $n \geq 1$ et $\zeta \in \mathbb{C}$ une racine n-ième de l'unité. Montrer que $\sum_{1\leq k\leq n,(k,n)=1} \zeta^k \in \mathbf{Z}$.
B.5.b Soit χ un caractère complexe de G. Soit $g \in G$ d'ordre n tel que g est conjugué à tous les g^k pour $(k, n) = 1$. Montrer que $\chi(g) \in \mathbf{Z}$.
B.5.c En déduire que pour tout $1 \leq i \leq 4$ et pour tout caractère complexe χ de G, $\chi(g_i) \in \mathbf{Z}$.

B.5.d Montrer qu'il existe un caractère complexe χ de G tel que $\chi(g_5) \notin \mathbf{R}$.
B.5.e Soit p un nombre premier et $g \in G$ un élément d'ordre une puissance de p. Soit χ un caractère complexe de G tel que $\chi(g) \in \mathbf{Z}$. Montrer que $\chi(g) \equiv \chi(g_1) \mod p$.
B.6 Quitte à renuméroter les caractères, nous supposons dorénavant que χ_1 est le caractère trivial.
B.6.a Déterminer au signe près et les images des caractères $\chi_i(g_j)$, $1 \leq i \leq 6$ et $2 \leq j \leq 4$.
B.6.b Déterminer la dimension des χ_i, $1 \leq i \leq 6$.
B.6.c En déduire les images des caractères $\chi_i(g_j)$, $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 4$.
B.7 Montrer que la table des caractères de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$ peut s'écrire

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	7	-1	1	-1	0	0
χ_3	8	0	-1	0	1	1
χ_4	3	-1	0	1	α	$\overline{\alpha}$
χ_5	3	-1	0	1	$\overline{\alpha}$	α
χ_6	6	2	0	0	-1	-1

où α est un nombre complexe non réel à préciser.

C. La quartique de Klein. Dans cet exercice, $\mathbf{R}$ est le corps des nombres réels et V est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 4. Soit $v_0, \ldots, v_3$ une base fixée de V.
C.1 Pour $2 \leq d \leq 4$, nous notons $\Lambda^d V$ la puissance extérieure d-ième de V. Donner une base de $\Lambda^2 V$.
C.2 Nous notons $\mathbf{P}(V)$ l'espace projectif de V, i.e. l'ensemble de tous les sous-$\mathbf{R}$-espaces vectoriels de V de dimension 1. Pour $v \in V$ non nul, nous notons $[v]$ son image dans $\mathbf{P}(V)$.
Un sous-ensemble $\ell \subset \mathbf{P}(V)$ est dit droite de $\mathbf{P}(V)$ s'il existe un sous-$\mathbf{R}$-espace vectoriel $U \subset V$ de dimension 2 tel que $\ell = \mathbf{P}(U)$.
Montrer que l'application

$$p : \{\text{droites de } \mathbf{P}(V)\} \longrightarrow \mathbf{P}(\Lambda^2 V), \quad \ell = \mathbf{P}(U) \mapsto [u \wedge v]$$

où $\{u, v\}$ est une base quelconque de U, est bien définie et injective.
C.3 Un élément de $\Lambda^2 V$ qui peut s'écrire sous la forme $u \wedge v$ est dit décomposable. Un élément de $\mathbf{P}(\Lambda^2 V)$ qui peut s'écrire sous la forme $[u \wedge v]$ est dit décomposable.
C.3.a Montrer que l'image de p est l'ensemble des éléments décomposables de $\mathbf{P}(\Lambda^2 V)$.
C.3.b Montrer que $v_0 \wedge v_1 + v_2 \wedge v_3$ n'est pas décomposable.
C.3.c Soit $a \in \Lambda^2 V$ un élément non nul. Montrer que a est décomposable si et seulement si $a \wedge a = 0$ dans $\Lambda^4 V$.
C.4.a Déterminer la forme quadratique $f : \Lambda^2 V \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $a \wedge a = f(a) v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$, $a \in \Lambda^2 V$.
C.4.b Montrer que f est non dégénérée. Quelle est sa signature ?
C.4.c Montrer que $Q = \{[a] \in \mathbf{P}(\Lambda^2 V) \text{ tels que } f(a) = 0\}$ définit un sous-ensemble de $\mathbf{P}(\Lambda^2 V)$, dit quartique de Klein.
C.4.d Montrer que Q est l'image de p.
C.5.a Montrer que deux droites ℓ_1, ℓ_2 distinctes de $\mathbf{P}(V)$ s'intersectent si et seulement si la droite joignant les deux points $p(\ell_1)$ et $p(\ell_2)$ correspondant dans Q est incluse dans Q.
C.5.b Montrer que l'ensemble des droites $\ell \subset \mathbf{P}(V)$ passant par un point $X \in \mathbf{P}(V)$ fixé correspond à l'ensemble des points $L \in Q$ qui appartiennent à un plan fixé inclus dans Q. Un plan dans Q défini par un tel point $X \in \mathbf{P}(V)$ est dit α-plan.
C.5.c Soit W un sous-$\mathbf{R}$-espace de dimension 3 de V et $\mathbf{P}(W)$ le plan associé dans $\mathbf{P}(V)$. Montrer que l'ensemble des droites $\ell \subset \mathbf{P}(W)$ correspond à l'ensemble des points $L \in Q$ qui appartiennent à un plan fixé contenu dans Q. Un tel plan contenu dans Q est dit β-plan.
C.5.d Montrer que tout plan contenu dans Q est ou bien un α-plan ou bien un β-plan.

Examen du 22 janvier 2018
3 heures

A. Pfaffian. Let $n, m \geq 1$, $\mathbf{R}$ be the field of real numbers and $A \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{R})$ be an antisymmetric matrix. We denote $\mathrm{Pf}(A)$ the pfaffian of A.
A.1 Prove that $\mathrm{Pf}(A^{-1}) = \pm \mathrm{Pf}(A)^{-1}$.
A.2.a Prove that there exists an orthogonal matrix $P \in \mathrm{O}_{2n}(\mathbf{R})$ and real numbers $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^n$ such that PAP^{-1} has the following form:

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & \\ -a_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & a_2 & & \\ & & -a_1 & 0 & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

A.2.b Deduce that $\mathrm{Pf}(A^{-1}) = (-1)^n \mathrm{Pf}(A)^{-1}$.
A.3 For $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ and $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, compute $\mathrm{Pf}(B' \otimes A')$.
A.4 Let $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{R})$ be a symmetric real matrix.
A.4.a Prove that $B \otimes A \in \mathrm{GL}_{2nm}(\mathbf{R})$ is antisymmetric.
A.4.b Prove that $\mathrm{Pf}(B \otimes A) = \mathrm{Pf}(A)^m (\det B)^n$ (where det denotes the determinant).

B. Characters table of $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$. We denote $\mathbf{F}_7$ the field that contains 7 elements, identified with $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$. The goal of this exercise is to find the characters table of the special linear projective group of dimension 2 over $\mathbf{F}_7$:

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_7)/\{\pm \mathrm{Id}\}$$

B.1 Give the cardinal of $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$.
B.2 Find the orders of the following elements of $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$:

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ g_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ g_4 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\ g_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ g_6 = g_5^{-1}.$$

B.3 For $1 \leq i \leq 6$, we denote $C_G(g_i)$, the centralizer of g_i, i.e. the set of elements of G that commute with g_i. In order to avoid some computations, we admit that $C_G(g_i) =< g_i >$ for $3 \leq i \leq 6$.
B.3.a Prove that $|C_G(g_1)| = 168$ and $|C_G(g_2)| = 8$.
B.3.b Deduce the cardinal of conjugacy classes of the elements g_i, $1 \leq i \leq 6$.
B.3.c Prove that g_i is in the same conjugacy class as g_j if and only if $i = j$.
B.3.d Deduce that G admits exactly 6 conjugacy classes and 6 distinct irreducible complex characters $\chi_1, \ldots, \chi_6$.
B.4.a Prove that a subgroup H of G is normal if and only if it is union of conjugacy classes.
B.4.b Deduce that $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$ is simple.
B.5.a Let $n \geq 1$ and $\zeta \in \mathbb{C}$ a n-th root of unity. Prove that $\sum_{1 \leq k \leq n, (k,n)=1} \zeta^k \in \mathbf{Z}$.
B.5.b Let χ be a complex character of G. Let $g \in G$ of order n such that g belongs to the same conjugacy class as any g^k for $(k, n) = 1$. Prove that $\chi(g) \in \mathbf{Z}$.
B.5.c Deduce that for any $1 \leq i \leq 4$ and any complex character χ of G, $\chi(g_i) \in \mathbf{Z}$.
B.5.d Prove there exists a complex character χ of G such that $\chi(g_5) \notin \mathbf{R}$.

B.5.e Let p be a prime number and $g \in G$ an element of order a power of p. Let χ be a complex character of G such that $\chi(g) \in \mathbf{Z}$. Prove that $\chi(g) \equiv \chi(g_1) \mod p$.
B.6 From now on, we assume that χ_1 is the trivial character.
B.6.a Determine up to sign, the images of the character $\chi_i(g_j)$, $1 \leq i \leq 6$ and $2 \leq j \leq 4$.
B.6.b Find the dimension of χ_i, $1 \leq i \leq 6$.
B.6.c Deduire the images of characters $\chi_i(g_j)$, $1 \leq i \leq 6$ and $1 \leq j \leq 4$.
B.7 Prove that the characters table of $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$ can be written as

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	7	-1	1	-1	0	0
χ_3	8	0	-1	0	1	1
χ_4	3	-1	0	1	α	$\overline{\alpha}$
χ_5	3	-1	0	1	$\overline{\alpha}$	α
χ_6	6	2	0	0	-1	-1

where α is a non real complex number which sould be determined.

C. Klein quartic. In this exercise, $\mathbf{R}$ is the field of real numbers and V is a $\mathbf{R}$-vector space of dimension 4. Let $v_0, \ldots, v_3$ be a fixed basis of V.
C.1 Let $2 \leq d \leq 4$, we denote $\Lambda^d V$ the d-th exterior power of V. Give a basis of $\Lambda^2 V$.
C.2 We denote $\mathbf{P}(V)$ the projective space of V, i.e. the set of dimension 1 $\mathbf{R}$-vector subspaces of V. For non zero $v \in V$, we denote $[v]$ its image in $\mathbf{P}(V)$.
A subset $\ell \subset \mathbf{P}(V)$ is said to be a line of $\mathbf{P}(V)$ if there exists a dimension 2 $\mathbf{R}$-vector subspace $U \subset V$ such that $\ell = \mathbf{P}(U)$.
Prove that the map

$$p : \{\text{lines of } \mathbf{P}(V)\} \longrightarrow \mathbf{P}(\Lambda^2 V), \quad \ell = \mathbf{P}(U) \mapsto [u \wedge v]$$

where $\{u, v\}$ is any basis of U, is well defined and injective.
C.3 An element of $\Lambda^2 V$ which can be written as $u \wedge v$ is said to be decomposable. An element of $\mathbf{P}(\Lambda^2 V)$ which can be written as $[u \wedge v]$ is said to be decomposable.
C.3.a Prove that the image of p is the set of decomposable elements of $\mathbf{P}(\Lambda^2 V)$.
C.3.b Prove that $v_0 \wedge v_1 + v_2 \wedge v_3$ is not decomposable.
C.3.c Let $a \in \Lambda^2 V$ be a non zero element. Prove that a is decomposable if and only if $a \wedge a = 0$ in $\Lambda^4 V$.
C.4.a Find the quadratic form $f : \Lambda^2 V \longrightarrow \mathbf{R}$ such that $a \wedge a = f(a) v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3, \quad a \in \Lambda^2 V$.
C.4.b Prove that f is not degenerate. What is its signature?
C.4.c Prove that $Q = \{[a] \in \mathbf{P}(\Lambda^2 V) \text{ such that } f(a) = 0\}$ defines a subset of $\mathbf{P}(\Lambda^2 V)$, said to be Klein quartic.
C.4.d Prove that Q is the image of p.
C.5.a Prove that two distinct lines ℓ_1, ℓ_2 of $\mathbf{P}(V)$ intersect if and only if the line from $p(\ell_1)$ to $p(\ell_2)$ is included in Q.
C.5.b Prove the set of lines $\ell \subset \mathbf{P}(V)$ passing through a fixed point $X \in \mathbf{P}(V)$ corresponds to the set of points $L \in Q$ belonging to a fixed plan inclued in Q. Such a plan included in Q defined by a fixed point $X \in \mathbf{P}(V)$ is said to be α-plan.
C.5.c Let W be a 3 dimension $\mathbf{R}$-vector subspace of V and $\mathbf{P}(W)$ the associated plan in $\mathbf{P}(V)$. Prove that the set of lines $\ell \subset \mathbf{P}(W)$ corresponds to the set of points $L \in Q$ belonging to a fixed plan included in Q. Such a plan included in Q is said to be β-plan.
C.5.d Prove that any plan included in Q is an α-plan or a β-plan.

Correction succincte

A. Pfaffien.
A.1 Comme $A \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{R})$ antisymétrique, nous avons

$$\det(A) = \mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A^{-1})^{-1} = \mathrm{Pf}(A^{-1})^2 \in \mathbf{R}^*.$$

Donc $\mathrm{Pf}(A^{-1}) = \pm\mathrm{Pf}(A)^{-1}$.
A.2.a D'après la réduction des formes symplectiques, il existe une base orthogonale dans laquelle la matrice de A s'écrit sous la forme indiquée.
A.2.b L'égalité est claire pour la matrice antisymétrique en blocs M. Comme, P est orthogonale ($P^{-1} =^t P$), nous avons $\mathrm{Pf}(M) = \mathrm{Pf}(PA^tP) = \det(P)\mathrm{Pf}(A)$. D'où, $\mathrm{Pf}(A^{-1}) = (-1)^n\mathrm{Pf}(A)^{-1}$.
A.3 La matrice $B' \otimes A'$ est antisymétrique,

$$B' \otimes A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathrm{Pf}(B' \otimes A') = 1$.
A.4.a Nous avons ${}^t(B \otimes A) =^t B \otimes^t A = -B \otimes A$ antisymétrique de taille $2nm \times 2nm$.
A.4.b Comme $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ est réelle symétrique, il existe $Q \in \mathrm{O}_m(\mathbf{R})$ telle que QBQ^{-1} soit diagonale D de coefficients diagonaux $(b_j)_{1\leq j\leq m} \in \mathbf{R}^m$. Posons $R = Q \otimes P$. Ainsi

$$R(B \otimes A)R^{-1} = (QBQ^{-1}) \otimes (PAP^{-1}) = D \otimes M$$

et $\mathrm{Pf}(D \otimes M) = a_1^m \cdots a_n^m b_1^n \cdots b_m^n = \mathrm{Pf}(A)^m \det(B)^n$.

Table des caractères de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$.
B.1 Nous avons $|\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)| = 168$.
B.2 L'ordre de g_i est i pour $1 \leq i \leq 4$. L'ordre de g_5 et g_6 est 7.
B.3.a Nous avons $C_G(g_1) = G$ donc $|C_G(g_1)| = 168$. De plus par identification des coefficients a, b, c, d tels que $ad - bc = 1$ et

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

nous obtenons

$$C_G(g_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Donc $|C_G(g_2)| = 8$.
B.3.b Notons $[g_i]$ la classe de conjugaison de g_i. Comme $|G| = |C_G(g_i)||[g_i]|$, nous obtenons

$$|[g_1]| = 1, |[g_2]| = 21, |[g_3]| = 56, |[g_4]| = 42, |[g_5]| = 24 = |[g_6]|.$$

B.3.c Les éléments d'une classe de conjugaison sont du même ordre. Donc seuls g_5, g_6 sont susceptibles d'être conjugués par un élément $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$. L'équation $gg_5 = g_6g$ implique $a^2 = -1$ qui n'a pas de solution dans $\mathbf{F}_7$. Donc g_5, g_6 ne sont pas conjugués.
B.3.d Les classes de conjugaison des éléments $g_i, 1 \leq i \leq 6$ contiennent donc les $1 + 21 + 42 + 56 + 24 + 24 = 168$ éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$. Par conséquent G admet exactement 6 classes de conjugaison

et donc 6 caractères complexes irréductibles distincts.
B.4.a Un sous-groupe réunion de classes de conjugaison est normal. Réciproquement, les classes de conjugaison des éléments d'un sous-groupe normal H forment une partition de H.
B.4.b L'ordre d'un sous-groupe H de G divise 168. Les diviseurs de 168 sont 1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 12; 14; 21; 24; 28; 42; 56; 84 et 168. Donc G n'admet pas de sous-groupe propre réunion de classes de conjugaison.
B.5.a Montrons le résultat par induction sur n. Le résultat est vrai pour $n = 1$, nous le supposons vrai pour tout $m < n$. Or

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \zeta^i = \sum_{d|n} \sum_{1\leq i\leq n,(i,n)=d} \zeta^i = \sum_{d|n} \sum_{1\leq j\leq n/d,(j,n/d)=1} \zeta^{dj}.$$

Or par induction $\sum_{d|n} \sum_{1\leq j\leq n/d,(j,n/d)=1} \zeta^{dj} \in \mathbf{Z}$ donc

$$\sum_{1\leq i\leq n,(i,n)=1} \zeta^i \in \mathbf{Z}.$$

B.5.b Comme g est d'ordre n, nous avons $\chi(g) = \zeta_1 + \cdots \zeta_r$ où ζ_j sont des racines n-ième de l'unité et $\chi(g^k) = \zeta_1^k + \cdots \zeta_r^k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. Pour $(k, n) = 1$, g^k est conjugué à g, donc $\chi(g^k) = \chi(g)$. Et d'après **B.5.a**,

$$\sum_{1\leq k\leq n,(k,n)=1} \chi(g^k) = s\chi(g) \in \mathbf{Z}$$

où s est le nombre d'entiers k tels que $1 \leq k \leq n$ et $(k, n) = 1$. Par conséquent $\chi(g) \in \mathbf{Q}$. Comme $\chi(g)$ est un entier algébrique, $\chi(g) \in \mathbf{Z}$.
B.5.c Les questions **B.3.a, B.5.b** concluent.
B.5.d Deux éléments $g, h \in G$ sont conjugués si et seulement si $\chi(g) = \chi(h)$ pour tout caractère complexe de G. Or g_6 n'est pas conjugué à g_5. Donc il existe un caractère complexe χ de G tel que $\chi(g_6) \neq \chi(g_5)$. Or $g_6 = g_5^{-1}$ donc $\chi(g_6) = \overline{\chi(g_5)}$. Ainsi $\overline{\chi(g_5)} \neq \chi(g_5)$ et $\chi(g_5)$ n'est pas réel.
B.5.e Soit ζ une racine primitive p^r-ième de l'unité. Comme g est d'ordre p^r, $\chi(g) = \zeta^{i_1} + \cdots + \zeta^{i_t}$. D'après la formule du binome, $(\zeta^{i_j} - 1)^{p^r} \in p\mathbf{Z}[\zeta]$. Ainsi, en notant 1 pour g_1, comme $\chi(g) - \chi(1) \in \mathbf{Z}$, $(\chi(g) - \chi(1))^{p^r} \in p\mathbf{Z}[\zeta] \cap \mathbf{Z} = p\mathbf{Z}$ et donc $\chi(g) \equiv \chi(1) \mod p$.
B.6.a D'après la propriété d'orthogonalité des colonnes de la table des caractères et d'après **B.5.b**, nous avons

$$\sum_{i=1}^{6} \chi_i(g_j)^2 = |C_G(g_j)|, 2 \leq j \leq 4, \text{ avec } \chi_1(g_j) = 1$$

Par conséquent à l'ordre près,
- les coefficients de la colonne correspondant à g_2 sont $1, \pm1, \pm1, \pm1, \pm2, 0$,
- les coefficients de la colonne correspondant à g_3 sont $1, \pm1, \pm1, 0, 0, 0$,
- les coefficients de la colonne correspondant à g_4 sont $1, \pm1, \pm1, \pm1, 0, 0$.

D'après **B.5.d**, nous avons

$$\chi(g_2) \equiv \chi(1) \equiv \chi(g_4) \mod 2,$$

et par orthogonalité $\sum_{i_1}^{6} \chi_i(g_3)\chi_i(g_4) = 0$. Ainsi quitte à ordonner convenablement les caractères irréductibles de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$, nous obtenons une partie de sa table de caractères :

	g_2	g_3	g_4
χ_1	1	1	1
χ_2	±1	±1	±1
χ_3	0	±1	0
χ_4	±1	0	±1
χ_5	±1	0	±1
χ_6	±2	0	0

B.6.b Nous avons $\sum_{i=1}^{6} \chi_i(1)^2 = 168$, $\chi_i(1)$ divise 168 pour $1 \leq i \leq 6$. Par ailleurs d'après **B.6.a**, nous avons

$$\chi_4(1) \equiv 0 \mod 3,\ \chi_4(1) \equiv 1 \mod 2,\ \chi_4(1)|168,\ \chi_4(1)^2 < 168.$$

Par conséquent $\chi_4(1) = 3$. De même $\chi_5(1) = 3$. Ensuite

$$\chi_6(1) \equiv 0 \mod 3,\ \chi_6(1) \equiv 0 \mod 2,\ \chi_6(1)|168,\ \chi_6(1)^2 \leq 168.$$

Donc $\chi_6(1)$ est égal à 6 ou 12. Or

$$0 = \sum_{i=1}^{6} \chi_i(g_2)\chi_i(1) = 1 \pm \chi_2(1) \pm 3 \pm 3 \pm 2\chi_6(1)$$

et comme $\chi_2(1)^2 < 168$, nous obtenons $\chi_6(1) = 6$. Enfin

$$168 = 1 + \chi_2(1)^2 + \chi_3(1)^2 + 3^2 + 3^2 + 6^2$$

donc $\chi_2(1)^{\chi}_{3}(1)^2 = 113$ et $\{\chi_2(1), \chi_3(1)\} = \{7, 8\}$. Comme $\chi_2(1) \equiv 1 \mod 2$, nous obtenons $\chi_2(1) = 7, \chi_3(1) = 8$. Ainsi

	g_1	g_2	g_3	g_4
χ_1	1	1	1	1
χ_2	7	± 1	± 1	± 1
χ_3	8	0	± 1	0
χ_4	3	± 1	0	± 1
χ_5	3	± 1	0	± 1
χ_6	6	± 2	0	0

B.6.c Par orthogonalité $\sum_{i=1}^{6} \chi_i(1)\chi_i(g_j) = 0,\ 2 \leq j \leq 4$. D'où

	g_1	g_2	g_3	g_4
χ_1	1	1	1	1
χ_2	7	-1	1	-1
χ_3	8	0	-1	0
χ_4	3	-1	0	1
χ_5	3	-1	0	1
χ_6	6	2	0	0

B.7 D'après **B.5.d** il existe un caractère irréductible avec $\chi(g_5) = \alpha \notin \mathbb{R}$. Par conséquent $\overline{\chi_5}$ est un caractère irréductible distinct de même dimension. Les seuls caractères ayant la même dimension sont χ_4 et χ_5. Par conséquent $\chi_5 = \overline{\chi_4}$.
L'équation

$$1 =< \chi_2, \chi_2 >= \sum_{i=1}^{6} \frac{\chi_2(g_i)\overline{\chi_2(g_i)}}{|C_G(g_i)|}$$

$$1 = 7.7/168 + 1/8 + 1/3 + 1/4 + |\chi_2(g_5)|^2/7 + |\chi_2(g_6)|^2/7$$

donne $\chi_2(g_5) = \chi_2(g_6) = 0$.
L'orthogonalité pour $j = 5, 6$ donne

$$0 = \sum_{i=1}^{6} \chi_i(g_3)\chi_i(g_j) = 1 - \chi_3(g_j)$$

donc $\chi_3(g_5) = \chi_3(g_6) = 1$.
Notons $\chi_4(g_5) = \alpha$, $\chi_5(g_5) = \overline{\alpha}$ et $\chi_5(g_5) = \beta$. Ainsi

$$0 = \sum_{i=1}^{6} \chi_i(g_2)\chi_i(g_5) = 1 - \alpha - \overline{\alpha} + 2\beta,$$

$$7 = \sum_{i=1}^{6} \chi_i(g_5)\overline{\chi_i(g_5)} = 2 + 2\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta},$$

$$0 = \sum_{i=1}^{6} \chi_i(g_4)\chi_i(g_5) = 1 + \alpha + \overline{\alpha}.$$

Par conséquent $\beta = -1$ et $\alpha = (-1 \pm i\sqrt{7})/2$. La table de caractères de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$ s'écrit

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	7	-1	1	-1	0	0
χ_3	8	0	-1	0	1	1
χ_4	3	-1	0	1	α	$\overline{\alpha}$
χ_5	3	-1	0	1	$\overline{\alpha}$	α
χ_6	6	2	0	0	-1	-1

C. La quartique de Klein.
C.1 Les éléments $(v_i \wedge v_j)_{0\leq i<j\leq 3}$ forment une base de $\Lambda^2 V$.
C.2 Soit $\{u', v'\}$ une autre base de U et P la matrice de passage de $\{u, v\}$ à $\{u', v'\}$. Alors nous avons $u \wedge v = \det(P)u' \wedge v'$, donc $[u \wedge v] = [u' \wedge v']$ est indépendant du choix de la base de U.
Si $[u \wedge v] = [u' \wedge v']$ alors il existe $\lambda \in \mathbf{R} - \{0\}$ tel que $u \wedge v = \lambda u' \wedge v'$ donc $\{u, v\}$ et $\{u', v'\}$ sont deux bases d'un même sous-espace de V et φ est injectif.
C.3.a Pour toute classe de vecteur décomposable $[u \wedge v]$, il existe $\ell = \mathbf{P}(U)$ une droite de $\mathbf{P}(V)$ avec $p(\ell) = [u \wedge v]$. Réciproquement l'image de toute droite de $\mathbf{P}(V)$ est décomposable.
C.3.b Supposons que

$$v_0 \wedge v_1 + v_2 \wedge v_3 = (a_0v_0 + a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) \wedge (b_0v_0 + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3)$$

En identifiant les coefficients de $v_0 \wedge v_1$, $v_0 \wedge v_2$ et $v_0 \wedge v_3$, nous obtenons

$$a_0b_1 - a_1b_0 = 1,\ a_0b_2 - a_2b_0 = 0,\ a_0b_3 - a_3b_0 = 0.$$

Ainsi $(a_0, b_0) \neq (0, 0)$ donc $b_2a_3 - b_3a_2 = 0$. Mais le coefficient de $v_2 \wedge v_3$ donne $a_2b_3 - a_3b_2 = 1$ ce qui est absurde.
C.3.c Voir exercice 9 TD8.
C.4.a Pour tout $a \in \Lambda^2 V$, il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ tels que

$$a = \lambda_1 v_0 \wedge v_1 + \lambda_2 v_0 \wedge v_2 + \lambda_3 v_0 \wedge v_3 + \mu_1 v_2 \wedge v_3 + \mu_2 v_3 \wedge v_1 + \mu_3 v_1 \wedge v_2.$$

Nous avons alors $f(a) = 2(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3)$.
C.4.b. Nous avons

$$2f(a) = (\lambda_1 + \mu_1)^2 - (\lambda_1 - \mu_1)^2 + (\lambda_2 + \mu_2)^2 - (\lambda_3 - \mu_3)^2 + (\lambda_3 + \mu_3)^2 - (\lambda_3 - \mu_3)^2.$$

Donc f est une forme quadratique non dégénérée de signature $(3, 3)$.
C.4.c Un autre choix de base modifie f par une constante non nulle et donc Q est bien définie dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.
C.4.e Une droite $\ell \subset \mathbb{P}(V)$ définit un vecteur décomposable $a = u \wedge v$, unique à multiplication par un scalaire près et comme $a \wedge a = 0$, ℓ définit un point $L \in \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. Réciproquement d'après **B.3.c**, tout point de Q est représenté par un vecteur décomposable de $\Lambda^2(V)$.
C.5.a Soient $\ell_1 = \mathbf{P}(U_1)$ et $\ell_2 = \mathbf{P}(U_2)$. Supposons que ℓ_1 et ℓ_2 s'intersectent en $X = [u] \in \mathbf{P}(V)$. Alors nous pouvons compléter $\{u, u_1\}$ et $\{u, u_2\}$ en des bases respectives de U_1 et U_2. La droite de $\mathbf{P}(\Lambda^2 V)$ joignant $L_1 = p(\ell_1)$ et $L_2 = p(\ell_2)$ est donc $\mathbf{P}(W)$ où W est le sous-$\mathbf{R}$-espace de dimension 2 de $\Lambda^2 V$ engendré par $u \wedge u_1$ et $u \wedge u_2$. Tout vecteur de W est donc de la forme

$$\lambda_1 u \wedge u_1 + \lambda_2 u \wedge u_2 = u \wedge (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)$$

donc décomposable et donc représente un élément de Q.
Réciproquement si $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, alors $U = U_1 \oplus U_2$. Notons $\{u_1, u_1'\}$ et $\{u_2, u_2'\}$ des bases de U_1 et U_2 respectivement. Ainsi $\{u_1, u_1', u_2, u_2'\}$ est une base de V. Un point de la droite joignant L_1 et L_2 s'écrit alors $a = \lambda u_1 \wedge u_1' + \lambda_2 u_2 \wedge u_2'$. Ainsi

$$a \wedge a = 2\lambda_1\lambda_2 u_1 \wedge u_1' \wedge u_2 \wedge u_2' = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = 0$$

Donc la droite ne rencontre Q qu'en L_1 et L_2.
C.5.b Notons $X = [x]$. Par conséquent, la droite $\ell \in \mathbf{P}(U)$ passe par X si et seulement si $x \in U$ donc il existe $u \in U$ tel que $p(\ell) = x \wedge u$.
En complétant x en une base $\{x, u_1, u_2, u_3\}$ de V, tout élément décomposable de la forme $x \wedge y$ s'écrit

$$x \wedge (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3) = \lambda_1 x \wedge u_1 + \lambda_2 x \wedge u_2 + \lambda_3 x \wedge u_3.$$

Donc toute droite passant par x est représentée par un élément décomposable d'un plan (engendré par $x \wedge u_1, x \wedge u_2, x \wedge u_3$) dans Q. Réciproquement tout point de ce plan défini une droite de $\mathbf{P}(V)$ qui passe par X.
C.5.c Les droites de $\mathbf{P}(V)$ sont en bijection avec les droites de $\mathbf{P}(V^*)$ (espace projectif du dual V^* de V. Un point de Q définit donc une droite dans $\mathbf{P}(V^*)$. Le dual d'un ensemble de droites passant par un point est un ensemble de droites d'un plan. Le résultat **C.5.b** appliqué à $\mathbf{P}(V^*)$ conclut.
C.5.d Soit L_1, L_2, L_3 trois points non colinéaires d'un plan P inclus dans Q et ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 les trois droites de $\mathbf{P}(V)$ respectivement associées. D'après **C.5.a**, chaque paire de droites parmis ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 s'intersecte. Ainsi les trois droites sont concourantes ou se coupent en trois points distincts. Si les trois droites sont concourantes alors L_1, L_2, L_3 appartiennent à un α-plan qui coincide avec P car L_1, L_2, L_3 sont linéairement indépendants. Si les trois droites se coupent en trois points distincts représentés par les vecteurs u_1, u_2, u_3 de V, alors L_1, L_2, L_3 sont représentées par $u_2 \wedge u_3$, $u_3 \wedge u_1$ et $u_1 \wedge u_2$. Un point de P est donc donné par

$$\lambda_1 u_2 \wedge u_3 + \lambda_2 u_3 \wedge u_1 + \lambda_3 u_1 \wedge u_2$$

qui est un élément de $\Lambda^2 U$ pour U engendré par u_1, u_2, u_3. Donc ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 appartiennent au plan $\mathbf{P}(U) \subset \mathbf{P}(V)$ et P est un β-plan.