MT242, Cours n^o 15, Lundi 27 Mars 2000.

Chapitre 4. Espaces euclidiens et endomorphismes

4.1. Produit scalaire et normes euclidiennes

Définition 4.1.1. Un *espace euclidien* est un espace vectoriel réel E muni d'une forme bilinéaire symétrique β définie positive.

On adoptera le point de vue du livre de Liret-Martinais, en ne supposant pas que E soit nécessairement de dimension finie. Il faut mentionner qu'un bon nombre de mathématiciens réservent le nom d'espace euclidien à ceux qui sont *de dimension finie*. Chacun des deux choix a ses inconvénients.

On dit que β définit le *produit scalaire* de l'espace euclidien E, et on notera le produit scalaire de deux vecteurs v et w de E par

$$v \,.\, w = \beta(v, w).$$

En termes précis, un espace euclidien n'est pas seulement un espace vectoriel, mais un couple (E, β) d'un espace vectoriel E et d'une forme bilinéaire β sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$.

Exemples.

1. Donnons un exemple important d'espace euclidien de dimension infinie. Soit E l'espace $\mathrm{C}([a, b])$ des fonctions réelles continues sur $[a, b]$ (avec $a < b$), muni du produit scalaire défini pour toutes $f, g \in \mathrm{E}$ par

$$f \,.\, g = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) g(t)\, dt.$$

Le couple $(\mathrm{E}, \,.\,)$ est un espace euclidien. En effet, il est clair que $(f, g) \to f \,.\, g$ est bilinéaire, symétrique et positive. Le fait qu'elle soit définie positive provient du résultat suivant : si l'intégrale d'une fonction ≥ 0 continue est nulle, la fonction est nulle.

2. L'exemple le plus commun sera $\mathbb{R}^n$ avec son produit scalaire usuel, défini par

$$x \,.\, y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

pour deux vecteurs quelconques $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les formes bilinéaires symétriques positives,

$$\forall v, w \in \mathrm{E}, \quad \beta(v, w)^2 \leq \beta(v, v)\, \beta(w, w).$$

Pour un espace euclidien E fixé, on notera $\|v\| = \sqrt{v \,.\, v}$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne dans ce cas

$$\forall v, w \in \mathrm{E}, \quad \big| v \,.\, w \big| \leq \|v\| \, \|w\|.$$

Lemme 4.1.1. *Soit* E *un espace euclidien ; l'application* $v \to \|v\|$ *est une norme sur* E.

Démonstration. Déjà vue au chapitre 1.

Orthogonalité dans un espace euclidien

On dit que deux vecteurs v et w de E sont **orthogonaux** si $v \,.\, w = 0$. Cette relation est symétrique. On note $v \perp w$. On dit que deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E sont orthogonaux si on a $v_1 \perp v_2$ pour tous $v_1 \in \mathrm{E}_1$, $v_2 \in \mathrm{E}_2$. On note $\mathrm{E}_1 \perp \mathrm{E}_2$.

Proposition 4.1.1. Relation de Pythagore. *Si $v_1, \ldots, v_k$ sont des vecteurs deux à deux orthogonaux d'un espace euclidien* E, *on a*

$$\|v_1 + \cdots + v_k\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2.$$

Démonstration. On développe par bilinéarité et on utilise $v_i \,.\, v_j = 0$ si $i \neq j$,

$$\big\|v_1 + \cdots + v_k\big\|^2 = \Big(\sum_{i=1}^{k} v_i\Big) \,.\, \Big(\sum_{j=1}^{k} v_j\Big) = \sum_{i,j=1}^{k} v_i \,.\, v_j = \sum_{i=1}^{k} v_i \,.\, v_i = \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2.$$

Remarque 4.1.1. *Si $v_1, \ldots, v_k$ sont deux à deux orthogonaux, et si $v_1 + \cdots + v_k = 0_{\mathrm{E}}$, alors $v_1 = v_2 = \cdots = v_k = 0_{\mathrm{E}}$.*

Corollaire 4.1.1. *Si des vecteurs d'un espace euclidien sont deux à deux orthogonaux et* **non nuls**, *ils sont linéairement indépendants.*

Démonstration. Supposons $(v_1, \ldots, v_k)$ deux à deux orthogonaux et non nuls. Si on a des coefficients $c_1, \ldots, c_k$ tels que $c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k = 0_{\mathrm{E}}$, on voit que les vecteurs $c_1 v_1, \ldots, c_k v_k$ sont deux à deux orthogonaux. Si leur somme est nulle, il en résulte que $c_1 v_1 = \cdots = c_k v_k = 0_{\mathrm{E}}$ d'après la remarque précédente, donc $c_1 = \cdots = c_k = 0$ puisque les vecteurs (v_j) sont non nuls.

Corollaire 4.1.2. *Soit* E *un espace euclidien ; si les sous-espaces vectoriels* $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_k$ *de* E *sont deux à deux orthogonaux, ils forment une somme directe* $\mathrm{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_k$ *dans l'espace* E.

Démonstration. Il faut démontrer que si $v_j \in \mathrm{E}_j$ pour $j = 1, \ldots, k$ et $v_1 + \cdots + v_k = 0_{\mathrm{E}}$, alors $v_1 = \cdots = v_k = 0_{\mathrm{E}}$ (voir Liret-Martinais, Algèbre et Géométrie, page 18). Mais si $v_j \in \mathrm{E}_j$ pour chaque j, les vecteurs (v_j) sont deux à deux orthogonaux, donc le résultat découle de la remarque 4.1.1.

Base orthonormée

Soit E un espace euclidien de dimension finie ; on dit qu'un système $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est une **base orthonormée** de E si c'est une base de E et si les vecteurs (v_i) sont deux à deux orthogonaux et de norme 1,

$$\forall i \neq j, \quad v_i \,.\, v_j = 0\,; \quad \forall i = 1, \ldots, n, \ \ \|v_i\| = 1.$$

Rappel. Tout espace euclidien de dimension finie admet des bases orthonormées.

Ce résultat a été vu au chapitre 1. La méthode de Gram-Schmidt qui est présentée plus loin donnera une variante de démonstration pour ce résultat d'existence.

Coordonnées dans une base orthonormée

Soit E un espace euclidien de dimension finie, et calculons les coordonnées d'un vecteur v de E dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Ecrivons $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. En calculant le produit scalaire $v \,.\, e_j$, on obtient $x_j = v \,.\, e_j$. On voit donc que :

$$v = \sum_{i=1}^n (v \,.\, e_i)\, e_i.$$

Si $v' = \sum_{i=1}^n x'_i e_i$, on aura

$$v \,.\, v' = \Bigl(\sum_{i=1}^n x_i e_i\Bigr) \Bigl(\sum_{j=1}^n x'_j e_j\Bigr) = \sum_{i,j=1}^n x_i x'_j \, e_i \,.\, e_j = \sum_{i=1}^n x_i x'_i.$$

On voit que le produit scalaire de v et de v' se calcule comme le produit scalaire des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ formés par les coordonnées de v et v' dans une base orthonormée. Si $v = v'$,

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (v \,.\, e_i)^2.$$

Un exemple de base orthonormée. Dans l'espace $\mathrm{E} = \mathrm{C}([-\pi, \pi])$ muni du produit scalaire $f \,.\, g = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t)\, dt$, on considère le sous-espace vectoriel $\mathrm{F_N}$ de dimension $2\mathrm{N}+1$ engendré par les fonctions $t \to \cos(nt)$, pour $n = 0, \ldots, \mathrm{N}$ et par les $t \to \sin(nt)$, $n = 1, \ldots, \mathrm{N}$. On peut vérifier en utilisant les formules d'addition des sinus et cosinus que les $2\mathrm{N}+1$ fonctions sont deux à deux orthogonales (et non nulles, donc linéairement indépendantes par le corollaire 4.1.1). Pour $n = 0$, la fonction cosinus est la fonction constante égale à 1. Elle est de norme 1. En revanche les 2N autres fonctions f de la liste vérifient $\|f\|_{\mathrm{E}}^2 = 1/2$. On obtient donc une base orthonormée de $\mathrm{F_N}$ en prenant

$$t \to 1,\ t \to \sqrt{2}\, \cos(nt),\ t \to \sqrt{2}\, \sin(nt), \quad n = 1, \ldots, \mathrm{N}.$$

Projection orthogonale

Soit E un espace euclidien ; si v est un vecteur de E et F un sous-espace vectoriel de E, on dit qu'un vecteur w est la *projection orthogonale* de v sur F si

$$w \in \mathrm{F} \quad \text{et} \quad v - w \perp \mathrm{F}.$$

Le vecteur w est uniquement déterminé par ces deux conditions : si w_1 et w_2 vérifient ces conditions, alors $v - w_1$ et $v - w_2$ sont orthogonaux à F, donc la différence $w_1 - w_2$ est orthogonale à F. Mais puisque $w_1 - w_2 \in \mathrm{F}$, on peut écrire $(w_1 - w_2) \,.\, (w_1 - w_2) = 0$, ce qui implique que $w_1 = w_2$.

Si v est déjà un vecteur de F, il est évident que sa projection w sur F est égale à v. Lorsque w existe, on note $w = \mathrm{P_F}(v)$. Si le sous-espace F est de dimension finie, la projection $\mathrm{P_F}(v)$ existe pour tout vecteur $v \in \mathrm{E}$: si on choisit une base orthonormée $(f_1, \ldots, f_d)$ de F, on peut décrire l'application $\mathrm{P_F}$ de projection orthogonale de E sur F en posant pour tout $v \in \mathrm{E}$

$$\mathrm{P_F}(v) = \sum_{i=1}^d (v \,.\, f_i)\, f_i \in \mathrm{F}.$$

On voit de plus par cette formule que $\mathrm{P_F}$ est une application linéaire ; on a dit que pour tout vecteur $w \in \mathrm{F}$ on a $\mathrm{P_F}(w) = w$, ce qui entraîne que $\mathrm{P_F}(\mathrm{P_F}(v)) = \mathrm{P_F}(v)$ pour tout $v \in \mathrm{E}$, c'est à dire que $(\mathrm{P_F})^2 = \mathrm{P_F}$ (l'application linéaire $\mathrm{P_F}$ est un *projecteur*).

Si f est un vecteur quelconque de F, on pourra écrire $v - f = (v - \mathrm{P_F}(v)) + (\mathrm{P_F}(v) - f)$ et puisque $\mathrm{P_F}(v) - f \in \mathrm{F}$ et $v - \mathrm{P_F}(v) \perp \mathrm{F}$ on a par Pythagore

$$\|v - f\|^2 = \|v - \mathrm{P_F}(v)\|^2 + \|\mathrm{P_F}(v) - f\|^2.$$

Cette relation montre que $\|v - f\| \geq \|v - \mathrm{P_F}(v)\|$ pour tout $f \in \mathrm{F}$, donc $\mathrm{P_F}(v)$ est le point de F qui est le plus proche de v.

En prenant $f = 0_\mathrm{E}$ dans la relation précédente, on obtient aussi $\|v\|^2 \geq \|\mathrm{P_F}(v)\|^2$, ce qui donne par linéarité $\|\mathrm{P_F}(v_1) - \mathrm{P_F}(v_2)\| \leq \|v_1 - v_2\|$ pour tous vecteurs $v_1, v_2 \in \mathrm{E}$: l'application linéaire $\mathrm{P_F}$ diminue les distances. On a donc $\|\mathrm{P_F}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{E})} \leq 1$.

On définit l'orthogonal $\mathrm{F}^\perp$ d'un sous-espace vectoriel F de E par

$$\mathrm{F}^\perp = \{v \in \mathrm{E} : v \perp \mathrm{F}\}.$$

On voit que $\mathrm{F}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 4.1.2. *Soit* E *un espace euclidien et soit* F *un sous-espace vectoriel de dimension finie de* E *; on a*

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp \quad \textit{et} \quad (\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}.$$

Démonstration. Tout vecteur $v \in \mathrm{E}$ peut s'écrire $v = \mathrm{P_F}(v) + (v - \mathrm{P_F}v)$, avec $\mathrm{P_F}(v) \in \mathrm{F}$ et $v - \mathrm{P_F}(v) \in \mathrm{F}^\perp$, ce qui montre que $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{F}^\perp$; de plus, il est clair que $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\perp = \{0\}$, donc la somme est directe. Montrons la deuxième propriété de l'énoncé. On a toujours $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}^{\perp\perp}$. Inversement, si $v \in \mathrm{F}^{\perp\perp}$, on écrit $v = f + g$, avec $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{F}^\perp$. Puisque v est orthogonal à $\mathrm{F}^\perp$, on aura $0 = v \,.\, g = f \,.\, g + g \,.\, g = g \,.\, g$, donc $g = 0_\mathrm{E}$ et $v = f \in \mathrm{F}$.

Exemple de projection orthogonale.

Reprenons l'exemple du sous-espace $\mathrm{F_N}$ de l'espace $\mathrm{E} = \mathrm{C}([-\pi, \pi])$ engendré par la base orthonormée formée des fonctions $\mathbf{1} : t \to 1$, $\mathrm{C}_n : t \to \sqrt{2}\cos(nt)$, et $\mathrm{S}_n : t \to \sqrt{2}\sin(nt)$, $n = 1, \ldots, \mathrm{N}$. Si f est une fonction de E, sa projection orthogonale sur $\mathrm{F_N}$ est égale à

$$\mathrm{P}_{\mathrm{F_N}}(f) = (f \,.\, \mathbf{1})\, \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (f \,.\, \mathrm{C}_n)\, \mathrm{C}_n + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (f \,.\, \mathrm{S}_n)\, \mathrm{S}_n.$$

On a

$$f \,.\, \mathbf{1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt, \quad f \,.\, \mathrm{C}_n = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt,$$

$$f \,.\, \mathrm{S}_n = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt,$$

donc (en tenant compte du produit des deux facteurs $\sqrt{2}$)

$$\mathrm{P}_{\mathrm{F_N}}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \Big(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt \Big) \cos(nx) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\Bigl(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt\Bigr)\sin(nx).$$

On écrit en général cette formule sous la forme

$$\mathrm{P}_{\mathrm{F}_\mathrm{N}}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\bigl(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\bigr)$$

où

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt.$$

Les coefficients (a_n) et (b_n) s'appellent les *coefficients de Fourier* de la fonction f.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Donnons d'abord le principe général : soient E un espace euclidien de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E dont on connaît une base orthonormée $(f_1,\ldots,f_k)$, et soit $\widehat{v}\notin \mathrm{F}$; alors le vecteur $v = \widehat{v} - \mathrm{P}_\mathrm{F}(\widehat{v})$ est non nul, orthogonal à F et le vecteur $f_{k+1} = \|v\|^{-1}\,v$ permet d'allonger notre système orthonormé, puisque f_{k+1} est orthogonal à $f_1,\ldots,f_k\in \mathrm{F}$.

On peut utiliser ce principe dans le cas où une base de E est déjà donnée (mais pas orthogonale), pour construire une nouvelle base de E qui soit orthonormée. On suppose donc donnée une base quelconque $(\widehat{f}_1,\widehat{f}_2,\ldots,\widehat{f}_n)$ de E, et on va construire à partir de cette base une base orthonormée $(f_1,\ldots,f_n)$; la construction se fera de façon que pour chaque $k=1,\ldots,n$ on ait

$$\mathrm{F}_k = \mathrm{Vect}(\widehat{f}_1,\ldots,\widehat{f}_k) = \mathrm{Vect}(f_1,\ldots,f_k).$$

On commence en posant $f_1 = \|\widehat{f}_1\|^{-1}\widehat{f}_1$. Si les vecteurs $f_1,\ldots,f_{k-1}$ sont déjà déterminés, avec $\mathrm{F}_{k-1} = \mathrm{Vect}(f_1,\ldots,f_{k-1})$, on considère $u_k = \widehat{f}_k - \mathrm{P}_{\mathrm{F}_{k-1}}(\widehat{f}_k)$. Puisque $\widehat{\mathbf{f}}$ est une base, on sait que $\widehat{f}_k\notin \mathrm{F}_{k-1}$, donc $u_k\neq 0_\mathrm{E}$, et on peut poser $f_k = \|u_k\|^{-1}\,u_k$. On vérifie facilement que $\mathrm{Vect}(f_1,\ldots,f_k) = \mathrm{Vect}(\widehat{f}_1,\ldots,\widehat{f}_k)$. Quand on arrive à $k=n$ on a $\mathrm{Vect}(f_1,\ldots,f_n) = \mathrm{Vect}(\widehat{f}_1,\ldots,\widehat{f}_n)$, ce qui montre que $(f_1,\ldots,f_n)$ est une base de E. Elle est orthonormée par construction.

Il est intéressant de noter qu'on peut calculer la projection orthogonale sur F_{k-1} en se servant de la base orthonormée de F_{k-1} qui a été calculée par le début de la procédure. On obtient donc un véritable algorithme, facile à programmer, qui transforme une base quelconque en base orthonormée.

Cours n$^\mathrm{o}$ 16, Mercredi 29 Mars 2000.

Rappel sur la projection orthogonale. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace euclidien E, et si $(f_1,\ldots,f_d)$ est une base orthonormée de F, la projection orthogonale P_F de E sur F est donnée par

$$\forall v\in \mathrm{E},\quad \mathrm{P}_\mathrm{F}(v) = \sum_{j=1}^{d}(v\,.\,f_j)\,f_j\in \mathrm{F}.$$

Pour tout vecteur $v\in \mathrm{E}$ on a $\|\mathrm{P}_\mathrm{F}(v)\|\le\|v\|$, ce qui se traduit par $\|\mathrm{P}_\mathrm{F}\|\le 1$.

Séries de Fourier

Dans l'espace $\mathrm{E} = \mathrm{C}([-\pi, \pi])$ muni du produit scalaire $f \,.\, g = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$, on considère le sous-espace vectoriel $\mathrm{F_N}$ de dimension $2\mathrm{N}+1$ engendré par les fonctions $t \to \cos(nt)$, pour $n = 0, \ldots, \mathrm{N}$ et par les $t \to \sin(nt)$, $n = 1, \ldots, \mathrm{N}$. On a vu que la projection orthogonale sur $\mathrm{F_N}$ est donnée par

$$\mathrm{S_N} f(x) = \mathrm{P_{F_N}}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$$

où

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\,dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\,dt.$$

Ces coefficients sont réels puisque f est supposée réelle.

Proposition 4.1.3. *Les séries numériques $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent et de plus*

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n^2 + b_n^2\big) \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,dt.$$

Démonstration. Puisque les fonctions sont deux à deux orthogonales et que $\|\mathrm{P_{F_N}}\| \le 1$ on a

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (a_n^2 + b_n^2) = \|\mathrm{S_N} f\|_{\mathrm{E}}^2 \le \|f\|_{\mathrm{E}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,dt.$$

pour tout N, ce qui donne le résultat en faisant tendre N vers $+\infty$.

Coefficients de Fourier complexes

On transforme pour $n \ge 1$ l'expression $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ de la façon suivante :

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \big(\cos(nt)\cos(nx) + \sin(nt)\sin(nx)\big)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt - nx)\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \big(\mathrm{e}^{int - inx} + \mathrm{e}^{-int + inx}\big)\,dt =$$

$$= \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{int}\,dt\Big)\,\mathrm{e}^{-inx} + \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,dt\Big)\,\mathrm{e}^{inx} = c_{-n}\,\mathrm{e}^{-inx} + c_n\,\mathrm{e}^{inx},$$

où on a posé maintenant pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,dt = a_n - ib_n.$$

On obtient ainsi

$$\mathrm{S_N} f(x) = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_n\,\mathrm{e}^{inx}.$$

Corollaire 4.1.3. *Pour toute fonction continue f sur $[-\pi, \pi]$, réelle ou complexe, on a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$; en particulier, les coefficients $c_n(f)$ tendent vers 0 lorsque $|n| \to +\infty$.*

Démonstration. Le cas réel est clair à partir de ce qui précède. Dans le cas complexe, il suffit de décomposer f en partie réelle et partie imaginaire, et d'appliquer le résultat réel aux deux parties.

Théorème 4.1.1. *Si g est une fonction 2π-périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, la série de Fourier de g converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et*

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)\,\mathrm{e}^{inx}\,.$$

Démonstration. On fixe $x \in [-\pi, \pi]$ et on écrit

$$\mathrm{S_N}g(x) = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_n(g)\,\mathrm{e}^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\Bigl(\sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \mathrm{e}^{n(ix-it)}\Bigr)\,dt.$$

La grande parenthèse est de la forme

$$\sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} a^n = a^{-\mathrm{N}}\sum_{n=0}^{2\mathrm{N}} a^n = a^{-\mathrm{N}}\,\frac{1-a^{2\mathrm{N}+1}}{1-a} = \frac{a^{-\mathrm{N}}-a^{\mathrm{N}+1}}{1-a}$$

où $a = \mathrm{e}^{ix-it}$. On a donc

$$\mathrm{S_N}g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\Bigl(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{N}(ix-it)}-\mathrm{e}^{(\mathrm{N}+1)(ix-it)}}{1-\mathrm{e}^{ix-it}}\Bigr)\,dt.$$

Si on applique la même formule à la fonction constante g_0 définie par $g_0(t) = g(x)$ pour tout t et si on fait la différence, on obtient

$$g(x) - \mathrm{S_N}g(x) =$$

$$= \mathrm{S_N}g_0(x) - \mathrm{S_N}g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bigl(g(x)-g(t)\bigr)\Bigl(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{N}(ix-it)}-\mathrm{e}^{(\mathrm{N}+1)(ix-it)}}{1-\mathrm{e}^{ix-it}}\Bigr)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Bigl(\frac{g(x)-g(t)}{1-\mathrm{e}^{ix-it}}\Bigr)\bigl(\mathrm{e}^{-\mathrm{N}(ix-it)}-\mathrm{e}^{(\mathrm{N}+1)(ix-it)}\bigr)\,dt.$$

La fonction f définie par $f(t) = (g(x)-g(t))/(1-\mathrm{e}^{ix-it})$ pour $t \neq x$ se prolonge par continuité en posant $f(x) = ig'(x)$ (calcul de limite élémentaire). On a donc

$$g(x) - \mathrm{S_N}g(x) == \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bigl(\mathrm{e}^{-\mathrm{N}(ix-it)}-\mathrm{e}^{(\mathrm{N}+1)(ix-it)}\bigr)\,dt =$$

$$= c_{-\mathrm{N}}(f)\,\mathrm{e}^{-i\mathrm{N}x} - c_{\mathrm{N}+1}(f)\,\mathrm{e}^{i(\mathrm{N}+1)x},$$

mais ceci tend vers 0 quand $\mathrm{N} \to +\infty$ d'après le corollaire 4.1.3 parce que f est continue.

Remarque non démontrée. Si g est de classe C^1, alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)| < +\infty$. La série de Fourier est donc absolument convergente dans le cas d'une fonction de classe C^1 (en fait, on a ici une série de fonctions normalement convergente sur $\mathbb{R}$).

4.2. Endomorphismes des espaces euclidiens

Endomorphismes symétriques (ou autoadjoints)

Définition 4.2.1. Soit E un espace euclidien ; on dit que $a \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est un endomorphisme symétrique si

$$\forall v, w \in \mathrm{E}, \quad a(v)\,.\,w = v\,.\,a(w).$$

La matrice de a dans toute base orthonormée de E est alors symétrique ; en effet, si $\mathbf{e}$ est une base orthonormée de E et $A = \mathrm{mat}(a, \mathbf{e})$, on sait que $A_{i,j}$ est la $i$ème coordonnée du vecteur $a(e_j)$ dans la base orthonormée $\mathbf{e}$, donc

$$A_{i,j} = e_i \,.\, a(e_j) = a(e_i) \,.\, e_j = A_{j,i}.$$

Inversement, si la matrice A de a dans *une* base orthonormée de E est symétrique, l'endomorphisme a est symétrique. En effet, on a remarqué que le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit scalaire des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ formés par leurs coordonnées dans une base orthonormée. Si le vecteur colonne X représente les coordonnées de v et Y celles de w, alors les coordonnées de $a(v)$ sont données par AX, et

$$a(v) \,.\, w = (AX) \,.\, Y = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = {}^tX(AY) = v \,.\, a(w).$$

Produit scalaire complexe

Pour travailler dans le cas complexe, il est commode d'utiliser le *produit scalaire complexe* sur $\mathbb{C}^n$. Si $v = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $v' = (z'_1, \ldots, z'_n) \in \mathbb{C}^n$ on pose

$$\langle v, v' \rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \, \overline{z'_j}.$$

On a $\langle v, v \rangle = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \geq 0$, et le résultat ne peut être nul que si $z_1 = \cdots = z_n = 0$, c'est à dire si $v = 0_{\mathbb{C}^n}$. On voit que $v \to \langle v, v' \rangle$ est $\mathbb{C}$-linéaire, et

$$\forall v, v' \in \mathbb{C}^n, \quad \langle v', v \rangle = \overline{\langle v, v' \rangle}.$$

On dit que $v, w \in \mathbb{C}^n$ sont $\mathbb{C}$-orthogonaux si $\langle v, w \rangle = 0$. Cette relation d'orthogonalité est symétrique (bien que le produit scalaire complexe ne soit pas symétrique !).

Définition 4.2.2. Soit E un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^d$; on dit qu'un $\mathbb{C}$-endomorphisme $a \in \mathcal{L}(E)$ est *hermitien* si

$$\forall v, w \in E, \quad \langle a(v), w \rangle = \langle v, a(w) \rangle.$$

Définition 4.2.3. Soit A une matrice carrée à coefficients complexes ; on dit que A est une *matrice hermitienne* si

$$A_{i,j} = \overline{A_{j,i}}$$

pour tout couple (i, j) d'indices.

Exemples.

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$$

est hermitienne. Si on considère l'endomorphisme a de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A, on a vérifié à l'amphi que

$$\forall v, v' \in \mathbb{C}^2, \quad \langle a(v), v' \rangle = \langle v, a(v') \rangle$$

c'est à dire que a est hermitien.

Plus généralement, si A est une matrice hermitienne, elle permet de définir un endomorphisme a de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A. On obtient ainsi un endomorphisme hermitien de $\mathbb{C}^n$.

2. On remarque que les matrices symétriques réelles sont un cas particulier des matrices hermitiennes.

Théorème 4.2.1. *Si a est hermitien, ses valeurs propres sont réelles et il existe une base $\mathbb{C}$-orthonormée de* E *formée de vecteurs propres de a.*

Démonstration. Montrons que les valeurs propres de a sont réelles : si $a(v) = \lambda v$, on aura en supposant $\langle v, v\rangle = 1$ que $\lambda = \langle \lambda v, v\rangle = \langle a(v), v\rangle = \langle v, a(v)\rangle = \overline{\lambda}$.

On montre ensuite l'existence d'une base de vecteurs propres par récurrence sur la dimension n de E. C'est facile quand $n = 1$. Supposons le résultat établi pour tout espace E' de dimension $n-1$. Soit maintenant E un sous-espace de dimension n de $\mathbb{C}^d$ et soit a un endomorphisme hermitien de E ; puisqu'on travaille sur $\mathbb{C}$, on peut toujours trouver un vecteur propre f_0 de a, qui vérifie donc que $f_0 \neq 0_{\mathrm{E}}$ et $a(f_0) = \lambda f_0$ (avec λ réel d'après ce qui précède). On peut supposer $\|f_0\| = 1$. Alors

$$\mathrm{E}' = \{v \in \mathrm{E} : v \perp f_0\}$$

est un sous-espace de dimension $n-1$, qui est stable par a (en effet, pour tout $v \in \mathrm{E}'$, on a $\langle a(v), f_0\rangle = \langle v, a(f_0)\rangle = \lambda\langle v, f_0\rangle = 0$, donc $a(v) \in \mathrm{E}'$). On applique alors l'hypothèse de récurrence à la restriction a' de a à E' : on trouve une base $\mathbb{C}$-orthonormée $(f'_1, \ldots, f'_{n-1})$ de E' formée de vecteurs propres de a', donc de a ; pour finir, $(f_0, f'_1, \ldots, f'_{n-1})$ est une base $\mathbb{C}$-orthonormée de E formée de vecteurs propres de a.

Diagonalisation des endomorphismes symétriques

On revient au cas réel.

Lemme 4.2.1 *Si a est symétrique sur un espace euclidien de dimension finie > 0, il existe au moins un vecteur propre : il existe $v \in \mathrm{E}$, $v \neq 0_{\mathrm{E}}$ et $a(v) = \lambda v$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{e}$ une base orthonormée de l'espace E et considérons la matrice $\mathrm{A} = \mathrm{mat}(a, \mathbf{e})$. C'est une matrice réelle symétrique, donc hermitienne. Il en résulte que ses valeurs propres sont réelles. Mais le polynôme caractéristique de a est égal à celui de A. Il existe donc λ réel tel que $\det(a - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = 0$, ce qui signifie que λ est valeur propre de a, c'est à dire qu'il existe un vecteur $v \in \mathrm{E}$ non nul tel que $a(v) = \lambda v$.

A la rentrée on démontrera le résultat suivant.

Théorème 4.2.2. Diagonalisation des endomorphismes symétriques. *Soit* E *un espace euclidien de dimension finie > 0 ; si $a \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est symétrique, les racines du polynôme caractéristique de a sont réelles et on peut trouver une base orthonormée de* E *formée de vecteurs propres de a.*