MT242, Cours n° 19, Mercredi 26 Avril 2000.

Chapitre 5. Intégrale double

L'intégrale correspond à une idée très simple :

l'intégrale est une limite de sommes de petits bouts.

L'idée d'intégrale est beaucoup plus ancienne que le calcul différentiel. On peut prétendre que les calculs de surface et de volumes effectués dans l'Antiquité étaient des précurseurs de la notion d'intégrale. Le calcul différentiel n'est apparu qu'au cours du 17ème siècle.

Supposons qu'on veuille calculer "à l'antique" la surface comprise entre les verticales $x = 0$ et $x = 1$, l'horizontale $y = 0$ et la courbe d'équation $y = x^2$, c'est à dire calculer l'aire du domaine

$$\mathrm{A} = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}.$$

On procède de la façon suivante : on découpe $[0, 1]$ en n parties égales, chacune de longueur $1/n$, et on encadre le domaine A entre deux domaines $\mathrm{A}_n^{\mathrm{inf}}$ et $\mathrm{A}_n^{\mathrm{sup}}$, qui sont chacun réunion de n rectangles, et tels que $\mathrm{A}_n^{\mathrm{inf}} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{A}_n^{\mathrm{sup}}$; l'ensemble $\mathrm{A}_n^{\mathrm{inf}}$ est constitué des rectangles R_k limités par le segment $[(k-1)/n, k/n]$ de l'axe $y = 0$, les droites verticales $x = (k-1)/n$ et $x = k/n$ et la droite horizontale d'ordonnée $y = (k-1)^2/n^2$, où k varie de 1 à n.

Etant donné que je ne sais pas inclure de figures dans ces notes de cours, le lecteur devra prendre une feuille de papier et faire un dessin à partir des explications qui précèdent. Il verra alors que chacun des rectangles R_k est contenu dans A ; pour former $\mathrm{A}_n^{\mathrm{sup}}$ on prend des rectangles R'_k plus grands limités par la droite d'ordonnée $y = k^2/n^2$. On obtient l'encadrement suivant pour les aires

$$\mathrm{aire}(\mathrm{A}_n^{\mathrm{inf}}) = a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^2}\,\frac{1}{n} \le \mathrm{aire}(\mathrm{A}) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}\,\frac{1}{n} = a'_n = \mathrm{aire}(\mathrm{A}_n^{\mathrm{sup}}).$$

En utilisant la formule qui donne la somme des n premiers carrés d'entiers

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1/2)(n+1)}{3} \sim \frac{n^3}{3}$$

(formule très ancienne) on s'aperçoit que a_n et a'_n tendent tous les deux vers $1/3$. On en déduit que l'aire cherchée vaut $1/3$.

Si on saute une bonne quinzaine de siècles on obtient la méthode qu'on apprend de nos jours en terminale : la fonction $x \to x^2$ admet $x \to x^3/3$ comme primitive ; il en résulte (mais pourquoi, au fait ? ? ?) que

$$\mathrm{aire}(\mathrm{A}) = \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

La deuxième méthode est évidemment plus rapide, mais c'est la première qui donne une bonne idée de la définition de l'intégrale.

5.1. Fonctions élémentaires et leur intégrale

En une dimension, une *fonction élémentaire sur* $[a, b]$ (terminologie non consacrée) est une fonction réelle φ définie sur $[a, b]$, qui prend une valeur constante h sur un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$, où $a \le \alpha \le \beta \le b$, et qui est nulle en dehors de $[\alpha, \beta]$; il est commode de laisser la fonction φ prendre des valeurs quelconques aux points α et β : ces deux valeurs n'auront pas d'influence sur l'intégrale de φ, qui est définie par

$$\int_a^b \varphi(t)\, dt = (\beta - \alpha)\, h.$$

En dimension deux, considérons un pavé borné P, c'est à dire un rectangle fermé $[a, b] \times [c, d]$ de côtés parallèles aux axes. On dira que ψ est une *fonction élémentaire sur* P s'il existe une fonction élémentaire $x \to \varphi_1(x)$ sur $[a, b]$ et une fonction élémentaire $y \to \varphi_2(y)$ sur $[c, d]$ telles que $\psi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$. La fonction ψ prend donc une valeur constante $h = h_1 h_2$ sur un sous-rectangle ouvert $]\alpha, \beta[\times]\gamma, \delta[$ de P, elle est nulle en dehors du rectangle fermé $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$. On définira son intégrale double sur P par

$$\iint_{\mathrm{P}} \psi(x, y)\, dx\, dy = (\beta - \alpha)(\delta - \gamma)\, h$$

c'est à dire la valeur constante h multipliée par la surface du sous-rectangle où $\varphi = h$.

On dit que φ est une *fonction en escalier* sur $[a, b]$ si φ est une combinaison linéaire de fonctions élémentaires sur $[a, b]$. On dit que ψ est une fonction en escalier sur P si ψ est une combinaison linéaire de fonctions élémentaires sur P. Par définition, les fonctions en escalier sur $[a, b]$ (ou bien sur P) forment un espace vectoriel de fonctions.

On peut décrire les fonctions en escalier sur $[a, b]$ d'une autre façon : on appelle *subdivision* π de l'intervalle $[a, b]$ la donnée d'un entier $n \ge 1$ et d'une suite de points $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$. On peut alors vérifier que :

une fonction réelle φ définie sur $[a, b]$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $\pi = (x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b)$ de l'intervalle telle que φ soit constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$ de la subdivision, pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Considérons maintenant un pavé borné fixé $\mathrm{P} = [a, b] \times [c, d]$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. On appelle *subdivision* π du pavé P la donnée d'une subdivision $\pi_x = (x_0 = a < \ldots < x_m = b)$ de $[a, b]$ et d'une subdivision $\pi_y = (y_0 = c < \ldots < y_n = d)$ de $[c, d]$. On dira que les mn rectangles $\mathrm{R}_{i,j} =]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[$, pour $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$, sont les rectangles (ouverts) de la subdivision.

On peut vérifier qu'une fonction réelle ψ définie sur le pavé borné $\mathrm{P} = [a, b] \times [c, d]$ est une fonction en escalier sur le pavé P s'il existe une subdivision π du pavé P (avec $\pi_x = (x_0 = a < \ldots < x_m = b)$ et $\pi_y = (y_0 = c < \ldots < y_n = d)$) telle que ψ soit constante sur chaque rectangle ouvert $]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[$, pour $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$, et constante aussi sur tous les segments de bordure (segments ouverts) de ces rectangles, horizontaux et verticaux (cette dernière condition n'est pas importante pour le calcul des intégrales, elle est plutôt de nature technique).

Définition 5.1.1. Soit φ une fonction réelle en escalier définie sur l'intervalle $[a, b]$ et soit $\pi = (x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b)$ une subdivision adaptée à φ, c'est à dire que

φ est constante égale à h_i sur chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$ de la subdivision, pour $i = 1, \ldots, n$. On définit *l'intégrale de φ sur $[a, b]$* par l'expression

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\,h_i.$$

Parfois, on notera simplement $\int_a^b \varphi$ pour abréger.

Définition 5.1.2. Soit ψ une fonction réelle en escalier définie sur le pavé $\mathrm{P} = [a, b] \times [c, d]$ et soit $\pi = (x_0 = a < x_1 < \ldots < x_m = b)$ et $\pi' = (y_0 = c < y_1 < \ldots < y_n = d)$ deux subdivisions telles que ψ soit constante égale à $h_{i,j}$ sur les rectangles ouverts $\mathrm{R}_{i,j} =]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[$ pour $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$. On définit *l'intégrale de ψ sur* P en posant

$$\iint_{\mathrm{P}} \psi(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\mathrm{P}} \psi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})\,h_{i,j}.$$

Pour que ces deux définitions soient tout à fait correctes, il faudrait monter que le résultat ne dépend que de la fonction φ ou ψ, et pas de la subdivision choisie. On a admis ce point.

Proposition 5.1.1. Linéarité et majoration de l'intégrale des fonctions en escalier. *Si φ_1 et φ_2 sont deux fonctions réelles en escalier sur $[a, b]$, on a*

$$(1) \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)(t)\,dt = \lambda_1 \int_a^b \varphi_1(t)\,dt + \lambda_2 \int_a^b \varphi_2(t)\,dt\,;$$

$$(2) \qquad \Bigl(\varphi_1 \le \varphi_2 \textit{ sur } [a, b]\Bigr) \Rightarrow \Bigl(\int_a^b \varphi_1(t)\,dt \le \int_a^b \varphi_2(t)\,dt\Bigr)\,;$$

$$(3) \qquad \Bigl|\int_a^b \varphi(t)\,dt\Bigr| \le \int_a^b \bigl|\varphi(t)\bigr|\,dt.$$

Si ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions réelles en escalier sur P, *on a*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \iint_{\mathrm{P}} (\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) = \lambda_1 \iint_{\mathrm{P}} \psi_1 + \lambda_2 \iint_{\mathrm{P}} \psi_2\,;$$

$$\Bigl(\psi_1 \le \psi_2 \textit{ sur } \mathrm{P}\Bigr) \Rightarrow \Bigl(\iint_{\mathrm{P}} \psi_1 \le \iint_{\mathrm{P}} \psi_2\Bigr)\,;$$

$$\Bigl|\iint_{\mathrm{P}} \psi(x, y)\,dx\,dy\Bigr| \le \iint_{\mathrm{P}} \bigl|\psi(x, y)\bigr|\,dx\,dy.$$

Démonstration. On a admis la première propriété. Pour la deuxième, on remarque qu'il est clair sur la définition que $\int_a^b \varphi \ge 0$ lorsque φ est une fonction en escalier ≥ 0 ; la deuxième propriété en résulte par linéarité,

$$0 \le \int_a^b (\varphi_2 - \varphi_1) = \int_a^b \varphi_2 - \int_a^b \varphi_1.$$

La troisième propriété s'obtient en encadrant φ entre $-|\varphi|$ et $|\varphi|$, et en appliquant les deux premières propriétés. La vérification en dimension deux est identique à celle de la dimension un.

5.2. Fonctions intégrables

Intégrabilité par encadrement

Définition 5.2.1. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $[a,b]$; on dit que la fonction f est *Riemann-intégrable* sur $[a,b]$ si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\varphi^{\inf}$ et $\varphi^{\sup}$ sur $[a,b]$ telles que $\varphi^{\inf} \le f \le \varphi^{\sup}$ sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b \varphi^{\sup}(t)\,dt - \int_a^b \varphi^{\inf}(t)\,dt < \varepsilon.$$

Définition 5.2.2. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un pavé P ; on dit que la fonction f est *Riemann-intégrable* sur P si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\psi^{\inf}$ et $\psi^{\sup}$ sur P telles que $\psi^{\inf} \le f \le \psi^{\sup}$ sur P et

$$\iint_{\mathrm{P}} \psi^{\sup} - \iint_{\mathrm{P}} \psi^{\inf} < \varepsilon.$$

Remarque. Si f est intégrable-Riemann, alors f est BORNEE. Cela résulte du fait que les fonctions en escalier sont bornées, parce qu'elle ne prennent qu'un nombre fini de valeurs réelles.

Si f est intégrable, on peut définir l'intégrale de f en posant

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sup\{\int_a^b \varphi^{\inf} : \varphi^{\inf} \le f, \quad \varphi^{\inf} \text{ en escalier } \} =$$

$$\inf\{\int_a^b \varphi^{\sup} : f \le \varphi^{\sup}, \quad \varphi^{\sup} \text{ en escalier } \}$$

et de la même façon pour l'intégrale double,

$$\iint_{\mathrm{P}} f(x,y)\,dx\,dy = \sup\{\iint_{\mathrm{P}} \psi^{\inf} : \psi^{\inf} \le f, \quad \psi^{\inf} \text{ en escalier sur P}\} =$$

$$\inf\{\iint_{\mathrm{P}} \psi^{\sup} : f \le \psi^{\sup}, \quad \psi^{\sup} \text{ en escalier sur P}\}$$

Remarque idéologique. L'intégrale est une limite de sommes de “petits bouts”. Dans un problème physique, l'intégrale a la même “dimension” (au sens des physiciens) que les petits bouts $f(t)\,dt$. Ceci s'applique à la plupart des intégrales physiques (telles que travail, flux, etc...).

Intégrabilité par approximation

Pour démontrer certaines propriétés, il est commode de transformer un peu la caractérisation de l'intégrabilité par encadrement pour obtenir une caractérisation *par approximation en escalier*. On obtient une définition équivalente de l'intégrabilité d'une fonction réelle f définie sur $[a,b]$ en disant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ sur $[a,b]$ telles que

$$|f - \varphi| \le \psi \quad \text{et} \quad \int_a^b \psi < \varepsilon.$$

Dans le cas de l'intégrale double : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ sur P telles que

$$|f - \varphi| \leq \psi \quad \text{et} \quad \iint_{\mathrm{P}} \psi < \varepsilon.$$

Pour passer de la formulation par encadrement, avec deux fonctions $\varphi^{\inf}, \varphi^{\sup}$ en escalier telles que $\varphi^{\inf} \leq f \leq \varphi^{\sup}$ à celle de la ligne précédente, il suffit de poser par exemple $\varphi = \varphi^{\inf}$ et $\psi = \varphi^{\sup} - \varphi^{\inf}$; dans ce cas $|f - \varphi| = f - \varphi^{\inf} \leq \varphi^{\sup} - \varphi^{\inf} = \psi$ et $\int_a^b \psi < \varepsilon$. Inversement, étant données φ et ψ qui donnent l'approximation, il suffit de poser $\varphi^{\inf} = \varphi - \psi$, $\varphi^{\sup} = \varphi + \psi$, et on obtient $\varphi^{\inf} \leq f \leq \varphi^{\sup}$, avec $\int_a^b \varphi^{\sup} - \int_a^b \varphi^{\inf} < 2\varepsilon$.

Proposition 5.2.1. Linéarité et majoration.

1. Si f_1 et f_2 sont R-*intégrables sur $[a, b]$, leurs combinaisons linéaires sont* R-*intégrables sur $[a, b]$ et*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t)\, dt = \lambda_1 \int_a^b f_1(t)\, dt + \lambda_2 \int_a^b f_2(t)\, dt.$$

2. Si f et g sont R-*intégrables sur $[a, b]$ et si $f \leq g$ sur $[a, b]$, il en résulte que*

$$\int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt.$$

3. Si f est R-*intégrable sur $[a, b]$, la fonction $t \to |f(t)|$ est* R-*intégrable sur $[a, b]$ et on a l'inégalité*

$$\Bigl| \int_a^b f(t)\, dt \Bigr| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Si f_1 et f_2 sont R-*intégrables sur* P*, leurs combinaisons linéaires sont* R-*intégrables sur* P *et*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \iint_{\mathrm{P}} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \iint_{\mathrm{P}} f_1 + \lambda_2 \iint_{\mathrm{P}} f_2.$$

Si f et g sont R-*intégrables sur* P *et si $f \leq g$ sur* P*, il en résulte que*

$$\iint_{\mathrm{P}} f \leq \iint_{\mathrm{P}} g.$$

Si f est R-*intégrable sur* P*, la fonction $(x, y) \to |f(x, y)|$ est* R-*intégrable sur* P *et on a l'inégalité*

$$\Bigl| \iint_{\mathrm{P}} f(x, y)\, dx\, dy \Bigr| \leq \iint_{\mathrm{P}} |f(x, y)|\, dx\, dy.$$

Démonstration. On a admis que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est R-intégrable et la linéarité de l'intégrale. Si $f \geq 0$, il est clair que $\int_a^b f \geq 0$ puisque $\varphi_0^{\inf} = 0$ est en escalier et plus petite que f, et que $\int_a^b f \geq \int_a^b \varphi_0^{\inf} = 0$ par définition de l'intégrale. La deuxième propriété en découle comme dans le cas des fonctions en escalier.

La vérification du point 3 est très simple par approximation : si $|f - \varphi| \leq \psi$ et $\int_a^b \psi < \varepsilon$, on aura aussi

$$\bigl| |f| - |\varphi| \bigr| \leq \psi,$$

donc $|\varphi|$ est une fonction en escalier qui donne l'approximation souhaitée pour la fonction valeur absolue $|f|$. L'inégalité sur les intégrales résulte de la deuxième propriété, appliquée à l'encadrement $-|f| \leq f \leq |f|$. Les vérifications sont identiques pour l'intégrale double.

Proposition 5.2.2. *Soient* f_1 *et* f_2 *deux fonctions Riemann-intégrables sur* $[a, b]$ *(ou bien sur un pavé* P*) ; la fonction produit* $f_1 f_2$ *est Riemann-intégrable sur* $[a, b]$ *(ou bien sur le pavé* P*).*

Démonstration. Repoussée à plus tard.

Fonctions intégrables usuelles

Théorème 5.2.1. *Si* f *est une fonction réelle continue sur un compact* K*, elle est uniformément continue sur* K*, c'est à dire que pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tel que*

$$\forall x, y \in \mathrm{K}, \ \big(d(x, y) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big).$$

Démonstration. Par l'absurde : si le résultat n'était pas vrai, il existerait $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, on puisse trouver deux points x, y dans K tels que $d(x, y) < \delta$ mais $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$. En appliquant avec $\delta = 2^{-n}$ pour $n = 0, 1, \ldots$ on trouve deux suites de points x_n, y_n dans K telles que $d(x_n, y_n) \to 0$ mais $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ pour tout $n \geq 0$. Par Bolzano on extrait une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers $\xi \in \mathrm{K}$. Alors (y_{n_k}) converge vers la même limite ξ. Par continuité de f on obtient à la limite l'inégalité absurde $|f(\xi) - f(\xi)| \geq \varepsilon_0 > 0$.

Théorème 5.2.2. *Si* f *est continue sur* $\mathrm{P} = [a, b] \times [c, d]$*, elle est* R*-intégrable sur* P*.*

Démonstration par continuité uniforme et approximation en escalier : soit $\varepsilon > 0$ donné, et choisissons $\varepsilon_0 > 0$ tel que $(b-a)(d-c)\varepsilon_0 < \varepsilon$; si f est continue sur le pavé fermé borné P, elle est uniformément continue sur P ; il existe donc $\eta > 0$ tel que $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon_0$ dès que la distance des points (x, y) et (x', y') est $< \eta$. On choisit alors une subdivision $\pi = (\mathrm{R}_{i,j})$ de P telle que tous les rectangles de P aient un diamètre $< \eta$ (c'est à dire que tout couple de points de $\mathrm{R}_{i,j}$ a une distance $< \eta$). On prend ensuite un point $\xi_{i,j}$ quelconque dans $\mathrm{R}_{i,j}$, un point quelconque ξ_α dans chaque segment de bordure S_α, et on définit une fonction en escalier φ sur P, égale à $f(\xi_{i,j})$ sur $\mathrm{R}_{i,j}$, pour chaque rectangle $\mathrm{R}_{i,j}$, à $f(\xi_\alpha)$ sur chaque segment de bordure S_α et à $f(x_i, y_j)$ pour chaque sommet (x_i, y_j) des rectangles de π. On a alors $|f - \varphi| < \varepsilon_0$ sur P, ce qui permet de conclure en prenant $\psi = \varepsilon_0$; on a de plus $\iint_{\mathrm{P}} \psi = (b-a)(d-c)\varepsilon_0 < \varepsilon$.

Intégrale et primitives

Soit f une fonction réelle continue définie sur un intervalle ouvert I ; soit a un point fixé de I et posons

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

pour tout $x \in \mathrm{I}$ (avec la convention habituelle lorsque $x < a$).

Théorème 5.2.3. *La fonction* F *est une primitive de* f *sur* I*. On a donc montré que toute fonction continue sur un intervalle ouvert* I *admet des primitives.*

Démonstration. Repoussée à plus tard.

Corollaire 5.2.1. *Si* f *est continue sur* I*, si* F *est une primitive de* f *sur* I *et si* $a, b \in \mathrm{I}$ *on a*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Démonstration. Posons

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt - \mathrm{F}(x)$$

pour $x \in \mathrm{I}$. D'après le théorème précédent, la fonction g est dérivable sur I et $g'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Il en résulte que g est constante sur I, donc

$$g(b) = \int_a^b f(t)\, dt - \mathrm{F}(b) = g(a) = -\mathrm{F}(a)$$

ce qui donne le résultat voulu.