MT242, Cours n° 7, Lundi 28 Février 2000.

Avant de reprendre, notons une deuxième forme de l'inégalité triangulaire. Si N est une norme sur E et si $v, w \in \mathrm{E}$, on a $v = w + (v - w)$, donc $\mathrm{N}(v) \le \mathrm{N}(w) + \mathrm{N}(v - w)$. En inversant les rôles et en notant que $\mathrm{N}(v - w) = \mathrm{N}(w - v)$, on obtient

$$\forall v, w \in \mathrm{E}, \quad \bigl|\mathrm{N}(v) - \mathrm{N}(w)\bigr| \le \mathrm{N}(v - w).$$

Retour sur les équivalences des trois normes classiques sur $\mathbb{R}^d$

On note que si $v = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, alors pour chaque j fixé on a $|x_j| \le \sum_{i=1}^d |x_i| = \|v\|_1$, donc $\|v\|_\infty = \max_j |x_j| \le \|v\|_1$. De la même façon $|x_j|^2 \le \sum_{i=1}^d |x_i|^2 = \|v\|_2^2$, donc $\|v\|_\infty^2 = \max_j |x_j|^2 \le \|v\|_2^2$ et $\|v\|_\infty \le \|v\|_2$. Par définition on a $|x_j| \le \|v\|_\infty$ pour chaque $j = 1, \ldots, d$, donc

$$\|v\|_2^2 = \sum_{j=1}^d x_j^2 = \sum_{j=1}^d |x_j|\,|x_j| \le \sum_{j=1}^d |x_j|\,\|v\|_\infty = \|v\|_1\,\|v\|_\infty \le \|v\|_1^2,$$

donc $\|v\|_2 \le \|v\|_1$. On a donc le classement $\|v\|_\infty \le \|v\|_2 \le \|v\|_1$.

Pour voir que les trois normes sont équivalentes, il suffit de remarquer que la plus grande $\|v\|_1$ vérifie $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i| \le d\,\|v\|_\infty$ en majorant chaque terme $|x_i|$ de la somme par $\|x\|_\infty$. On a aussi $\|v\|_1 \le \sqrt{d}\,\|v\|_2$ (Cauchy-Schwarz) et $\|v\|_2 \le \sqrt{d}\,\|v\|_\infty$ (facile).

On va montrer maintenant un résultat général sur l'équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie. Comme on l'a vu dans les exemples des normes classiques sur $\mathbb{R}^d$, on peut obtenir le résultat de ce théorème “à la main” dans la plupart des cas concrets, mais c'est bien confortable d'avoir ce résultat une fois pour toutes.

Théorème 2.1.4. *Si* E *est un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie, toutes les normes sur* E *sont équivalentes.*

Démonstration. Traitons le cas réel (si E est complexe de dimension n, c'est aussi un espace réel de dimension $2n$, et sa norme complexe est aussi une norme réelle ; c'est l'inverse qui n'est pas toujours vrai). Posons $d = \dim \mathrm{E}$. On choisit une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_d)$ de E. On va introduire une norme de référence N_1 sur E, et montrer ensuite que toute autre norme N sur E est équivalente à N_1. Pour tout vecteur $v = \sum_{i=1}^d x_i e_i$, on pose $\mathrm{N}_1(v) = \sum_{i=1}^d |x_i|$. On vérifie facilement que N_1 est bien une norme sur E.

Supposons donnée une norme N sur E. Si $v = \sum_{i=1}^d x_i e_i$, on a

$$\mathrm{N}(v) \le \sum_{i=1}^d |x_i|\,\mathrm{N}(e_i) \le \mathrm{K} \sum_{i=1}^d |x_i| = \mathrm{K}\,\mathrm{N}_1(v),$$

où $\mathrm{K} = \max\{\mathrm{N}(e_i) : i = 1, \ldots, d\}$. Il reste à montrer qu'il existe une constante $\mathrm{K}' \ge 0$ telle que $\mathrm{N}_1 \le \mathrm{K}'\,\mathrm{N}$. Si ça n'est pas vrai il existe pour tout $\mathrm{K}' \ge 0$ un vecteur $w \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{N}_1(w) > \mathrm{K}'\,\mathrm{N}(w)$, ce qui entraîne déjà que $\mathrm{N}_1(w) > 0$. En posant $\lambda = 1/\mathrm{N}_1(w)$ et $v = \lambda w$ on a un vecteur v tel que $\mathrm{N}_1(v) = 1$ et $\mathrm{N}(v) < 1/\mathrm{K}'$.

Appliquons ceci avec $\mathrm{K}' = 1, 2, \ldots, 2^n, \ldots$ Pour tout entier $n \ge 0$ il existe un vecteur $v_n \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{N}_1(v_n) = 1$ et $\mathrm{N}(v_n) < 2^{-n}$. Supposons $d = 3$ pour simplifier l'écriture. On a $v_n = x_n e_1 + y_n e_2 + z_n e_3$. Posons $\mathrm{V}_n = (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$. On a $|x_n| + |y_n| + |z_n| = 1$, ce qui montre que la suite (V_n) est bornée dans $\mathbb{R}^3$. Par Bolzano-Weierstrass (théorème 2.1.3) il existe une sous-suite (V_{n_k}) qui converge vers un $\mathrm{V} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. En passant à la limite dans l'égalité précédente on obtient $|x| + |y| + |z| = 1$, donc $\mathrm{V} \neq 0$ et $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ est un vecteur non nul de E. On a aussi $|\mathrm{N}(v_n) - \mathrm{N}(v)| \le \mathrm{N}(v_n - v) \le \mathrm{K}\,\mathrm{N}_1(v_n - v)$. Mais

$$\mathrm{N}_1(v_{n_k} - v) = |x_{n_k} - x| + |y_{n_k} - y| + |z_{n_k} - z| \to 0$$

quand $k \to +\infty$, ce qui montre que $\mathrm{N}(v) = \lim_k \mathrm{N}(v_{n_k})$. Comme $\mathrm{N}(v_{n_k}) \le 2^{-n_k}$, il en résulte que $\mathrm{N}(v) = 0$. Ceci est impossible puisque v est un vecteur non nul. Cette contradiction montre que K' doit exister, avec la propriété $\mathrm{N}_1 \le \mathrm{K}'\,\mathrm{N}$.

2.2. Distance et continuité

Dans l'espace de la géométrie usuelle, on a deux notions, la distance entre les points et la norme des vecteurs, qui sont reliées de la façon suivante : étant donnés deux points P et Q de l'espace, on peut leur associer un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$; on a alors $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\|$.

Dans l'espace $\mathbb{R}^d$, la situation est plus confuse. Un élément de $\mathbb{R}^d$ peut être considéré comme un point de $\mathbb{R}^d$, mais aussi comme un vecteur. On peut dire que si $x, y \in \mathbb{R}^d$, le vecteur $\overrightarrow{xy}$ sera $y - x \in \mathbb{R}^d$ par définition. On peut alors associer à toute norme N sur $\mathbb{R}^d$ une fonction d_N définie par $d_\mathrm{N}(x, y) = \mathrm{N}(y - x)$. Plus généralement, pour tout espace vectoriel E muni d'une norme N, on peut définir une fonction $d_\mathrm{N} : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to [0, +\infty[$ en posant

$$\forall v, w \in \mathrm{E}, \quad d_\mathrm{N}(v, w) = \mathrm{N}(w - v).$$

Les propriétés de la norme se traduisent facilement sur la fonction d_N. On a les trois propriétés suivantes :

1. $d_\mathrm{N}(v_1, v_3) \le d_\mathrm{N}(v_1, v_2) + d_\mathrm{N}(v_2, v_3)$ pour tous $v_1, v_2, v_3 \in \mathrm{E}$ (inégalité triangulaire pour une distance).
2. $d_\mathrm{N}(v_1, v_2) = d_\mathrm{N}(v_2, v_1)$ pour tous $v_1, v_2 \in \mathrm{E}$.
3. $(d_\mathrm{N}(v_1, v_2) = 0) \Leftrightarrow (v_1 = v_2)$ pour tous $v_1, v_2 \in \mathrm{E}$.

2.2.1. Espaces métriques

Définition 2.2.1. Un *espace métrique* est la donnée d'un couple (X, d), où X est un ensemble muni d'une *distance* d, c'est à dire une application $d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0, +\infty[$ vérifiant les trois axiomes des distances indiqués précédemment :

1. $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$ pour tous $x, y, z \in \mathrm{X}$ (inégalité triangulaire pour une distance).
2. $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in \mathrm{X}$.
3. $(d(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{X}$.

On montre comme pour les normes la deuxième forme de l'inégalité triangulaire,

$$\forall x, y, z \in \mathrm{X}, \quad \bigl|d(x, z) - d(y, z)\bigr| \le d(x, y).$$

Exemples.

1. Sur $\mathbb{R}$ la distance habituelle est $d(x, y) = |x - y|$. Sur $\mathbb{R}^d$, on a la distance euclidienne par exemple. Pour tout espace vectoriel E avec une norme N, on peut définir une distance d_N sur E par $d_\mathrm{N}(w, v) = \mathrm{N}(w - v)$, pour tous $v, w \in \mathrm{E}$.

2. Soit $\mathrm{E} = \mathrm{C}([a, b])$ l'espace vectoriel réel des fonctions réelles continues sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, avec $a < b$. Pour toute fonction $f \in \mathrm{E}$ on peut poser

$$\mathrm{N}_u(f) = \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$$

et on définit de cette façon une norme sur E (la norme uniforme). On a aussi, par le principe général de passage d'une norme à une distance, une distance $d_u(f,g) = \mathrm{N}_u(g-f)$ qui s'appelle la *distance uniforme* entre f et g.

3. Prenons maintenant l'espace $\mathrm{E} = \mathrm{C}(\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$. Elles ne sont plus bornées, et on ne peut plus définir une norme de la convergence uniforme. Mais on peut encore définir une distance de la convergence uniforme, par une formule un peu bizarre

$$\mathrm{D}_u(f,g) = \sup\{\min(|f(x)-g(x)|, 1) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Il y a donc des exemples importants où on a une distance, mais pas de norme associée.

2.2.2. Continuité d'applications entre deux espaces métriques

Définition 2.2.2. Soient $(\mathrm{X}, d_\mathrm{X})$ et $(\mathrm{Y}, d_\mathrm{Y})$ deux espaces métriques ; soit f une application de $(\mathrm{X}, d_\mathrm{X})$ dans $(\mathrm{Y}, d_\mathrm{Y})$; elle est continue de $(\mathrm{X}, d_\mathrm{X})$ dans $(\mathrm{Y}, d_\mathrm{Y})$ au point $a \in \mathrm{X}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{X}, \Big(d_\mathrm{X}(x,a) < \delta \Rightarrow d_\mathrm{Y}(f(x), f(a)) < \varepsilon\Big).$$

On peut dire aussi : f est continue au point a s'il existe une fonction $\delta : \varepsilon > 0 \to \delta(\varepsilon) > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, on ait

$$\forall x \in \mathrm{X}, \Big(d_\mathrm{X}(x,a) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d_\mathrm{Y}(f(x), f(a)) < \varepsilon\Big).$$

Exemples.

1. L'identité de $(\mathrm{X}, d_\mathrm{X})$ définie par $x \in \mathrm{X} \to x$, est bêtement continue.
2. $f(x,y) = x$ définit une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
3. Si y est un point fixé de $(\mathrm{X}, d_\mathrm{X})$, la fonction réelle f définie sur X par $f(x) = d(x,y)$ est continue sur X.

Théorème 2.2.1. Composition de fonctions continues. *On se donne trois espaces métriques* $(\mathrm{X}, d_\mathrm{X})$, $(\mathrm{Y}, d_\mathrm{Y})$ *et* $(\mathrm{Z}, d_\mathrm{Z})$. *On suppose que* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *est continue au point* $x_0 \in \mathrm{X}$ *et que* $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *est continue au point* $y_0 = f(x_0) \in \mathrm{Y}$. *Alors la composée* $g \circ f$ *est continue au point* x_0.

Démonstration. Les deux continuités donnent deux "fonctions de contrôle" $\delta_f(\varepsilon)$ et $\delta_g(\varepsilon)$. On pose alors $\varepsilon_1 = \delta_g(\varepsilon)$ et $\delta = \delta_f(\varepsilon_1)$. Si $x \in \mathrm{X}$ et $d(x, x_0) < \delta = \delta_f(\varepsilon_1)$, on aura $d_\mathrm{Y}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon_1 = \delta_g(\varepsilon)$, donc $d(g(f(x)), g(f(x_0))) < \varepsilon$.

2.2.3. Le cas des espaces vectoriels de dimension finie

Dans le cas d'un espace vectoriel E de dimension finie, on prendra toujours une distance $d = d_\mathrm{N}$ provenant d'une norme N sur E par la formule $d_\mathrm{N}(v,w) = \mathrm{N}(w-v)$. Le théorème 2.1.4 sur l'équivalence des normes en dimension finie va nous permettre d'établir un principe important : la continuité ne dépendra pas de la norme choisie.

Définition 2.2.3. Soient E_1 et E_2 deux espaces normés munis de normes N_1 et N_2, qui donnent les distances d_1 et d_2 sur E_1 et E_2 respectivement ; soit D un sous-ensemble non vide de E_1 et soit f une application de D dans E_2 ; elle est continue au point $w \in \mathrm{D}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\forall v \in \mathrm{D}, \Big(d_1(v,w) < \delta \Rightarrow d_2(f(v), f(w)) < \varepsilon\Big).$$

De plus, le fait que f soit continue au point $w \in \mathrm{D}$ ne dépend pas des normes choisies sur E_1 et E_2.

En effet, soit N'_1 une autre norme sur E_1 et N'_2 une autre norme sur E_2. Il existe des constantes K_1 et K_2 telles que $\mathrm{N}_1 \le \mathrm{K}_1\, \mathrm{N}'_1$ et $\mathrm{N}'_2 \le \mathrm{K}_2\, \mathrm{N}_2$. Posons $\delta'(\varepsilon) = \mathrm{K}_1^{-1}\delta(\varepsilon/\mathrm{K}_2)$. Si $v \in \mathrm{D}$ et $d'_1(v, w) < \delta'(\varepsilon)$, on aura

$$d_1(v, w) = \mathrm{N}_1(w - v) \le \mathrm{K}_1\, \mathrm{N}'_1(w - v) = \mathrm{K}_1\, d'_1(v, w) < \mathrm{K}_1\, \delta'(\varepsilon) = \delta(\varepsilon/\mathrm{K}_2),$$

ce qui entraîne $d_2(f(v), f(w)) < \varepsilon/\mathrm{K}_2$, donc

$$d'_2(f(v), f(w)) = \mathrm{N}'_2(f(w) - f(v)) \le \mathrm{K}_2\, \mathrm{N}_2(f(w) - f(v)) < \varepsilon.$$

Proposition 2.2.1 *Les applications linéaires entre deux espaces vectoriels de dimension finie sont continues.*

Démonstration. Soit u une application linéaire de E dans F. On suppose donnée une norme $\| \,.\, \|_{\mathrm{F}}$ sur F. Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_d)$ une base de E et posons $\|v\|_{\mathrm{E}} = \sum_{i=1}^d |x_i|$ si $v = \sum_{i=1}^d x_i e_i \in \mathrm{E}$. On aura

$$\|u(v)\|_{\mathrm{F}} = \| \sum_{i=1}^d x_i u(e_i) \|_{\mathrm{F}} \le \sum_{i=1}^d |x_i|\, \|u(e_i)\|_{\mathrm{F}} \le \mathrm{K}\, \|v\|_{\mathrm{E}}$$

où $\mathrm{K} = \max\{\|u(e_i)\|_{\mathrm{F}} : i = 1, \ldots, d\}$. Montrons la continuité en un point v_0 fixé. On aura $\|u(v) - u(v_0)\|_{\mathrm{F}} = \|u(v - v_0)\|_{\mathrm{F}} \le \mathrm{K}\, \|v - v_0\|_{\mathrm{E}}$, ce qui montre que $d_{\mathrm{F}}(u(v), u(v_0))$ tend vers 0 lorsque $d_{\mathrm{E}}(v, v_0)$ tend vers 0.

Exemples de continuité.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = xy$ est continue.
2. Posons
$$f(x, y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2}$$

si $(x, y) \ne (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ (on suppose $\alpha, \beta > 0$). Alors f est continue au point $(0, 0)$ si et seulement si $\alpha + \beta > 2$.

Posons $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \|v\|_2$ et $v = (x, y)$. On a

$$f(v) = r^{\alpha+\beta-2} |\cos\theta|^\alpha |\sin\theta|^\beta,$$

donc $|f(v)| \le r^{\alpha+\beta-2}$. Si $c = \alpha + \beta - 2 > 0$, on voit que $r^c \to 0$ quand $r \to 0$, ce qui permet de montrer la continuité dans ce cas : posons $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{1/c}$ pour tout $\varepsilon > 0$. Si $r = d_2(v, (0, 0)) < \delta$, on aura $r^c < \varepsilon$, donc $|f(v) - f(0, 0)| = |f(v)| \le r^c < \varepsilon$.

Si $\alpha + \beta \le 2$, on voit que $f(t, t) = \frac{1}{2} t^{\alpha+\beta-2}$ (pour $t > 0$) ne tend pas vers 0 quand $t \to 0$, donc f n'est pas continue en $(0, 0)$ dans ce cas. En fait dans ce cas on ne peut trouver aucune valeur en $(0, 0)$ qui permette de rendre f continue : en effet $f(t, 0) = 0$, donc 0 est la seule valeur possible en $(0, 0)$ pour que f ait une chance d'être continue.

Cours n° 8, Mercredi 1er Mars 2000.

Exemple. Si N est une norme sur E de dimension finie, et si $w_0 \in$ E est fixé, alors $f : v \to \mathrm{N}(v - w_0)$ est continue de E dans $\mathbb{R}$.

Rappelons qu'on peut choisir n'importe quelle norme sur E pour tester la continuité. On va justement prendre la norme N elle-même. On a par l'inégalité triangulaire

$$|f(v) - f(v')| = |\mathrm{N}(v - w_0) - \mathrm{N}(v' - w_0)| \le \mathrm{N}(v' - v) = d_{\mathrm{N}}(v, v').$$

Il en résulte que f est continue au point v, avec $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$: si $d_{\mathrm{N}}(v', v) < \delta = \varepsilon$, alors $|f(v') - f(v)| < \varepsilon$.

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On dit que $f(x,y)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$ lorsque la fonction $\widetilde{f}$ est continue au point $(0,0)$, où $\widetilde{f}$ est définie par $\widetilde{f}(0,0) = \ell$ et $\widetilde{f}(x,y) = f(x,y)$ si $(x,y) \ne (0,0)$.

Exercice traité (en partie).

Chercher en fonction de $\alpha, \gamma > 0$ si la fonction f définie pour $(x,y) \ne (0,0)$ par

$$f(x,y) = \frac{2\cos x + |x|^\alpha |y|^\gamma - y^4 - 2}{x^2 + y^4}$$

admet une limite en $(0,0)$.

On peut s'apercevoir que l'expression $2\cos x - y^4 - 2$ ressemble assez, quand (x,y) est petit, à $-x^2 - y^4$. On peut essayer de séparer en deux problèmes

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\cos x - y^4 - 2}{x^2 + y^4} = -1$$

et

$$(*) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\gamma}{x^2 + y^4} = ???$$

ATTENTION. En découpant ainsi une recherche de limite, on peut remplacer une expression qui a une limite par deux expressions qui n'ont pas de limite ! Dans le cas présent on le fait parce qu'on est à peu près sûr que la première limite existe (non traité à l'amphi : exercice).

La deuxième limite ressemble à un exemple déjà vu pour la continuité, et qui s'exprime ainsi en termes de limites : si $\alpha, \beta > 0$, la limite

$$(**) \qquad \lim_{(x,v)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha |v|^\beta}{x^2 + v^2}$$

existe si et seulement si $\alpha + \beta > 2$. Dans ce cas la limite est 0. Si on pose $v = y^2$ l'expression à étudier dans $(*)$ devient

$$\frac{|x|^\alpha |v|^{\gamma/2}}{x^2 + v^2}$$

ce qui suggère que la limite existe dans $(*)$ si et seulement si $\alpha + \gamma/2 > 2$, et que dans ce cas la limite est nulle. Commençons par montrer qu'il n'y a pas de limite si $\alpha + \gamma/2 \le 2$. C'est parfois plus facile que de montrer que la limite existe : pour être sûr qu'il n'y a pas de limite, il suffit d'avoir, ou bien un chemin dans $\mathbb{R}^2$, qui s'approche de $(0,0)$, sur lequel les valeurs de f tendent vers $+\infty$, ou bien deux chemins qui donnent des valeurs limite différentes.

Supposons donc $\alpha + \gamma/2 \le 2$ et considérons le premier chemin $(t, 0)$, $t > 0$. On a $g(t, 0) = 0$ pour tout $t > 0$. Cela entraîne que la limite de g, si elle existe, est égale à 0. Considérons le deuxième chemin $(t, \sqrt{t})$, $t > 0$. On a $g(t, \sqrt{t}) = \frac{1}{2} t^{-2+\alpha+\gamma/2}$, qui ne tend pas vers 0 parce que $-2 + \alpha + \gamma/2 \le 0$ (la limite est $+\infty$ si $\alpha + \gamma/2 < 2$ et $1/2$ si $\alpha + \gamma/2 = 2$).

Dans le cas $\alpha + \gamma/2 > 2$ on utilise la limite $(**)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |x| + |v| < \delta$ entraîne

$$\Big| \frac{|x|^\alpha |v|^{\gamma/2}}{x^2 + v^2} - 0 \Big| < \varepsilon.$$

On peut supposer $\delta < 1$. Si $|x| + |y| < \delta^2/4$, alors $v = \sqrt{|y|} < \delta/2$ et $|x| < \delta^2/4 < \delta/2$ donc $|x| + |v| < \delta$, ce qui entraîne par remplacement que

$$\Big| \frac{|x|^\alpha |y|^\gamma}{x^2 + y^4} - 0 \Big| < \varepsilon,$$

ce qui montre que la limite $(*)$ existe et vaut 0 quand $\alpha + \gamma/2 > 2$.

2.2.4. Suites convergentes

On a dit qu'une suite (v_n) de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ converge vers v si chaque coordonnée de v_n converge vers la coordonnée correspondante de v. On va maintenant exprimer cette notion de convergence avec une norme.

Proposition 2.2.2. *Soit (v_n) une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^d$; si (v_n) converge vers v, alors $d_{\mathrm{N}}(v_n, v) = \mathrm{N}(v_n - v) \to 0$ (quand $n \to +\infty$) pour toute norme N sur $\mathbb{R}^d$. Si $d_n(v_n, v) \to 0$ pour une norme N sur $\mathbb{R}^d$, alors $v_n \to v$.*

Démonstration. Prenons $d = 3$ pour simplifier l'écriture. On pose $v_n = (x_n, y_n, z_n)$ et $v = (x, y, z)$. On a $\|v_n - v\|_1 = |x_n - x| + |y_n - y| + |z_n - z|$ qui tend vers 0 si et seulement si chacune des trois expressions positives qui interviennent tendent vers 0, c'est à dire $x_n \to x$, $y_n \to y$ et $z_n \to z$, ce qui signifie que $v_n \to v$. Si N est une autre norme sur $\mathbb{R}^d$, on utilise l'équivalence entre N et $\|\,.\,\|_1$.

Définition 2.2.4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit N une norme sur E ; on dit qu'une suite (v_n) de points de E *tend vers* le point $v \in \mathrm{E}$ (ou *converge* vers v) si $d_{\mathrm{N}}(v_n, v)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. La convergence de (v_n) vers v ne dépend pas de la norme N choisie.

Théorème 2.2.2. *Si $f : \mathrm{D} \to \mathrm{F}$ est continue au point $w \in \mathrm{D}$ et si $(v_n) \subset \mathrm{D}$ tend vers le point w, on a alors $f(v_n) \to f(w)$. Réciproquement, si $w \in \mathrm{D}$ et si pour toute suite $(v_n) \subset \mathrm{D}$ qui tend vers w on a $f(v_n) \to f(w)$, alors f est continue au point w.*

Démonstration. Voir Liret-Martinais.

Conséquence. Si (v_n) tend vers w, alors $\mathrm{N}(v_n)$ tend vers $\mathrm{N}(w)$. Il en résulte que toute suite convergente (v_n) est bornée, c'est à dire qu'il existe M tel que $\mathrm{N}(x_n) \le \mathrm{M}$ pour tout $n \ge 0$. Cette notion de suite bornée ne dépend pas de la norme N choisie.

2.2.5. Opérations sur les fonctions réelles continues

La première opération qu'on mentionnera pourrait s'appeler le *regroupement* de deux fonctions f et g définies sur le même ensemble $\mathrm{D} \subset \mathrm{E}$, toutes les deux à valeurs réelles. Définissons une application $h : \mathrm{D} \to \mathbb{R}^2$ en posant $h(v) = (f(v), g(v)) \in \mathbb{R}^2$ pour tout $v \in \mathrm{D}$. On a alors le résultat suivant.

Proposition 2.2.3. *La fonction h est continue au point $w \in \mathrm{D}$ si et seulement si les deux fonctions f et g sont continues au point w.*

Démonstration. Supposons f et g continues au point w et montrons que h est continue au point w. Pour toute suite $(v_n) \subset \mathrm{D}$ qui converge vers w, on sait que $f(v_n) \to f(w)$ et $g(v_n) \to g(w)$ puisque f et g sont continues au point w. Cela signifie que le vecteur $h(v_n) = (f(v_n), g(v_n))$ converge vers le vecteur $h(v) = (f(v), g(v))$. Comme cette propriété est vraie pour toute suite $(v_n) \subset \mathrm{D}$ qui converge vers w, on en déduit que h est continue au point w, d'après le théorème 2.2.2.

L'implication inverse est du même genre ; laissée au lecteur.

On dispose de plusieurs éléments qu'on va pouvoir rassembler. On a vu que si φ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x, y) = x$, ou $\varphi(x, y) = y$, ou $\varphi(x, y) = x + y$ (ou toute fonction linéaire), ou bien si $\varphi(x, y) = xy$, alors φ est continue sur $\mathbb{R}^2$. On pourrait montrer aussi que $\varphi(x, y) = \max(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. La composition $\varphi \circ h$ est continue au point w d'après le théorème 2.2.2, et cette fonction est $v \to f(v) + g(v)$ quand $\varphi(x, y) = x + y$, ou bien $v \to f(v)g(v)$ quand $\varphi(x, y)xy$. On obtient ainsi :

Théorème 2.2.3. *Si $f, g : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ sont continues au point $w \in \mathrm{D}$, alors les fonctions $f + g$, fg, $\max(f, g)$ sont continues au point w. Si f ne s'annule pas sur D, la fonction $v \to 1/f(v)$ est continue au point w.*

Exemples.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = \frac{x^2\,\mathrm{e}^y + x^4 y^2 z + y \sin(z)}{1 + x^2 + y^4 + z^6}$$

est continue sur $\mathbb{R}^3$.

En appliquant le principe de composition, on trouve successivement que les fonctions dont la valeur au point (x, y, z) sont x, y, z, $x^2 = x \,.\, x$, xy, $x^k y^l z^m$ $(k, l, m \in \mathbb{N})$ sont continues. De même $(x, y, z) \to y \to \mathrm{e}^y$ est continue comme composition. On voit que le numérateur et le dénominateur sont continus, et le dénominateur ne s'annule jamais, d'où le résultat.

2. Soit $\mathrm{E} = \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel, de dimension finie d^2, des matrices de taille $d \times d$ à coefficients réels ; la fonction f définie sur E par $f(\mathrm{M}) = \det \mathrm{M}$ est continue sur E.

En effet, $\det \mathrm{M}$ est un polynôme des d^2 coordonnées naturelles $m_{i,j}$ des éléments M de E.

2.3. Ouverts et fermés

Dans tout le paragraphe on désignera par E un espace vectoriel réel de dimension finie et par N une norme sur E.

Définition 2.3.1. On appelle *boule ouverte*, de centre $w \in \mathrm{E}$ et de rayon $r > 0$, l'ensemble $\mathrm{B}_\mathrm{N}(w, r) = \{v \in \mathrm{E} : d_\mathrm{N}(v, w) < r\}$.

Exercice de dessin traité : les boules des trois normes usuelles dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Définition 2.3.2. On appelle *voisinage* d'un point $w \in \mathrm{E}$ tout ensemble $\mathrm{V} \subset \mathrm{E}$ qui contient une boule ouverte de centre w et d'un certain rayon $r > 0$,

$$\exists r > 0, \quad w \in \mathrm{B_N}(w, r) \subset \mathrm{V}.$$

La notion de voisinage du point w est indépendante de la norme N choisie.

Remarque. Si W n'est pas un voisinage de w, il existe une suite (v_n) de points de E telle que $v_n \notin \mathrm{W}$ et $v_n \to w$. Ceci est en fait une caractérisation des non-voisinages, et donc des voisinages.

Définition 2.3.3. On dit qu'un sous-ensemble Ω de E est *ouvert* dans E si Ω est un voisinage de chacun de ses points, c'est à dire si pour tout point $w \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B_N}(w, r) \subset \Omega$.

Exemples.

1. Les ensembles $\emptyset$ et E sont ouverts dans E.
2. Si Ω_1 et Ω_2 sont ouverts, alors $\Omega_1 \cap \Omega_2$ est ouvert. Si $(\Omega_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille quelconque d'ouverts, la réunion $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \Omega_i$ est un ouvert.

Proposition 2.3.1. *Soient Ω un ouvert de* E, *et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue ; l'ensemble*

$$\Omega_1 = \{v \in \Omega : f(v) > 0\}$$

est un ouvert de E.

Démonstration. Soit w un point quelconque de Ω_1 et montrons qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(w, r) \subset \Omega_1$; puisque $w \in \Omega_1$, on sait que $w \in \Omega$ et puisque Ω est ouvert il existe $\rho > 0$ tel que $\mathrm{B}(w, \rho) \subset \Omega$. Ensuite, appliquons la continuité de f au point w avec $\varepsilon = f(w) > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que si $v \in \Omega$ et $d(v, w) < \delta$, alors $|f(v) - f(w)| < \varepsilon = f(w)$, ce qui entraîne $f(w) - f(v) \leq |f(v) - f(w)| < f(w)$, donc $f(v) > 0$. Posons $r = \min(\rho, \delta)$ et montrons que $\mathrm{B}(w, r) \subset \Omega_1$. Si $d(v, w) < r$, on a déjà $d(v, w) < \rho$ qui donne $v \in \Omega$, et aussi $d(v, w) < \delta$, donc $f(v) > 0$.

Exemples.

1. Toute boule ouverte est ouverte : l'ensemble $\mathrm{B_N}(w, r)$ est l'ensemble $\{v \in \mathrm{E} : f(v) > 0\}$ avec $f(v) = r - \mathrm{N}(v - w)$, fonction continue.

   Le complémentaire d'un ensemble réduit à un point w est un ensemble ouvert : prendre $f(v) = \mathrm{N}(v - w)$.
2. Les points de $\mathbb{R}^2$ qui sont strictement au dessus de la parabole d'équation $y = x^2$ forment un ouvert : $f(x, y) = y - x^2 > 0$.
3. Les matrices réelles inversibles forment un ouvert de $\mathrm{M}_d(\mathbb{R})$. Cet ouvert est la réunion des deux ouverts $\{\mathrm{M} : \det \mathrm{M} > 0\}$ et $\{\mathrm{M} : \det \mathrm{M} < 0\}$.