MT242, Cours n° 1, Lundi 7 Février 2000.

Introduction

Prenons un petit exemple prétexte, pour donner une idée de ce qui sera fait pendant le semestre. Considérons la fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \mathrm{e}^{x-2y-x^2}\,.$$

Une première question qui se pose est d'étudier la *continuité* de cette fonction, par exemple au point $(0,0)$; il s'agira de voir si $f(x,y) - f(0,0)$ devient petit lorsque la distance de (x,y) à $(0,0)$ devient très petite. La façon habituelle de mesurer la distance entre ces deux points est de calculer $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Ce type de questions (continuité de fonctions de plusieurs variables) sera étudié au chapitre *Topologie*.

Ce premier point étant réglé on pourra essayer de voir si l'ordre de grandeur de $f(x,y) - f(0,0)$ est le même que celui de r en faisant l'analogue en dimension deux des développements limités. Si on pose $u = x - 2y - x^2$, on aura quand r devient petit

$$f(x,y) = 1 + u + u^2/2 + u^2\varepsilon(u) = 1 + x - 2y - x^2 + \frac{1}{2}\,(x - 2y - x^2)^2 + u^2\varepsilon(u).$$

On veut classer les termes par leur grandeur comparée à une puissance de r. Par exemple $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ sont de l'ordre de r, en ce sens que $0 \le |x|, |y| \le r$, les deux bornes 0 et r pouvant être atteintes quand le point (x,y) décrit le cercle de rayon r. En revanche, x^2, xy ou y^2 sont de l'ordre de r^2. On obtient en reclassant et en négligeant ce qui doit l'être

$$f(x,y) = 1 + (x - 2y) - \frac{1}{2}\,x^2 + 2y^2 - 2xy + r^2\varepsilon_1(r).$$

Le terme de l'ordre de r est une fonction linéaire, la fonction $\ell(x,y) = x - 2y$. On l'appellera la *différentielle* de f au point $(0,0)$; cette notion sera étudiée dans le chapitre *Calcul différentiel*. On obtiendra ainsi une approximation affine de la fonction f pour les points voisins de $(0,0)$, ce que j'écris de façon tout à fait incorrecte

$$f(x,y) \sim a(x,y) = 1 + (x - 2y).$$

On peut ensuite se poser la question du DL d'ordre deux, et chercher à placer f par rapport à l'approximation affine a. On est alors conduit à étudier le signe de l'expression quadratique

$$\mathrm{Q}(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + 2y^2 - 2xy$$

qui est la partie prédominante de la différence $f - a$. Cette étude sera faite au chapitre *Formes quadratiques*. Les conséquences de cette étude permettront de traiter certains problèmes d'extrema locaux, dans la deuxième partie du chapitre calcul différentiel.

Enfin, le chapitre formes quadratiques débouche naturellement sur les espaces euclidiens, qui seront utilisés aussi en topologie. On étudiera des classes spéciales d'endomorphismes des espaces euclidiens, et on montrera que les matrices réelles symétriques sont diagonalisables (chapitre *Endomorphismes des espaces euclidiens*).

Chapitre 1. Formes quadratiques

On notera $\mathbb{K}$ le corps des scalaires des espaces vectoriels considérés. Ce sera presque toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si E est un espace vectoriel, on notera 0_{E} le vecteur nul de cet espace, quand on voudra éviter toute confusion.

1.1. Formes linéaires, dual

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler la structure de l'espace vectoriel des fonctions sur un ensemble non vide X, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On note $\mathcal{F}(\mathrm{X}, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de X dans le corps $\mathbb{K}$; les opérations sur les fonctions sont : $f + g$ (la fonction $x \in \mathrm{X} \to f(x) + g(x)$) et λf (la fonction $x \in \mathrm{X} \to \lambda f(x)$). Le vecteur nul de cet espace est la fonction nulle, ou fonction 0.

Exemple. Les fonctions réelles de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Rappelons aussi la définition de l'indépendance linéaire de vecteurs d'un espace vectoriel E : des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ d'un espace vectoriel E sont (linéairement) indépendants lorsque la propriété suivante est vraie :

si $c_1, \ldots, c_n$ sont des scalaires et si $c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0_{\mathrm{E}}$, ALORS $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Exemple : on a parlé au premier semestre de solutions indépendantes d'une d'équation différentielle. Il s'agit de la même notion d'indépendance linéaire, appliquée à l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 ou C^2, selon le cas.

Une *forme linéaire* sur E est une application $\mathbb{K}$-linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des formes linéaires sur E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. C'est *l'espace dual* de E, noté E^*. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$.

Exemple. Evaluation en un point $t \in \mathbb{R}$. Sur l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$, considérons l'application ℓ_t de E dans $\mathbb{R}$ qui associe à chaque $f \in \mathrm{E}$ le nombre réel $\ell_t(f) = f(t)$; cette application est une forme linéaire sur E.

Noyau, image d'une forme linéaire non nulle

Si $\ell \in \mathrm{E}^*$, ou bien $\ell = 0_{\mathrm{E}^*}$ et dans ce cas $\ell(\mathrm{E}) = \{0\}$, ou bien $\ell(\mathrm{E}) = \mathbb{K}$. Si E est de dimension finie $n > 0$ et si ℓ est une forme linéaire non nulle sur E, la dimension de $\ker(\ell)$ est donc $n - 1$.

Formes linéaires indépendantes

On considère un espace vectoriel E, des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ dans E et des formes linéaires $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathrm{E}^*$. On introduit une matrice $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{\ell,\mathbf{v}}$ de taille $n \times n$ dont les coefficients sont donnés par $\mathrm{M}_{i,j} = \ell_i(v_j)$ pour $i, j = 1, \ldots, n$.

Lemme. *Si cette matrice $\mathrm{M}_{\ell,\mathbf{v}}$ est inversible, alors $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sont indépendantes, et aussi $v_1, \ldots, v_n$.*

En effet si $\sum_{i=1}^n x_i v_i = 0$, et si X est la matrice colonne dont les coefficients sont $x_1, \ldots, x_n$, alors $\mathrm{MX} = 0$, donc $\mathrm{X} = 0$. De même avec un produit par une matrice ligne à gauche, si $\sum_{j=1}^n y_j \ell_j = 0_{\mathrm{E}^*}$, et si Y est la matrice ligne dont les coefficients sont $y_1, \ldots, y_n$, alors $\mathrm{YM} = 0$, donc $\mathrm{Y} = 0$.

Illustration (je dis illustration pour souligner que le résultat obtenu s'obtiendrait plus naturellement autrement). Soient $f, g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ telles que

$$\Delta = \begin{vmatrix} f(0) & g(0) \\ f'(0) & g'(0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Alors f et g sont indépendantes. On forme la matrice M_t avec ℓ_0, ℓ_t, les deux formes linéaires d'évaluation aux points 0 et $t \neq 0$, appliquées aux deux fonctions f et g, puis on fait tendre t vers 0. Alors $t^{-1} \det \mathrm{M}_t$ tend vers Δ, donc $\det \mathrm{M}_t$ est non nul pour t petit, donc f et g sont indépendantes.

Proposition. *Inversement, si $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sont indépendantes il existe $v_1, \ldots, v_n$ tels que la matrice soit inversible.*

Démonstration. On commence en disant que $\ell_1 \neq 0$ puisque les n formes linéaires sont indépendantes ; ceci entraîne l'existence de $v_1 \in \mathrm{E}$ tel que $\ell_1(v_1) \neq 0$. Ensuite désignons par u_2 l'application de E dans $\mathbb{R}^2$ définie par $u_2(v) = (\ell_1(v), \ell_2(v)) \in \mathbb{R}^2$, et considérons $\ell : v \to \det(u_2(v_1), u_2(v))$; c'est une forme linéaire qui est combinaison linéaire de ℓ_1 et ℓ_2 (développer le déterminant par rapport à la deuxième colonne), avec un au moins des coefficients qui est non nul (celui de ℓ_2) donc il existe $v_2 \in \mathrm{E}$ tel que $\det(u_2(v_1), u_2(v_2)) = \ell(v_2) \neq 0$, et on continue ainsi jusqu'à n : pour $n = 3$ on considère $u_3(v) = (\ell_1(v), \ell_2(v), \ell_3(v)) \in \mathbb{R}^3$, puis la forme linéaire $\ell(v) = \det(u_3(v_1), u_3(v_2), u_3(v))$.

On appelle *symbole de Kronecker* $\delta_{i,j}$ le coefficient égal à 1 si $i = j$ et à 0 sinon (en d'autres termes, la matrice des coefficients $(\delta_{i,j})$ est la matrice unité I_n).

Théorème. *Les formes linéaires $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sur* E *sont indépendantes si et seulement si on peut trouver $v_1, \ldots, v_n \in \mathrm{E}$ tels que $\ell_i(v_j) = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n$.*

Démonstration. En effet l'application linéaire u_n de E dans $\mathbb{K}^n$, définie par $u_n(v) = (\ell_1(v), \ldots, \ell_n(v)) \in \mathbb{R}^n$ est surjective : d'après ce qui précède, on peut trouver n vecteurs $v'_1, \ldots, v'_n \in \mathrm{E}$ tels que les images $u_n(v'_j)$, $j = 1, \ldots, n$ soient indépendantes dans $\mathbb{R}^n$. Puisque l'image $u_n(\mathrm{E})$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ qui contient n vecteurs indépendants, on a $u_n(\mathrm{E}) = \mathbb{R}^n$; on peut donc trouver $v_j \in \mathrm{E}$ tel que $u_n(v_j) = \mathbf{e}_j$, le $j$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et ceci pour $j = 1, \ldots, n$.

Base duale d'une base de E

Supposons que l'espace vectoriel E soit de dimension finie $n > 0$, et supposons donnée une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ de l'espace E ; on définit un système $\mathbf{e}^*$ de formes linéaires sur E à partir de cette base, de la façon suivante : pour chaque $i = 1, \ldots, n$, on désigne par e_i^* la fonction scalaire définie sur E, qui associe à chaque vecteur x de E sa $i$ème coordonnée dans la base $\mathbf{e}$, et on pose $\mathbf{e}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$. On peut définir toutes ces fonctions (e_i^*) par une formule (implicite) unique,

$$(*) \qquad \forall x \in \mathrm{E}, \quad x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\, e_i.$$

On remarque que

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}.$$

Proposition. *Le système $\mathbf{e}^*$ est une base de l'espace dual E^*. En conséquence, lorsque* E *est de dimension finie, on a* $\dim \mathrm{E}^* = \dim \mathrm{E}$.

On dit que $\mathbf{e}^*$ est la *base duale* de la base $\mathbf{e}$ de E.

Démonstration. Soit x^* une forme linéaire sur E ; en appliquant x^* à la décomposition d'un vecteur $x \in \mathrm{E}$ quelconque donnée par la formule $(*)$, on obtient

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad x^*(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) x^*(e_i) = \bigl(\sum_{i=1}^{n} x^*(e_i) e_i^*\bigr)(x).$$

En termes de fonctions sur E, ceci signifie que $x^* = \sum_{i=1}^n x^*(e_i)\, e_i^*$, et montre que le système de formes linéaires $\mathbf{e}^*$ est générateur pour l'espace vectoriel dual E^*. Puisque $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$, on sait que les formes linéaires sont indépendantes, d'après ce qui précède, donc $\mathbf{e}^*$ est une base du dual E^*.

Cas de $\mathbb{K}^n$, matrice, base et base duale. Dans ce cas on a la base canonique $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, où $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, etc. Une forme linéaire ℓ sur $\mathbb{K}^n$ a une matrice dans la base canonique qui est une matrice ligne

$$\mathrm{L} = (y_1 \ y_2 \ \ldots \ y_n)$$

où $y_1, \ldots, y_n$ sont égaux à $y_j = \ell(\mathbf{e}_j)$; ce sont aussi les coordonnées de ℓ dans la base canonique duale. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on le représente en général par une matrice colonne X de coefficients $x_1, \ldots, x_n$, et on a en notations matricielles

$$\ell(x) = \mathrm{LX} = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n,$$

en identifiant le résultat de LX, qui est une matrice 1×1, au scalaire qui est le seul coefficient de la matrice.

Proposition. *Soient $\ell_1, \ldots, \ell_k$ des formes linéaires indépendantes sur un espace vectoriel* E *de dimension finie ; posons*

$$\mathrm{M} = \{x \in \mathrm{E} : \forall i = 1, \ldots, k, \ \ell_i(x) = 0\}$$

(c'est l'intersection des noyaux $\ker \ell_j$ des formes linéaires considérées). La dimension du sous-espace vectoriel M *est égale à $\dim \mathrm{E} - k$.*

Démonstration. Donnée en courant. Posons $n = \dim \mathrm{E}$, et complétons le système des formes $(\ell_1, \ldots, \ell_k)$ en une base $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ du dual E^*. Il existe des vecteurs $v_1, \ldots, v_n \in \mathrm{E}$ tels que $\ell_i(v_j) = \delta_{i,j}$. On vérifie que $\mathrm{M} = \mathrm{Vect}(v_{k+1}, \ldots, v_n)$.

Cours n° 2, Mercredi 9 Février 2000.

Résumé de l'épisode précédent : étant donné un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, le dual E^* est l'espace $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$ des applications $\mathbb{K}$-linéaires de E dans $\mathbb{K}$. Les éléments de E^* s'appellent des *formes linéaires*.

Si E est de dimension finie n, le choix d'une base $e_1, \ldots, e_n$ pour E donne des fonctions coordonnées, que l'on note $e_1^*, \ldots, e_n^*$ et qui forment une base de E^*, appelée la base duale de la base $\mathbf{e}$.

Proposition. *Si la matrice $(\ell_i(v_j))$ est inversible, alors les formes $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sont indépendantes (et les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ aussi). Si les formes $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sont indépendantes, on peut trouver des vecteurs $v_1, \ldots, v_n \in \mathrm{E}$ tels que $\ell_i(v_j) = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n$.*

On va expliquer une partie de la proposition précédente dans le cas de $\mathbb{R}^3$; si on a une forme linéaire ℓ_1 sur $\mathbb{R}^3$, on peut l'écrire

$$\ell_1(x) = \ell_{1,1}\, x_1 + \ell_{1,2}\, x_2 + \ell_{1,3}\, x_3$$

pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. La matrice de l'application linéaire ℓ_1 est une matrice ligne dont les coefficients sont les $\ell_{1,j}$. Si on a trois formes linéaires indépendantes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 sur $\mathbb{R}^3$, on peut former une matrice L de taille 3×3 dont la $i$ème ligne est la ligne des coordonnées de ℓ_i dans la base canonique duale. Puisque les formes sont indépendantes, cette matrice est inversible. On voit que si v_1, v_2, v_3 sont les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées sont les trois colonnes de la matrice inverse L^{-1}, alors $\ell_i(v_j) = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j = 1, 2, 3$. En langage matriciel, le résultat de la proposition précédente se ramène donc au calcul de l'inverse d'une matrice.

1.2 Formes quadratiques

Ce sujet est traité dans le chapitre 10 du Liret-Martinais. Une différence avec le livre L-M : ici on prendra plus général que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ qui ne présente aucune différence pour une bonne partie du chapitre, ou même un corps fini comme $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, histoire de faire des choses un peu bizarres de temps en temps (dans Liret-Martinais, on prend aussi un corps général dans la section 6).

Le premier exemple de forme quadratique est donné par le carré d'une forme linéaire ℓ sur un espace E (c'est à dire qu'on décrète que le carré d'une forme linéaire sera une forme quadratique). On va étudier quelques propriétés de la fonction quadratique $\mathrm{Q} : v \in \mathrm{E} \to (\ell(v))^2 \in \mathbb{K}$ qui guideront la définition qui suivra. On a

$$\mathrm{Q}(\lambda v) = \ell^2(\lambda v) = \lambda^2 \ell^2(v) = \lambda^2 \mathrm{Q}(v),$$

$$\mathrm{Q}(v + w) = \ell^2(v + w) = \ell^2(v) + 2\ell(v)\ell(w) + \ell^2(w) = \mathrm{Q}(v) + \psi(v, w) + \mathrm{Q}(w).$$

Il apparaît dans le développement la fonction $\psi(v, w)$, dépendant de deux vecteurs $v, w \in \mathrm{E}$, égale à $2\ell(v)\ell(v)$. On remarque que pour tout w fixé, cette fonction est linéaire en v, et de même si on fixe v, la fonction est linéaire en w. On dit que ψ est *une forme bilinéaire* sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$.

Définition. On dit que Q est une forme quadratique sur E si

$$\mathrm{Q}(\lambda v) = \lambda^2 \mathrm{Q}(v)$$

pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout vecteur $v \in \mathrm{E}$ et si

$$(v, w) \to \psi(v, w) = \mathrm{Q}(v + w) - \mathrm{Q}(v) - \mathrm{Q}(w)$$

est bilinéaire sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$.

On remarque que ψ est symétrique, $\psi(v, w) = \psi(w, v)$. On vérifie facilement qu'une combinaison linéaire de formes quadratiques est une forme quadratique. Puisque les carrés de formes linéaires sont quadratiques, on voit que toute fonction Q sur E qui est de la forme $c_1 \ell_1^2 + \cdots + c_k \ell_k^2$ est une forme quadratique. La *méthode de Gauss* nous donnera la réciproque : toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie est combinaison linéaire de carrés de formes linéaires.

On voit que $4\mathrm{Q}(v) = \mathrm{Q}(2v) = 2\mathrm{Q}(v) + \psi(v, v)$. Si $2 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathrm{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$, on voit que $\mathrm{Q}(v) = \frac{1}{2}\psi(v, v)$.

Théorème. *La fonction* Q *est une forme quadratique sur* E *si et seulement s'il existe une forme bilinéaire* φ *sur* $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ *telle que* $\mathrm{Q}(v) = \varphi(v, v)$ *pour tout* $v \in \mathrm{E}$.

On démontrera seulement une des deux directions : si φ est bilinéaire, et si on pose $\mathrm{Q}(v) = \varphi(v, v)$, alors Q est une forme quadratique. D'abord, il est clair que $\mathrm{Q}(\lambda v) = \varphi(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \varphi(v, v) = \lambda^2 \mathrm{Q}(v)$ en faisant sortir un λ de chaque côté. Ensuite,

$$\mathrm{Q}(v+w) = \varphi(v+w, v+w) = \varphi(v, v) + \varphi(v, w) + \varphi(w, v) + \varphi(w, w)$$

donc

$$\mathrm{Q}(v+w) - \mathrm{Q}(v) - \mathrm{Q}(w) = \varphi(v, w) + \varphi(w, v)$$

est bilinéaire. On a ainsi vérifié que Q est quadratique.

Théorème bis. (on suppose $2 1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathrm{K}}$) *La fonction* Q *est une forme quadratique sur* E *si et seulement s'il existe une forme bilinéaire symétrique* φ *sur* $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ *telle que* $\mathrm{Q}(v) = \varphi(v, v)$ *pour tout* $v \in \mathrm{E}$. *La forme* φ **symétrique** *est unique.*

On supposera toujours $2 \neq 0$ dans ce qui suit, et on choisira toujours une forme symétrique ; on dit que l'unique forme bilinéaire symétrique associée à Q est la *forme polaire* de Q.

Démonstration. L'une des deux directions est déjà donnée par le théorème précédent. On a vu aussi avant le théorème que si $2 \neq 0$, on peut écrire $\mathrm{Q}(v) = \frac{1}{2}\psi(v, v)$, où ψ est la forme bilinéaire, symétrique, qui provient de la définition des formes quadratiques. On prend donc simplement $\varphi(v, w) = \frac{1}{2}\psi(v, w)$. Il résulte du calcul fait pour la démonstration du théorème précédent que si $\mathrm{Q}(v) = \varphi(v, v)$ avec φ symétrique, alors

$$\varphi(v, w) = \frac{1}{2}\big(\varphi(v, w) + \varphi(w, v)\big) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{Q}(v+w) - \mathrm{Q}(v) - \mathrm{Q}(w)\big).$$

Cette formule s'appelle *formule de polarisation*. Elle montre que $\varphi(v, w)$ est complètement déterminé à partir de Q, donc φ (symétrique) est unique.

Exemples.

1. Si E désigne l'espace des fonctions réelles de classe C^2 sur $[0, 1]$, considérons

$$\mathrm{Q}(f) = \int_0^1 f(t) f''(t)\, dt.$$

Pour voir qu'il s'agit d'une forme quadratique, on peut appliquer le premier théorème, qui ne demande pas que la forme bilinéaire φ soit symétrique. Si on pose

$$\varphi_1(f, g) = \int_0^1 f(t) g''(t)\, dt,$$

il est clair que φ_1 est bilinéaire et que $\mathrm{Q}(f) = \varphi_1(f, f)$ pour toute fonction $f \in \mathrm{E}$. Une autre solution est de prendre $\varphi_2(f, g) = \varphi_1(g, f)$, et si on veut la forme polaire on prendra

$$\varphi(f, g) = \frac{1}{2}\big(\varphi_1(f, g) + \varphi_2(f, g)\big) = \frac{1}{2}\int_0^1 (f(t) g''(t) + f''(t) g(t))\, dt,$$

2. Exemple fondamental : le carré de la norme euclidienne. On pose

$$\mathrm{Q}(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. La forme bilinéaire polaire est facile à trouver : c'est le produit scalaire de deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x, y) = x \,.\, y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

3. Si $v = (x, y, z, t)$ et $v' = (x', y', z', t')$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^4$, posons

$$\mathrm{Q}(v) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2, \quad \varphi(v, v') = xx' + yy' + zz' - tt'.$$

On définit ainsi une forme quadratique et sa forme polaire sur $\mathbb{R}^4$ (et $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$). Cette forme quadratique met en évidence des phénomènes intéressants que nous étudierons plus loin. On la rencontre dans l'étude de *l'espace temps* de la relativité restreinte.

La méthode de Gauss

Exemple traité au tableau. On montre la méthode de Gauss pour transformer l'expression

$$\mathrm{Q}(v) = 2x^2 - 3y^2 + z^2 + 4xy - 6xz + 5yz$$

où $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, en combinaison linéaire de trois carrés de formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$, dont on montre qu'elles sont indépendantes en vérifiant que leur matrice est triangulaire inversible.

Théorème. *($2 \neq 0$) Si Q est une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie n, il existe des formes linéaires indépendantes $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathrm{E}^*$ et des coefficients $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ tels que*

$$\mathrm{Q} = \sum_{i=1}^{n} c_i \ell_i^2.$$

Démonstration. Par récurrence sur la dimension de l'espace vectoriel E. Si E est de dimension 1, engendré par un vecteur de base unique e, tout vecteur v de E est de la forme λe et $\mathrm{Q}(v) = \lambda^2 \mathrm{Q}(e) = c\lambda^2$. La fonction $\ell(\lambda e) = \lambda$ est une forme linéaire non nulle sur E, et $\mathrm{Q} = c\ell^2$.

On suppose le résultat vrai pour tout espace vectoriel de dimension $< n$, et on considère une forme quadratique Q sur un espace vectoriel E de dimension $n > 1$. Si Q est nulle sur E c'est facile : on prend n'importe quelle base duale (e_j^*) et la combinaison linéaire nulle des carrés de ces formes linéaires indépendantes ; sinon on choisit $v_1 \in \mathrm{E}$ avec $c_1 = \mathrm{Q}(v_1) \neq 0$ et on choisit un supplémentaire F dans E de l'espace de dimension 1 engendré par v_1. On a alors

$$\mathrm{E} = \mathbb{K} v_1 \oplus \mathrm{F}.$$

Pour tout vecteur $v \in \mathrm{E}$, on peut écrire de façon unique $v = xv_1 + w$, avec $x \in \mathbb{K}$ et $w \in \mathrm{F}$; l'application $v \to x \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire ℓ sur E, est l'application $v \to w$ est l'application linéaire P de projection sur le deuxième facteur de la somme directe. On a donc

$$\mathrm{Q}(v) = \mathrm{Q}(xv_1 + w) = x^2 \mathrm{Q}(v_1) + 2x\varphi(v_1, w) + \mathrm{Q}(w),$$

où φ est la forme polaire de Q. On notera que l'application $v \to \varphi(v_1, w) = \varphi(v_1, \mathrm{P}(v))$ est une forme linéaire m sur E (composition de l'application linéaire $v \to \mathrm{P}v$ et de la forme linéaire $w \to \varphi(v_1, w)$). Posons $c_1 = \mathrm{Q}(v_1) \neq 0$ et réécrivons

$$\mathrm{Q}(v) = c_1 x^2 + 2x\varphi(v_1, w) + \mathrm{Q}(w) = c_1 \bigl(x + c_1^{-1} \varphi(v_1, w)\bigr)^2 - c_1^{-1} \varphi(v_1, w)^2 + \mathrm{Q}(w).$$

Posons $\ell_1(v) = x + c_1^{-1}\varphi(v_1, w) = \ell(v) + c_1^{-1}m(v)$. Il s'agit d'une forme linéaire sur E. On vérifie que $\ell_1(v_1) = 1$. Posons par ailleurs pour tout vecteur $w \in \mathrm{F}$

$$q(w) = -c_1^{-1}\varphi(v_1, w)^2 + \mathrm{Q}(w).$$

Avant d'aller plus loin, retenons que

$$\mathrm{Q}(v) = c_1\,\ell_1(v)^2 + q(w) = c_1\,\ell_1(v)^2 + q(\mathrm{P}v).$$

La fonction q est une forme quadratique sur l'espace F, et F est de dimension $< n$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des formes linéaires indépendantes $m_2, \dots, m_n$ sur F et des coefficients $c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall w \in \mathrm{F}, \quad q(w) = c_2\,m_2(w)^2 + \dots + c_n\,m_n(w)^2.$$

On a donc

$$\mathrm{Q}(v) = c_1\ell_1(v)^2 + q(\mathrm{P}v) = c_1\,\ell_1(v)^2 + c_2\,m_2(\mathrm{P}v)^2 + \dots + c_n\,m_n(\mathrm{P}v)^2.$$

Pour $j = 2, \dots, n$ posons $l_j(v) = m_j(\mathrm{P}v)$. Il s'agit d'une forme linéaire sur E (composition d'applications linéaires) et on a obtenu

$$\mathrm{Q}(v) = c_1\,\ell_1(v)^2 + c_2\,\ell_2(v)^2 + \dots + c_n\,\ell_n(v)^2.$$

Il reste seulement à voir que les formes linéaires $\ell_1, \dots, \ell_n$ sont indépendantes. Puisque $m_2, \dots, m_n$ sont des formes linéaires sur F qui sont indépendantes, on peut trouver des vecteurs $v_2, \dots, v_n \in \mathrm{F}$ tels que la matrice B de taille $(n-1)\times(n-1)$ égale à $(m_i(v_j))_{i,j\geq 2}$ soit inversible. D'autre part $\mathrm{P}v_1 = 0$ donc $\ell_j(v_1) = m_j(\mathrm{P}v_1) = 0$ pour tout $j = 2, \dots, n$. On a $v_j = \mathrm{P}v_j$ pour $j \geq 2$, donc $\ell_i(v_j) = m_i(v_j)$ pour $i, j \geq 2$. La matrice $\mathrm{M} = (\ell_i(v_j))$ est donc de la forme

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix}$$

où B est de taille $(n-1) \times (n-1)$, le 0 représente une colonne de $n-1$ zéros et $*$ une ligne inconnue de $n-1$ scalaires. Puisque B est inversible, il est clair que M est inversible, donc les formes linéaires $\ell_1, \dots, \ell_n$ sont indépendantes.