MT242, Cours n° 3, Lundi 14 Février 2000.

Résumé de l'épisode précédent

On supposera toujours que $2\,1_{\mathbb{K}} := 1_{\mathrm{K}} + 1_{\mathrm{K}} \neq 0_{\mathrm{K}}$. Dans ce cas la donnée d'une forme quadratique Q sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E équivaut à la donnée d'une forme bilinéaire **symétrique** qu'on notera φ_{Q}, telle que $\varphi_{\mathrm{Q}}(v,v) = \mathrm{Q}(v)$ pour tout vecteur $v \in \mathrm{E}$. Cette forme bilinéaire φ_{Q} est uniquement déterminée à partir de Q par la formule

$$\forall v, w \in \mathrm{E}, \quad \varphi(v,w) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{Q}(v+w) - \mathrm{Q}(v) - \mathrm{Q}(w)\big).$$

C'est la *forme polaire* de la forme quadratique Q.

Si E est de dimension finie n, la décomposition de Gauss permet d'exprimer Q sous la forme $c_1\ell_1^2 + \cdots + c_n\ell_n^2$, où $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sont des formes linéaires sur E, linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel dual E^*, et $c_1, \ldots, c_n$ des scalaires.

Rappelons le début de la démonstration de l'existence de la décomposition de Gauss : si $\mathrm{Q} \neq 0$, on *choisit* un vecteur $v_1 \in \mathrm{E}$ tel que $c_1 = \mathrm{Q}(v_1) \neq 0$, et on *choisit* un supplémentaire F de la droite $\mathbb{K}v_1$. Comme il y a en général une infinité de choix possibles, il y a une infinité de résultats différents pour la méthode de Gauss.

A partir de la décomposition de Gauss de Q,

$$\forall v \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{Q}(v) = c_1\ell_1(v)^2 + \cdots + c_n\ell_n(v)^2$$

on peut trouver une expression pour la forme polaire φ_{Q} de Q,

$$\forall v, w \in \mathrm{E}, \quad \varphi_{\mathrm{Q}}(v,w) = c_1\ell_1(v)\ell_1(w) + \cdots + c_n\ell_n(v)\ell_n(w).$$

Un exemple. L'équation du second degré

On veut résoudre l'équation

$$\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

dans $\mathbb{K}$ (les coefficients a, b, c sont dans $\mathbb{K}$, on cherche $x \in \mathbb{K}$. On suppose $a \neq 0$ pour avoir une vraie équation du second degré). Pour se ramener au cadre de ce chapitre, on considère la forme quadratique sur $\mathbb{K}^2$ définie pour tout vecteur $v = (x,t) \in \mathbb{K}^2$ par

$$\mathrm{Q}(v) = ax^2 + bxt + ct^2$$

dont les valeurs pour $t = 1$ donnent $\mathrm{P}(x)$. On écrit la décomposition de Gauss,

$$\mathrm{Q}(v) = a\big(x + \frac{bt}{2a}\big)^2 - \frac{b^2t^2}{4a} + ct^2 = a\big(x + \frac{bt}{2a}\big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\,t^2,$$

qui donne pour $t = 1$

$$\mathrm{P}(x) = a\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\cdot$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors $\mathrm{P}(x) = 0$ si et seulement si

$$4a^2\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 = (2ax + b)^2 = \Delta.$$

Pour qu'il existe des solutions dans $\mathbb{K}$, il est nécessaire que Δ soit le carré d'un élément de $\mathbb{K}$, disons $\Delta = d^2$ pour un $d \in \mathbb{K}$. L'équation $(2ax+b)^2 - d^2 = 0$ devient

$$(2ax + b + d)(2ax + b - d) = 0$$

qui admet pour seules solutions les valeurs $x_1 = (-b-d)/(2a)$ et $x_2 = (-b+d)/(2a)$ (qui sont distinctes si $d \neq 0$).

Prenons l'exemple de $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Les éléments du corps sont $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, dont les carrés sont $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{4}$, $\overline{4}$, $\overline{1}$. Une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ admet donc des solutions si et seulement si $\Delta = \overline{0}, \overline{1}, \overline{4}$. Par exemple, si on veut résoudre $4x^2 + x + 2 = 0$ modulo 5, on calcule $\Delta = \overline{1}^2 - 32\,\overline{1} = \overline{4}$. Alors $\Delta = \overline{2}^2$ est bien un carré, et les solutions sont $x_1 = (-\overline{1} - \overline{2})/\overline{3} = \overline{4}$ et $x_2 = (-\overline{1} + \overline{2})/\overline{3} = \overline{2}$.

Pratique de la méthode de Gauss : le cas sans terme carré au départ

Prenons par exemple la forme quadratique Q définie sur $\mathbb{R}^4$ par

$$\forall v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad \mathrm{Q}(v) = 3xy + yz + 2zx - zt.$$

Le problème est de trouver un vecteur v_1 tel que $\mathrm{Q}(v_1) \neq 0$ pour pouvoir démarrer. Souvent, il suffit de prendre un des vecteurs de la base canonique $\mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$; mais ici $\mathrm{Q}(\mathbf{e}_j) = 0$ pour $j = 1, 2, 3, 4$. On observe que $\mathrm{Q}(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = 3xy$ est non nul si $xy \neq 0$. On va donc tout simplement prendre ici $v_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = (1, 1, 0, 0)$ et on voit que pour ce vecteur $\mathrm{Q}(v_1) = 3 \neq 0$. On choisit aussi un supplémentaire F aussi simple que possible pour $\mathbb{R}v_1$, en prenant $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$. Les coordonnées dans la nouvelle base $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ seront ξ, η, z, t, avec $x = \xi + \eta$ et $y = \xi - \eta$. On fait les calculs avec les variables ξ, η, z, t et on revient aux variables x, y, z, t à la fin, en écrivant $\xi = (x+y)/2$, $\eta = (x-y)/2$.

Le noyau et le rang d'une forme quadratique

On dit que v est dans le noyau de Q si

$$\forall w \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{Q}(w + v) = \mathrm{Q}(w).$$

On notera N(Q) le noyau de Q.

Exemple. Prenons la forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^3$ définie par $\mathrm{Q}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$. On voit que $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ est dans le noyau de cette forme quadratique.

Supposons que $v \in \mathrm{N(Q)}$. En prenant $w = v$, on voit que si $v \in \mathrm{N(Q)}$, alors $4\mathrm{Q}(v) = \mathrm{Q}(v + v) = \mathrm{Q}(v)$, donc $\mathrm{Q}(v) = 0$. **La réciproque est fausse.** Si on utilise la forme polaire et si $v \in \mathrm{N(Q)}$, on a pour tout $w \in \mathrm{E}$

$$\mathrm{Q}(w) = \mathrm{Q}(w + v) = \mathrm{Q}(w) + 2\varphi_{\mathrm{Q}}(w, v) + \mathrm{Q}(v) = \mathrm{Q}(w) + 2\varphi_{\mathrm{Q}}(w, v),$$

donc $\varphi_{\mathrm{Q}}(w, v) = 0$. On en déduit que

Le noyau N(Q) *est l'ensemble des vecteurs* $v \in \mathrm{E}$ *tels que*

$$\forall w \in \mathrm{E}, \quad \varphi_{\mathrm{Q}}(w, v) = 0.$$

Proposition. *Supposons que* $\mathrm{Q} = c_1\ell_1^2 + \cdots + c_k\ell_k^2$, *avec des formes linéaires* $\ell_1, \ldots, \ell_k$ *indépendantes et des coefficients* $c_1, \ldots, c_k$ *tous* **non nuls**. *Le noyau* N(Q) *est égal à*

$$\{v \in \mathrm{E} : \ell_1(v) = 0, \ell_2(v) = 0, \ldots, \ell_k(v) = 0\}.$$

Il en résulte que $\mathrm{N(Q)}$ *est est un sous-espace vectoriel de dimension* $n - k$.

Démonstration. La forme polaire de Q s'exprime par

$$\varphi_{\mathrm{Q}}(v, w) = c_1 \ell_1(v) \ell_1(w) + \cdots + c_k \ell_k(v) \ell_k(w) =$$

$$\big(c_1 \ell_1(v) \ell_1 + \cdots + c_k \ell_k(v) \ell_k\big)(w).$$

On voit que v est dans le noyau de Q si et seulement si la forme linéaire $c_1 \ell_1(v) \ell_1 + \cdots + c_k \ell_k(v) \ell_k$ est nulle. Puisque les formes $\ell_1, \ldots, \ell_k$ sont linéairement indépendantes, ceci se produit si et seulement si tous les coefficients $c_j \ell_j(v)$ sont nuls. Puisque les c_j sont non nuls, on voit que $v \in \mathrm{N(Q)}$ équivaut à $\ell_1(v) = \cdots = \ell_k(v) = 0$.

Quand on pratique la méthode de Gauss, on ne cherche pas les formes linéaires $\ell_{k+1}, \ldots, \ell_n$ qui auraient des coefficients $c_j = 0$. On voit que quel que soit le chemin suivi pour appliquer la méthode de Gauss, le nombre k des formes linéaires indépendantes avec coefficient c_j non nul ne dépend que de Q, puisque $k = n - \dim \mathrm{N(Q)}$. Ce nombre k s'appelle *le rang de* Q.

Si $\mathrm{Q} = c_1 \ell_1^2 + \cdots + c_n \ell_n^2$, *où* $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathrm{E}^*$ *sont linéairement indépendantes, le nombre des indices* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *tels que* $c_j \neq 0$ *est égal au rang de* Q.

1.3. Formes bilinéaires

Définition 1.3.1. Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$; on dit qu'une application β de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ dans $\mathbb{K}$ est une *forme bilinéaire* sur $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ si

– pour tout $v_0 \in \mathrm{E}$ fixé, l'application $w \to \beta(v_0, w)$ est linéaire de F dans $\mathbb{K}$,
– pour tout $w_0 \in \mathrm{F}$ fixé, l'application $v \to \beta(v, w_0)$ est linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Cas de la dimension finie. Matrice d'une forme bilinéaire par rapport à deux bases

On suppose que E et F sont de dimensions finies m et n, que $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ est une base de E et $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Une forme bilinéaire β sur $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ est complètement connue si on connaît toutes les valeurs des $\beta(e_i, f_j)$, pour $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$. En effet, si $v = \sum_{i=1}^m x_i e_i \in \mathrm{E}$ et $w = \sum_{j=1}^n y_j f_j \in \mathrm{F}$, on obtiendra en développant par bilinéarité

$$\beta(v, w) = \sum_{i,j} \beta(e_i, f_j)\, x_i y_j.$$

On introduit la matrice B de la forme bilinéaire par rapport aux bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$, en posant

$$\mathrm{B}_{i,j} = \beta(e_i, f_j), \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

On notera $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}(\beta, \mathbf{e}, \mathbf{f})$. Si X est le vecteur colonne des coordonnées de v dans la base $\mathbf{e}$ et Y celui des coordonnées de w dans la base $\mathbf{f}$, on a

$$\beta(v, w) = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{B}\,\mathrm{Y},$$

en identifiant la matrice ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{B}\,\mathrm{Y}$, qui est de taille 1×1, au scalaire qui est son unique coefficient.

Changement de base pour une forme bilinéaire

Supposons que $X = P_E X'$ et $Y = P_F Y'$ expriment des changements de base dans E et dans F respectivement. On aura alors

$$\beta(v, w) = {}^t(P_E X') \, B \, P_F \, Y' = {}^tX' \, {}^tP_E \, B \, P_F \, Y' = {}^tX' \, ({}^tP_E \, B \, P_F) \, Y'$$

ce qui montre que la matrice B' dans les nouvelles bases est donnée par

$$B' = {}^tP_E \, B \, P_F.$$

Dans le cas où $E = F$, on choisit le plus souvent de prendre la même base $\mathbf{e}$ pour les deux côtés. Le changement de base s'exprime alors par $B' = {}^tP \, B \, P$.

Le cas bilinéaire symétrique

Ici on prend $E = F$, de dimension finie $n = \dim E$, et on suppose que β est une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$, c'est à dire que $\beta(v, w) = \beta(w, v)$ pour tous vecteurs $v, w \in E$. Si $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et si $B = \mathrm{Mat}(\beta, \mathbf{e}) = \mathrm{Mat}(\beta, \mathbf{e}, \mathbf{e})$, la matrice B est symétrique puisque

$$B_{i,j} = \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \beta(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = B_{j,i}.$$

Réciproquement, si la matrice B est symétrique, alors β est symétrique puisque

$$\beta(v, w) = {}^tX \, B \, Y = {}^t({}^tX \, B \, Y) = {}^tY \, B \, X = \beta(w, v).$$

Si β est une forme bilinéaire symétrique, on peut définir une forme quadratique Q_β sur E en posant $Q_\beta(v) = \beta(v, v)$ pour tout vecteur $v \in E$. Evidemment, β est la forme polaire de Q_β. On va exprimer le noyau de Q_β, qu'on appelle aussi le noyau de β, de façon matricielle. Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit B la matrice de β dans la base $\mathbf{e}$ (deux fois) ; soient v, w deux vecteurs dont les matrices colonne des coordonnées sont X et Y ; dire que $v \in N(Q_\beta)$ signifie que $\beta(w, v) = 0$ pour tout w, ce qui donne matriciellement

$$\forall Y, \quad {}^tY \, B \, X = 0.$$

Si $BX = 0$, on aura bien $\beta(w, v) = {}^tY \, B \, X = 0$ pour tout w. Inversement, si $v \in N(Q)$ on obtient en prenant $w = e_i$, le $i$ème vecteur de la base $\mathbf{e}$

$$0 = {}^tY^{(i)} \, B \, X = (BX)_i$$

où $(BX)_i$ est la $i$ème coordonnée de BX et $Y^{(i)}$ la matrice colonne des coordonnées de e_i. On voit donc que

Le vecteur v, de matrice colonne X *dans la base* $\mathbf{e}$, *appartient au noyau de* Q_β *(ou au noyau de β) si et seulement si*

$$BX = 0.$$

La dimension de l'espace des solutions X de l'équation $BX = 0$ est $n - \mathrm{rang}\, B$, et elle est égale à la dimension de $N(Q_\beta)$; mais on sait que la dimension du noyau est $n - \mathrm{rang}\, Q_\beta$. Il en résulte que

Le rang d'une forme quadratique (ou d'une forme bilinéaire symétrique) est égal au rang de sa matrice dans une base quelconque de E.

Cours n° 4, Mercredi 16 Février 2000.

Résumé de l'épisode précédent

On aura toujours $1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \neq 0$, un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, une forme bilinéaire symétrique β sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ et la forme quadratique associée, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_\beta$ définie par $\mathrm{Q}(v) = \beta(v, v)$ pour tout vecteur $v \in \mathrm{E}$.

La plupart des notions sont définies en double, pour le couple β, Q. Le noyau (de β, ou de Q) est l'ensemble des vecteurs v tels que pour tout $w \in \mathrm{E}$, on ait $\beta(v, w) = 0$. Si E est de dimension finie, le rang (de β, ou de Q) est égal à $\dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{N}(\mathrm{Q})$.

Si E est de dimension finie et si on a une décomposition $\mathrm{Q} = c_1 \ell_1^2 + \cdots + c_k \ell_k^2$, avec des coefficients $c_1, \ldots, c_k$ tous non nuls et des formes linéaires indépendantes, alors

$$\beta(v, w) = c_1 \ell_1(v) \ell_1(w) + \cdots + c_k \ell_k(v) \ell_k(w)$$

et

$$\mathrm{N}(\beta) = \mathrm{N}(\mathrm{Q}) = \{v \in \mathrm{E} : \ell_1(v) = \cdots = \ell_k(v) = 0\}.$$

Il en résulte que N(Q) est un sous-espace vectoriel de E, de dimension $n - k$. On a donc $k = \operatorname{rang} \beta$ pour toute façon d'effectuer la décomposition de Gauss.

Si E est de dimension finie, avec une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ et si $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}(\beta, \mathbf{e})$ est la matrice de β (on dit aussi $\mathrm{Mat}(\mathrm{Q}, \mathbf{e})$, la matrice de Q dans la base $\mathbf{e}$) alors $\beta(v, w) = {}^t\mathrm{XBY}$ si X, Y sont les vecteurs colonne des coordonnées de v et w. En particulier v est dans le noyau si et seulement si $\mathrm{BX} = 0$, ce qui implique que le rang de β est égal au rang de B.

Formes bilinéaires symétriques non dégénérées.

Définition 1.3.2. On dit qu'une forme bilinéaire symétrique β sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ est *non dégénérée* si son noyau N_β est réduit à $\{0_\mathrm{E}\}$. Dans les mêmes conditions on dit aussi que la forme quadratique Q_β associée est non dégénérée.

Si E est de dimension finie, on voit que β est non dégénérée si et seulement si son rang est égal à $\dim \mathrm{E}$; cela se produit si et seulement si la matrice B dans une base $\mathbf{e}$ est inversible. Dans ce cas la matrice dans n'importe quelle autre base de E sera encore inversible (clair, par exemple par la formule de changement de base).

Exemples 1.3.1.

1. La forme $\mathrm{Q}(v) = \sum_{j=1}^n x_j^2$ sur $\mathbb{R}^n$ est non dégénérée, par exemple parce que sa matrice dans la base canonique est la matrice identité I_n, qui est inversible.

2. Pour $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et $v' = (x', y', z', t')$ posons

$$\beta_2(v, v') = xx' + yy' + zz' - tt', \quad \mathrm{Q}_2(v) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

On voit que la matrice B_2 dans la base canonique est diagonale, avec valeurs diagonales non nulles (trois 1 et un -1), donc B_2 est inversible et β_2 est non dégénérée. Pourtant il se passe des choses un peu bizarres avec cette forme et sa forme quadratique associée Q_2. Si on prend le vecteur non nul $v_0 = (1, 0, 0, 1)$, on voit que $\mathrm{Q}_2(v_0) = \beta_2(v_0, v_0) = 0$.

3. Si on pose maintenant pour tout $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\mathrm{Q}(v) = x^2 + y^2,$$

on obtient une forme dégénérée sur $\mathbb{R}^3$. On voit que son rang est $2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$, par exemple d'après les remarques sur la lecture du rang à partir d'une décomposition en carrés.

Orthogonalité pour une forme bilinéaire symétrique

On fixe une forme bilinéaire symétrique β sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$. On dit que deux vecteurs v et w sont orthogonaux *par rapport* à β, ou bien β-orthogonaux si $\beta(v, w) = 0$. On a aussi (et heureusement !) $\beta(w, v) = 0$ puisque β est symétrique. On notera $v \perp_\beta w$.

Si A est un sous-ensemble de E, on pose

$$\mathrm{A}^\perp = \{v \in \mathrm{E} : \forall w \in \mathrm{A}, \quad \beta(v, w) = 0\}.$$

L'ensemble $\mathrm{A}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E (vérifié au tableau : facile). Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{E}$, on a $\mathrm{B}^\perp \subset \mathrm{A}^\perp$ (presque évident). On a toujours $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}^{\perp\perp}$ (facile). On a aussi

$$\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)^\perp = \{v_1, \ldots, v_k\}^\perp.$$

En effet, il est clair que $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)^\perp \subset \{v_1, \ldots, v_k\}^\perp$ puisque $\mathrm{A} = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset \mathrm{F} = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$. Inversement, si $v \in \mathrm{A}^\perp$, on va montrer que $v \in \mathrm{F}^\perp$. Si w est un vecteur quelconque de F, on peut écrire $w = \sum_{j=1}^k x_i v_i$, donc

$$\beta(v, w) = \sum_{j=1}^k x_j \beta(v, v_j) = 0$$

puisque $v \perp_\beta v_j$ pour tout $j = 1, \ldots, k$. On a donc montré que v est β-orthogonal à F.

On voit que $\mathrm{N}(\beta) = \mathrm{E}^\perp$.

On peut calculer la dimension de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E, moyennant une hypothèse simple.

Lemme 1.3.1. *On suppose que β est une forme bilinéaire sur* $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$*, où* E *est de dimension finie. Pour tout sous-espace vectoriel* F *de* E*, tel qu'aucun vecteur non nul* $x \in \mathrm{F}$ *ne puisse être orthogonal à* E *tout entier, (c'est à dire que* $\mathrm{F} \cap \mathrm{N}(\beta) = \{0_\mathrm{E}\}$*) on a*

$$\dim \mathrm{F}^\perp = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}.$$

Démonstration. Supposons que F soit de dimension k, muni d'une base $(f_1, \ldots, f_k)$. On sait que

$$\mathrm{F}^\perp = \{f_1, \ldots, f_k\}^\perp = \{w \in \mathrm{E} : \beta(f_i, w) = 0, \ i = 1, \ldots, k\}.$$

Pour chaque $i = 1, \ldots, k$, soit ℓ_i la forme linéaire sur E définie par $\ell_i(w) = \beta(e_i, w)$; on a aussi $\mathrm{F}^\perp = \{w \in \mathrm{E} : \ell_i(w) = 0, \ i = 1, \ldots, k\}$. Si nous savons que $\ell_1, \ldots, \ell_k$ sont indépendantes, on en déduira que $\dim \mathrm{F}^\perp = \dim \mathrm{E} - k = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}$.

Si $x_1 \ell_1 + \cdots + x_k \ell_k = 0$, on a

$$\forall w \in \mathrm{E}, \quad \sum_i^k x_i \ell_i(w) = \sum_i^k x_i \beta(f_i, w) = \beta(x_1 f_1 + \cdots + x_k f_k, w) = 0$$

pour tout $w \in \mathrm{E}$, c'est à dire que $v = x_1 f_1 + \cdots + x_k f_k \in \mathrm{N}(\beta)$. On a donc $v \in \mathrm{F} \cap \mathrm{N}(\beta)$, donc $v = 0_\mathrm{E}$ d'après l'hypothèse du lemme, et $x_1 = \cdots = x_k = 0$ puisque $(f_1, \ldots, f_k)$ est linéairement indépendant. On a montré que $\ell_1, \ldots, \ell_k$ sont indépendantes.

Orthogonalité pour une forme bilinéaire non dégénérée

Théorème 1.3.2. *On suppose que* $\dim \mathrm{E} < +\infty$ *et que* β *est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur* $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$*. Pour tout sous-espace vectoriel* F *de* E*, on a*

$$\dim \mathrm{F}^{\perp} = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}\,; \quad (\mathrm{F}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{F}.$$

Démonstration. Le lemme 1.3.1 nous donne la relation des dimensions, puisqu'ici $\mathrm{N}(\beta) = \{0\}$, donc $\mathrm{F} \cap \mathrm{N}(\beta) = \{0\}$. On a toujours $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}^{\perp\perp}$, mais en appliquant la relation de dimension à $\mathrm{F}^{\perp}$, on a $\dim \mathrm{F}^{\perp\perp} = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}^{\perp} = \dim \mathrm{F}$, donc les deux sous-espaces F et $\mathrm{F}^{\perp\perp}$ sont égaux : ils ont la même dimension et l'un est contenu dans l'autre.

Supposons maintenant que β soit une forme bilinéaire symétrique sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$, et que F soit un sous-espace vectoriel de E. On peut considérer la restriction de β au produit $\mathrm{F} \times \mathrm{F}$. Dire que cette restriction β_{F} est non dégénérée sur $\mathrm{F} \times \mathrm{F}$ signifie exactement qu'aucun vecteur non nul de F ne peut être orthogonal à F tout entier, ce qui se traduit par

$$\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^{\perp} = \{0_{\mathrm{E}}\}.$$

Exemple. Reprenons la forme bilinéaire non dégénérée β_2 sur $\mathbb{R}^4$ de l'exemple 1.3.1.2. Considérons le vecteur non nul $v_0 = (0,0,1,1)$. On a $\beta_2(v_0, v_0) = 0$, donc le vecteur non nul v_0 est β_2-orthogonal à lui-même ! De plus si on pose $\mathrm{F} = \mathbb{R}v_0$ on voit que la restriction β_{F} de β_2 à $\mathrm{F} \times \mathrm{F}$ est nulle, donc β_{F} est dégénérée.

Théorème 1.3.3. *Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie,* β *une forme bilinéaire symétrique sur* $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ *et* F *un sous-espace vectoriel de* E *; la restriction* β_{F} *de* β *à* $\mathrm{F} \times \mathrm{F}$ *est non dégénérée si et seulement si* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$*.*

Démonstration. Supposons d'abord la restriction β_{F} non dégénérée. On sait alors que l'on a $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^{\perp} = \{0\}$. *A fortiori*, aucun vecteur non nul de F ne peut être orthogonal à l'espace E tout entier, donc le lemme 1.3.1 s'applique, et permet de voir que $\dim \mathrm{F}^{\perp} = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}$. Puisque l'intersection de F et $\mathrm{F}^{\perp}$ est nulle et que la somme des dimensions est la dimension de E on a bien que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$.

Réciproquement, dire que la somme de F et $\mathrm{F}^{\perp}$ est une somme directe sous-entend que $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^{\perp} = \{0\}$, ce qui équivaut à dire que β_{F} est non dégénérée.

Exemple.

Reprenons $\mathrm{Q}_2(v) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$. Cette forme est non dégénérée. L'orthogonal de $\mathrm{F} = \mathbb{R}v_0$ est bien de dimension $3 = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F} = 4 - 1$ puisque Q_2 est non dégénérée, mais $\mathbb{R}v_0 \subset (\mathbb{R}v_0)^{\perp}$ parce que v_0 est orthogonal à lui-même, donc la somme $\mathrm{F} + \mathrm{F}^{\perp}$ n'est pas directe. Effectivement, la restriction de β à $\mathrm{F} = \mathbb{R}v_0$ est dégénérée.

Posons $v_1 = (1,2,0,1)$ et $v_2 = (1,0,2,1)$. Si $\mathrm{F}_2 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, on vérifie que β_{F_2} (la restriction de β_2) est non dégénérée (écrire la matrice de β_{F_2} dans la base (v_1, v_2) ; elle est diagonale inversible). On aura dans ce cas $\mathbb{R}^4 = \mathrm{F}_2 \oplus \mathrm{F}_2^{\perp}$.

Si on prend $\mathrm{F}_3 = \mathrm{Vect}(v_0, v_3)$ avec $v_3 = (2,1,0,1)$ on a encore β_{F_3} non dégénérée, bien que F_3 contienne le “mauvais” vecteur v_0.

Théorème 1.3.4. *Soit β une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel* E *de dimension finie ; il existe une base $e_1, \dots, e_n$ de* E *formée de vecteurs deux à deux β-orthogonaux.*

Démonstration. D'après Gauss, on peut trouver $\ell_1, \dots, \ell_n$ indépendantes telles que

$$\mathrm{Q}(v) = c_1 \ell_1(v)^2 + \cdots + c_n \ell_n(v)^2,$$
$$\beta(v, w) = c_1 \ell_1(v)\ell_1(w) + \cdots + c_n \ell_n(v)\ell_1(w).$$

Puisque les formes linéaires sont indépendantes, on peut trouver des vecteurs $v_1, \dots, v_n \in$ E indépendants tels que $\ell_i(v_j) = \delta_{i,j}$. Alors $\beta(v_i, v_j) = 0$ si $i \neq j$.

Soient β une forme bilinéaire symétrique sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ et Q la forme quadratique sur E associée à β ; si on a une base $e_1, \dots, e_n$ de E qui est β-orthogonale, on a

$$\beta(e_i, e_j) = 0$$

pour $i \neq j$, donc la matrice $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}(\beta, \mathbf{e})$ est diagonale. Les coefficients diagonaux sont $\mathrm{Q}(e_1), \dots, \mathrm{Q}(e_n)$. L'inverse est vrai : si $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}(\beta, \mathbf{f})$ est diagonale, la base $\mathbf{f}$ est β-orthogonale (évident).

Supposons que $\mathrm{Q}(e_i) \neq 0$ pour $i = 1, \dots, s$ et que $\mathrm{Q}(e_i) = 0$ pour $i > s$, où s est un entier tel que $0 \leq s \leq n$. Il est facile de déterminer le noyau de N_β en utilisant la base $\mathbf{e}$. On voit que

$$\mathrm{N}_\beta = \mathrm{Vect}(e_{s+1}, \dots, e_n).$$

On voit qu'ici le rang de β est égal à s.

Le cas réel ou complexe

Supposons dans ce paragraphe que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. On va simplifier au maximum l'expression que l'on peut trouver pour la matrice de β dans une base β-orthogonale. Supposons donc que β soit bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel complexe E de dimension finie, et soit $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base β-orthogonale ; on va remplacer cette base par une base de la forme $\mathbf{e}' = (t_1 e_1, \dots, t_n e_n)$, avec $t_i \neq 0$. Si $c_i = \mathrm{Q}(e_i) \neq 0$, il existe $d_i \in \mathbb{C}$ non nul tel que $c_i = d_i^2$. Si on pose $t_i = 1/d_i$, on aura $\mathrm{Q}(t_i e_i) = t_i^2 \mathrm{Q}(e_i) = c_i^{-1} c_i = 1$. Si $\mathrm{Q}(e_i) = 0$, on pose par exemple $t_i = 1$ (mais ça n'a en fait aucune importance). Dans la nouvelle base $(e'_1, \dots, e'_n)$, on a encore l'orthogonalité, puisque $\beta(t_i e_i, t_j e_j) = t_i t_j \beta(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$, et d'autre part $\mathrm{Q}(e'_i) = \mathrm{Q}(t_i e_i) = t_i^2 \mathrm{Q}(e_i)$ est nul si $\mathrm{Q}(e_i) = 0$, sinon $\mathrm{Q}(e'_i) = 1$. En résumé :

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il existe une base β-orthogonale dans laquelle la matrice de β est diagonale, avec des coefficients diagonaux égaux à 1 *ou* 0.

On peut appliquer la même remarque à la décomposition de Gauss. Si on a $c\ell^2$ avec $c \neq 0$, on trouve $d \in \mathbb{C}$ non nul tel que $c = d^2$, et alors $c\ell^2 = (d\ell)^2 = m^2$, avec $m = d\ell$ forme linéaire. Si

$$\mathrm{Q} = c_1 \ell_1^2 + \cdots + c_k \ell_k^2$$

avec des coefficients $c_j \neq 0$ et $\ell_1, \dots, \ell_k$ indépendantes, on écrit $c_j = d_j^2$ pour tous les c_j, et on aura

$$\mathrm{Q} = m_1^2 + \cdots + m_k^2$$

avec $m_j = d_j \ell_j$. Les formes linéaires $m_1, \dots, m_k$ sont indépendantes.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, toute forme quadratique est somme de carrés de formes linéaires indépendantes. Le nombre de ces formes est le rang de Q.

Passons au cas réel. Soit β une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel E de dimension finie, et soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base β-orthogonale ; on va remplacer cette base par une base de la forme $\mathbf{e}' = (t_1 e_1, \ldots, t_n e_n)$, avec $t_i \neq 0$. Si $c_i = \mathrm{Q}(e_i) > 0$, il existe $d_i > 0$ tel que $c_i = d_i^2$. Si on pose $t_i = 1/d_i$, on aura $\mathrm{Q}(t_i e_i) = t_i^2 \mathrm{Q}(e_i) = c_i^{-1} c_i = 1$. Si $c_i = \mathrm{Q}(e_i) < 0$, il existe $d_i > 0$ tel que $c_i = -d_i^2$. Si on pose $t_i = 1/d_i$, on aura $\mathrm{Q}(t_i e_i) = t_i^2 \mathrm{Q}(e_i) = -c_i^{-1} c_i = -1$. Si $\mathrm{Q}(e_i) = 0$, on pose par exemple $t_i = 1$ (mais ça n'a en fait aucune importance). Dans la nouvelle base $(e_1', \ldots, e_n')$, on a encore l'orthogonalité, puisque $\beta(t_i e_i, t_j e_j) = t_i t_j \beta(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$, et d'autre part $\mathrm{Q}(e_i') = \mathrm{Q}(t_i e_i) = t_i^2 \mathrm{Q}(e_i)$ est nul si $\mathrm{Q}(e_i) = 0$, sinon $\mathrm{Q}(e_i') = \pm 1$. En résumé :

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe une base β-orthogonale dans laquelle la matrice de β est diagonale, avec des coefficients diagonaux égaux à 1, -1 *ou* 0.

Toujours dans le cas réel, dans la méthode de Gauss, on pourra simplifier chacun des termes $c\,\ell(x)^2$ (où $c \in \mathbb{R}$) de la proposition précédente de la façon suivante : si $c > 0$, on écrit $c = d^2$ et on remplace $c\,\ell(x)^2$ par $m(x)^2$, où $m = d\ell$; si $c < 0$, on écrit $c = -d^2$ et on remplace $c\,\ell(x)^2$ par $-m(x)^2$.

Etant donnée une forme quadratique Q *définie sur un espace vectoriel réel* E *de dimension finie, il existe des formes linéaires indépendantes $\ell_1, \ldots, \ell_p, \ell_{p+1}, \ldots, \ell_{p+q}$ telles que*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{Q}(x) = \ell_1(x)^2 + \cdots + \ell_p(x)^2 - \ell_{p+1}(x)^2 - \cdots - \ell_{p+q}(x)^2.$$