MT242, Cours n° 11, Lundi 13 Mars 2000.

Rappel. Définition de la différentielle. On considère deux espaces vectoriels réels de dimension finie E et F, un point $a \in \mathrm{E}$ et un voisinage V de a dans E. Une fonction $f : \mathrm{V} \to \mathrm{F}$ est différentiable au point a, de différentielle $(df)_a \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ si on peut écrire

$$\big\| f(a+h) - \big(f(a) + (df)_a(h)\big)\big\|_{\mathrm{F}} \le \|h\|_{\mathrm{E}}\, \varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 lorsque $h \to 0_{\mathrm{E}}$.

Réparation d'un oubli.

Proposition 3.2.1. *Si f est différentiable au point a, alors f est continue au point a.*

Démonstration. On a vu au chapitre 2, proposition 2.2.1, que puisque $(df)_a$ est linéaire entre deux espaces de dimension finie, il existe une constante C telle que $\|(df)_a(h)\|_{\mathrm{F}} \le \mathrm{C}\, \|h\|_{\mathrm{E}}$ pour tout vecteur $h \in \mathrm{E}$. Alors

$$\|f(a+h) - f(a)\|_{\mathrm{F}} \le \|f(a+h) - (f(a) + (df)_a(h))\|_{\mathrm{F}} + \|(df)_a(h)\|_{\mathrm{F}} \le \|h\|_{\mathrm{E}}\, \varepsilon(h) + \mathrm{C}\, \|h\|_{\mathrm{E}},$$

quantité qui tend vers 0 quand $h \to 0_{\mathrm{E}}$.

Proposition 3.2.2. *Si f et g, définies dans un voisinage V d'un point $a \in \mathrm{E}$ sont différentiables au point a, alors $f + g$ est différentiable au point a, ainsi que λf pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Admise.

3.2.2. La classe C^1 : fonctions à valeurs réelles

On tire la conséquence du dernier théorème de l'amphi précédent (théorème 3.2.1).

Corollaire 3.2.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet n dérivées partielles $\mathrm{D}_j f$ dans U ; si toutes les dérivées partielles $\mathrm{D}_j f$, $j = 1, \ldots, n$ sont continues dans U, la fonction f est différentiable en tout point de U.*

Définition 3.2.2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$; on dit que $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ est *de classe* C^1 *dans* U si elle admet n dérivées partielles continues dans U.

Une fonction de classe C^1 sur U est donc différentiable en tout point de U, d'après le corollaire précédent.

Un exemple abstrait de calcul de différentielle. On considère $\mathrm{E} = \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et l'application f de E dans E définie par $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}^2$ pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. La donnée d'une matrice M de taille 3×3 équivaut à la donnée de 9 nombres réels, donc on peut considérer que $\mathrm{E} \simeq \mathbb{R}^9$, mais ce n'est peut-être pas le point de vue le plus éclairant sur la question.

On va munir $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de la norme $\mathrm{M} \to \|\mathrm{M}\|_\infty$ qui est le maximum des neuf coefficients de la matrice M. On peut voir que $\|\mathrm{AB}\|_\infty \le 3\, \|\mathrm{A}\|_\infty\, \|\mathrm{B}\|_\infty$ pour toutes matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{E}$ (exercice).

On écrit alors

$$f(\mathrm{A} + \mathrm{H}) = (\mathrm{A} + \mathrm{H})^2 = \mathrm{A}^2 + (\mathrm{HA} + \mathrm{AH}) + \mathrm{H}^2 = f(\mathrm{A}) + \ell(\mathrm{H}) + \mathrm{E}(\mathrm{H}),$$

où $\ell(\mathrm{H}) = \mathrm{HA} + \mathrm{AH}$ est linéaire en H, et $\mathrm{E}(\mathrm{H}) = \mathrm{H}^2$ vérifie $\|\mathrm{E}(\mathrm{H})\|_\infty = \|\mathrm{H}^2\|_\infty \le 3\, \|\mathrm{H}\|_\infty^2 = \|\mathrm{H}\|\, \varepsilon(\mathrm{H})$. On voit donc que f est différentiable en tout point $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ et que $(df)_{\mathrm{A}}(\mathrm{H}) = \mathrm{HA} + \mathrm{AH}$.

Avec les coordonnées, on aurait 9 fonctions coordonnées dépendant chacune de 9 variables (une fonction coordonnée pour chaque coefficient de la matrice $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}^2$), donc 81 dérivées partielles à exploiter...

3.2.3. Plan tangent à un graphe

On dira qu'un sous ensemble Γ de $\mathbb{R}^3$ est tangent à un plan Π de $\mathbb{R}^3$ en un point A si A est un point de $\Gamma \cap \Pi$ et si

$$\lim \frac{d(\mathrm{M}, \Pi)}{d(\mathrm{M}, \mathrm{A})} = 0$$

lorsque le point M tend vers A en restant dans Γ. Avec des quantificateurs, cela revient à dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \forall \mathrm{M}, \ \Big\{ \big(\mathrm{M} \in \Gamma \ \text{ et } \ d(\mathrm{M}, \mathrm{A}) < \delta\big) \Rightarrow \big(d(\mathrm{M}, \Pi) \leq \varepsilon \, d(\mathrm{M}, \mathrm{A})\big) \Big\}.$$

Soit $\mathrm{A} = (x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$; soient d_1, d_2 deux nombres réels. On leur associe un plan non vertical Π_{d_1,d_2} passant par A dont l'équation est

$$z - z_0 = d_1\,(x - x_0) + d_2\,(y - y_0).$$

Soit d'autre part f une fonction réelle définie sur un voisinage V du point $a = (x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$. On considère son graphe

$$\Gamma = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathrm{V}\} \subset \mathbb{R}^3$$

c'est à dire que Γ admet l'équation $z = f(x, y)$. On suppose que $f(x_0, y_0) = z_0$, c'est à dire que $\mathrm{A} \in \Gamma$. On a les résultats suivants :

Si f est différentiable au point a, alors Γ est tangent en A *au plan Π_{d_1,d_2} correspondant à* $d_1 = \mathrm{D}_1 f(a)$, $d_2 = \mathrm{D}_2 f(a)$.

Si Γ est tangent en A *au plan Π_{d_1,d_2}, alors f est différentiable au point a et* $\mathrm{D}_1 f(a) = d_1$, $\mathrm{D}_2 f(a) = d_2$.

Démonstration de la première affirmation. On suppose f différentiable au point a. On pose $d_j = \mathrm{D}_j f(a)$, $j = 1, 2$. A chaque point $\mathrm{M} = (x, y, f(x, y))$ du graphe Γ, on associe le point $\mathrm{P} = (x, y, z_0 + d_1(x - x_0) + d_2(y - y_0))$ du plan Π_{d_1,d_2}. Alors

$$d(\mathrm{M}, \Pi) \leq d(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = |f(x, y) - f(x_0, y_0) - d_1\,(x - x_0) - d_2\,(y - y_0)|$$

Si on pose $(x, y) = a + h$, alors $h = (x - x_0, y - y_0)$ et l'expression précédente est égale à $|f(a+h) - f(a) - (df)_a(h)|$, qui peut se majorer par $\|h\|\,\varepsilon(h)$ puisque f est différentiable au point a. Mais $\|h\|_2 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq d(\mathrm{M}, \mathrm{A})$; on voit donc que h tend vers 0 quand M tend vers A, et d'autre part M tend vers A quand h tend vers 0 parce que f est continue au point a ; donc h tend vers 0 si et seulement si M tend vers A et l'expression $\varepsilon(h)$ peut s'écrire $\varepsilon_1(d(\mathrm{M}, \mathrm{A}))$. Finalement

$$d(\mathrm{M}, \Pi) \leq d(\mathrm{M}, \mathrm{A})\, \varepsilon_1(d(\mathrm{M}, \mathrm{A}))$$

ce qui montre que Γ est tangent en A au plan Π_{d_1,d_2}. L'autre direction (tangent $\Rightarrow$ différentiable) se montre de façon analogue, mais il faut jouer avec l'inégalité triangulaire de façon un peu compliquée.

Exemple. La surface d'équation $z = x^2 + y^2$ (paraboloïde de révolution). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^2$. On vérifie facilement que les dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$. Le graphe admet donc un plan tangent en tout point. Par exemple, si $a = (1, 2)$ on aura $\mathrm{A} = (1, 2, 5)$, $\mathrm{D}_1 f(a) = 2x_0 = 2$, $\mathrm{D}_2 f(a) = 2y_0 = 4$. L'équation du plan tangent est $z - 5 = 2\,(x - 1) + 4\,(y - 2)$ c'est à dire $z = 2x + 4y - 5$.

3.2.4. Composition des différentielles

Théorème 3.2.2. *Soient* E, F *et* G *trois espaces vectoriels réels de dimension finie,* $a \in \mathrm{E}$, V *un voisinage de* a *dans* E, W *un voisinage de* $b \in \mathrm{F}$, $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ *et* $g : \mathrm{W} \to \mathrm{G}$. *On suppose que* $b = f(a)$. *Si* f *est différentiable au point* a *et* g *différentiable au point* $f(a)$, *la composée* $g \circ f$ *est différentiable au point* a *et*

$$\big(d(g \circ f)\big)_a = (dg)_{f(a)} \circ (df)_a.$$

Démonstration. On écrit

$$g(b+k) = g(b) + (dg)_b(k) + \mathrm{E}_2(k), \quad f(a+h) = f(a) + (df)_a(h) + \mathrm{E}_1(h).$$

On pose $k(h) = (df)_a(h) + \mathrm{E}_1(h)$, donc $f(a+h) = b + k(h)$ et

$$g(f(a+h)) = g(b+k(h)) = g(b) + (dg)_b(k(h)) + \mathrm{E}_2(k(h)) =$$

$$g(f(a)) + (dg)_b((df)_a(h)) + (dg)_b(\mathrm{E}_1(h)) + \mathrm{E}_2(k(h))$$

et il reste à montrer que

$$\mathrm{E}(h) = (dg)_b(\mathrm{E}_1(h)) + \mathrm{E}_2(k(h))$$

admet une majoration $\|\mathrm{E}(h)\| \le \|h\|\,\varepsilon(h)$. Comme $(df)_a$ et $(dg)_b$ sont linéaires entre espaces de dimension finie, il existe C_1 et C_2 telles que $\|(df)_a(h)\| \le \mathrm{C}_1\|h\|$ et $\|(dg)_b(k)\| \le \mathrm{C}_2\,\|k\|$ pour tous h, k. On sait que $\|\mathrm{E}_1(h)\| \le \|h\|\,\varepsilon_1(h)$ et $\|\mathrm{E}_2(k)\| \le \|k\|\,\varepsilon_2(k)$. On a aussi $\|k(h)\| \le \mathrm{C}_1\,\|h\| + \|h\|\,\varepsilon_1(h)$ (ce qui montre en passant que $k(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0). Finalement,

$$\|\mathrm{E}(h)\| \le \mathrm{C}_2\,\|\mathrm{E}_1(h)\| + \|k(h)\|\,\varepsilon_2(k(h)) \le$$

$$\mathrm{C}_2\,\|h\|\,\varepsilon_1(h) + (\mathrm{C}_1 + \varepsilon_1(h))\|h\|\,\varepsilon_2(k(h)) = \|h\|\,\big(\mathrm{C}_2\,\varepsilon_1(h) + (\mathrm{C}_1 + \varepsilon_1(h))\varepsilon_2(k(h))\big)$$

et cette dernière expression est de la forme $\|h\|\,\varepsilon(h)$, avec

$$\varepsilon(h) = \big(\mathrm{C}_2\,\varepsilon_1(h) + (\mathrm{C}_1 + \varepsilon_1(h))\varepsilon_2(k(h))\big)$$

qui tend vers 0 quand $h \to 0_{\mathrm{E}}$.

Exemple. On pose $\varphi(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. C'est la composée de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ et $g(t) = \sqrt{|t|}$. La fonction f est clairement de classe C^1, et si $a = (x,y,z)$ et $h = (r,s,t)$ on a

$$f(a+h) = f(a) + (2x\,r + 2y\,s + 2z\,t) + \|h\|\varepsilon(h).$$

On peut considérer que l'expression entre parenthèses est un produit scalaire, produit scalaire du vecteur $(2x, 2y, 2z)$ dont les coordonnées sont les dérivées partielles de f, et du vecteur h. Ce **vecteur** s'appelle le gradient de f au point a et on le notera $(\nabla f)_a$. On exprime alors la différentielle par $(df)_a(h) = (\nabla f)_a \,.\, h$ (produit scalaire).

Le gradient de f en un vecteur quelconque $a = (x,y,z)$ est donc égal à $2a$, et $(df)_a(h) = (2a)\,.\,h$. Supposons $a \ne 0$, on a $b = f(a) = \|a\|_2^2 > 0$, donc g est différentiable au point b, et sa différentielle est $k \in \mathbb{R} \to g'(b)\,k = k/(2\sqrt{b})$. En appliquant le théorème de composition on obtient la différentielle de φ en un vecteur non nul a,

$$(d\varphi)_a = (dg)_{f(a)} \circ (df)_a$$

Alors
$$(d\varphi)_a(h) = (dg)_b\big((2a) \,.\, h\big) = \frac{1}{\sqrt{b}}\; a \,.\, h = \frac{1}{\|a\|_2}\; a \,.\, h.$$
Ceci peut s'écrire aussi en terme de gradient sous la forme $(\nabla h)_a = \|a\|_2^{-1} a$ pour tout $a \neq 0$. C'est une *illustration* du théorème 3.2.2, mais pas la méthode la plus courte pour résoudre l'exercice. Ici, il est plus simple de faire le calcul avec les dérivées partielles (exercice).

Cours n° 12, Mercredi 15 Mars 2000.

Exercice d'échauffement. Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est linéaire, alors f est différentiable en tout point $a \in \mathrm{E}$ et $(df)_a = f$ pour tout a.

Rappel. Formule de composition des différentielles,
$$\big(d(g \circ f)\big)_a = (dg)_{f(a)} \circ (df)_a.$$
Vecteur dérivé

Supposons que γ soit une application d'un intervalle ouvert $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ dans E, différentiable au point t_0. Il en résulte que
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\,\big(\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\big)$$
existe (c'est un *vecteur* de E), et vaut $(d\gamma)_{t_0}(1)$. On appelle cette limite le *vecteur dérivé au point* t_0. Si t représente le temps, on parle aussi de *vecteur vitesse*. On notera ce vecteur dérivé par l'une des notations
$$\gamma'(t_0) \quad \text{ou} \quad \frac{d\gamma(t)}{dt}_{|t=t_0}.$$
Exemple. Si $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, on obtient le mouvement circulaire uniforme sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Le vecteur vitesse existe pour toute valeur de t ; il est donné par $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$.

Si V est un voisinage de $a \in \mathrm{E}$, $f : \mathrm{V} \to \mathrm{F}$ différentiable au point a et $\gamma :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ différentiable au point t_0, et $a = \gamma(t_0)$, on a

(1) $$\frac{d}{dt}\, f(\gamma(t))_{|t=t_0} = (df)_{\gamma(t_0)}\big(\frac{d\gamma(t)}{dt}_{|t=t_0}\big).$$

Calculs en coordonnées

Soit $f : \mathrm{V} \to \mathrm{F}$, avec V voisinage de $a \in \mathrm{E}$, et f différentiable au point a. Si on donne une base $(w_1, \ldots, w_p)$ de l'espace de dimension finie F, on pourra écrire pour tout $v \in \mathrm{V}$
$$f(v) = f_1(v)\, w_1 + \cdots + f_p(v)\, w_p$$
où les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ sont des fonctions réelles sur V. On a alors :

Proposition 3.2.3. *La fonction* $f : \mathrm{V} \to \mathrm{F}$ *est différentiable au point* a *si et seulement si les* p *fonctions réelles* f_j *sont différentiables au point* a.

Démonstration. Soit $(w_1^*, \ldots, w_p^*)$ la base duale de la base $(w_1, \ldots, w_p)$. Alors $f_j = w_j^* \circ f$. Si f est différentiable, chaque f_j est différentiable par composition, et de plus

$(*)$ $$(df_j)_a = w_j^* \circ (df)_a.$$

Inversement, si chaque f_j est différentiable au point a, il est facile de voir que chaque fonction vectorielle $v \to f_j(v)\, w_j \in \mathrm{F}$ est différentiable au point a et f est différentiable comme somme de fonctions différentiables.

Dans le cas où $\mathrm{F} = \mathbb{R}^p$, on choisit le plus souvent la base canonique et les fonctions coordonnées "naturelles", qui correspondent à l'écriture $f(v) = (f_1(v), \ldots, f_p(v)) \in \mathbb{R}^p$.

Supposons de plus que f soit définie sur $\mathrm{V} \subset \mathbb{R}^n$. Les p fonctions coordonnées f_i sont alors des fonctions réelles de n variables. Si f est différentiable au point $a \in \mathrm{V}$, on va exprimer sa matrice jacobienne $(\mathrm{J}f)_a$ au point a, qui est par définition la matrice de l'application linéaire $(df)_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

Par définition de la représentation matricielle, le coefficient (i, j) de la matrice est la $i$ème coordonnée dans la base de $\mathbb{R}^p$ de l'image par $(df)_a$ du $j$ème vecteur $\mathbf{e}_j$ de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, donc

$$(\mathrm{J}f)_{a,i,j} = \mathbf{e}_i^*((df)_a(\mathbf{e}_j)) = (\mathbf{e}_i^* \circ (df)_a)(\mathbf{e}_j) = (df_i)_a(\mathbf{e}_j) = \mathrm{D}_j f_i(a),$$

en appliquant d'abord la propriété $(*)$ et ensuite le rapport entre différentielle et dérivées partielles.

On notera que la matrice $(\mathrm{J}f)_a$ contient dans la ligne i l'expression en ligne de la différentielle de f_i. On retiendra : une ligne par fonction coordonnée $f_1, \ldots, f_p$.

La formule de composition se traduit ainsi de façon matricielle. Si $\mathrm{V} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{W} \subset \mathbb{R}^p$, V voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ différentiable au point a, W voisinage de $b = f(a)$ et $g : \mathrm{W} \to \mathbb{R}^q$ différentiable au point $f(a)$, on a

$$\big(\mathrm{J}(g \circ f)\big)_a = (\mathrm{J}g)_{f(a)}\,(\mathrm{J}f)_a$$

où le produit est le produit des deux matrices jacobiennes. La fonction $h = g \circ f$ est différentiable d'après le théorème de composition, donc ses fonctions coordonnées $h_1, \ldots, h_q$ admettent des dérivées partielles, qui sont les coefficients de la matrice jacobienne de h. On obtient ainsi

$$(**) \qquad \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

Si $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^p$ est un chemin on exprimera matriciellement la formule (1). Soit Γ_0' le vecteur colonne des coordonnées du vecteur dérivé $\gamma'(t_0)$; alors le vecteur de $\mathbb{R}^p$ égal au vecteur dérivé de $t \to g(\gamma(t))$ en t_0 admet pour matrice colonne le produit matriciel

$$(\mathrm{J}g)_{\gamma(t_0)}\,\Gamma_0'$$

Dans le cas particulier où g est à valeurs réelles, le résultat précédent est une matrice de taille 1×1 dont le seul coefficient est la dérivée de la fonction réelle de variable réelle $t \to g(\gamma(t))$. On retiendra cette formule importante

$$\frac{d}{dt} g(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_p(t))_{|t=t_0} = \mathrm{D}_1 g(\gamma(t_0))\,\gamma_1'(t_0) + \cdots + \mathrm{D}_p g(\gamma(t_0))\,\gamma_p'(t_0).$$

Par exemple, si f est une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et si γ est le chemin du mouvement circulaire uniforme, on aura

$$\frac{d}{dt} f(\cos(t), \sin(t)) = \mathrm{D}_1 f(\cos(t), \sin(t))\,(-\sin(t)) + \mathrm{D}_2 f(\cos(t), \sin(t))\,\cos(t).$$

La classe C^1 *: valeurs vectorielles*

Définition 3.2.3. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$; soient $f_1, \ldots, f_p$ les p fonctions réelles coordonnées de f ; on dit que f est de classe C^1 sur U lorsque les p fonctions coordonnées f_i sont de classe C^1 dans U. Cela revient exactement à dire que toutes les dérivées partielles $\mathrm{D}_j f_i$, pour $i = 1, \ldots p$ et $j = 1, \ldots, n$ existent et sont continues dans U.

Si f est de classe C^1 dans U, alors f est différentiable en tout point de U. En effet, on a vu qu'une fonction réelle f_i de classe C^1 sur U est différentiable en tout point $a \in \mathrm{U}$ (corollaire 3.2.1). Si f est de classe C^1, il en résulte que toutes ses coordonnées sont différentiables en a, donc f est différentiable en a par la proposition 3.2.3.

Si $f : \mathrm{U}_1 \to \mathrm{U}_2$ est de classe C^1, où U_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, U_2 un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et si $g : \mathrm{U}_2 \to \mathbb{R}^q$ est de classe C^1 sur U_2, il en résulte que la composée $g \circ f$ est de classe C^1 sur U_1. En effet, on a dit que f et g sont différentiables, donc $g \circ f$ est différentiable en tout point $a \in \mathrm{U}$, donc elle y admet des dérivées partielles qui sont calculées par la formule $(**)$. Mais cette formule montre que toutes les dérivées partielles de $h = g \circ f$ sont des fonctions continues sur U_1, donc h est de classe C^1 sur U.

Proposition 3.2.4. *Soient f et g deux fonctions réelles de classe C^1 sur un ouvert $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^n$; les fonctions $f + g$, fg sont de classe C^1 sur* U. *Plus généralement, si φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, la fonction $v \in \mathrm{U} \to \varphi(f(v), g(v))$ est de classe C^1 dans* U.

Démonstration. Démontrons le cas de fg ; l'application $\mathrm{F} : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\mathrm{F}(v) = (f(v), g(v))$ est de classe C^1 puisque ses deux fonctions coordonnées f et g sont C^1. La fonction φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x, y) = xy$ est C^1 (les dérivées partielles existent et sont continues), donc la composée $\varphi \circ \mathrm{F}$ est de classe C^1, mais cette composée est égale au produit fg.

3.2.5. Théorème des accroissements finis

Lemme 3.2.1. *Soit γ une application continue de $[0, 1]$ dans un espace normé* E *de dimension finie. On suppose γ dérivable en tout point de $]0, 1[$. Si $\|\gamma'(t)\|_\mathrm{E} \le \mathrm{M}$ pour tout $t \in]0, 1[$, il en résulte que $\|\gamma(1) - \gamma(0)\|_\mathrm{E} \le \mathrm{M}$.*

Démonstration. On démontrera le lemme dans le cas où $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ et où la norme est la norme euclidienne. Dans ce cas le résultat obtenu est intuitivement évident : si on se déplace à vitesse $\le \mathrm{M}$, la distance parcourue entre les instants $t = 0$ et $t = 1$ est $\le \mathrm{M}$.

Par translation et rotation, on peut se ramener au cas où $a = \gamma(0) = (0, 0)$ et où $b = \gamma(1)$ est de la forme $(b_1, 0)$. Posons $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Alors $\|\gamma'(t)\|^2 = \gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 \le \mathrm{M}^2$, donc $|\gamma_1'(t)| \le \mathrm{M}$ pour tout $t \in]0, 1[$. Par la majoration des accroissements finis dans le cas d'une variable,

$$\|b - a\| = |b_1| = |\gamma_1(1) - \gamma_1(0| \le \mathrm{M}\,(1 - 0) = \mathrm{M}.$$

Norme sur $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

On a vu que pour toute application linéaire ℓ de E dans F il existe une constante C telle que

$$(***) \qquad \forall v \in \mathrm{E}, \quad \|\ell(v)\|_\mathrm{F} \le \mathrm{C}\, \|v\|_\mathrm{E}.$$

On définit la norme de ℓ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ comme étant la plus petite constante C telle que la propriété $(***)$ soit vraie. Montrons pourquoi cette plus petite constante C_0 existe. Sur la sphère unité S_E de l'espace normé E, on considère la fonction continue $f(v) = \|\ell(v)\|_F$. Puisque la sphère unité S_E est compacte et non vide (si $E \neq \{0\}$) on sait que f atteint son maximum sur S_E en un point $v_0 \in S_E$. Il en résulte que $\|\ell(v')\|_F \leq \|\ell(v_0)\|_F = C_0$ pour tout $v' \in S_E$; si $v \neq 0_E$ on peut considérer $v' = \|v\|_E^{-1} v$, qui est dans la sphère unité S_E, donc

$$\|v\|_E^{-1} \|\ell(v)\|_F = \|\ell(v')\|_F = f(v') \leq f(v_0) = C_0.$$

On a donc $\|\ell(v)\|_F \leq C_0 \|v\|_E$ pour tout vecteur de E, donc C_0 vérifie $(***)$. Inversement, si C convient pour $(***)$ on trouve en appliquant $(***)$ à $v = v_0$ que

$$C_0 = \|\ell(v_0)\|_F \leq C \|v_0\|_E = C$$

donc $C_0 \leq C$, et C_0 est bien la plus petite constante possible.

Théorème 3.2.3. *Soient* U *un ouvert de* E, a *et* b *deux points de* U *tels que le segment fermé* $[a, b]$ *soit contenu dans* U *; si* $f : U \to F$ *est différentiable en tout point de* U, *on a en posant* $M = \sup\{\|(df)_c\|_{\mathcal{L}(E,F)} : c \in [a, b]\}$

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq M \|b - a\|_E.$$

Démonstration. On introduit les chemins $\gamma(t) = a + t(b - a)$, dont la dérivée est $b - a$, et $\varphi(t) = f(\gamma(t))$. Le chemin φ va de $\varphi(0) = f(\gamma(0)) = f(a)$ à $\varphi(1) = f(\gamma(1)) = f(b)$, et $\varphi'(t) = (df)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = (df)_{\gamma(t)}(b - a)$ pour tout $t \in [0, 1]$. On a $\|\varphi'(t)\|_F \leq \|(df)_{\gamma(t)}\| \|b - a\|_E$. Puisque $c = \gamma(t)$ est un point du segment $[a, b]$ (lorsque $0 \leq t \leq 1$), on a $\|(df)_c\| \leq M$ donc le lemme 3.2.1 donne le résultat.