MT242, Cours n° 20, Mercredi 3 Mai 2000.

On va commencer par démontrer deux résultats qui ont été laissés en plan la dernière fois. Soit f une fonction réelle continue définie sur un intervalle ouvert I ; soit a un point fixé de I et posons

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

pour tout $x \in \mathrm{I}$ (avec la convention habituelle lorsque $x < a$).

Théorème 5.2.3. *La fonction* F *est une primitive de* f *sur* I.

Démonstration. Montrons que pour tout $x \in \mathrm{I}$, le nombre $f(x)$ est la dérivée de F au point x. On a

$$\left|\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h} - f(x)\right| = \Bigl|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\,dt\Bigr| \le \Bigl|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,dt\Bigr| \le \varepsilon$$

si $|h|$ est choisi assez petit pour que $x+h \in \mathrm{I}$ et $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$ pour tout t entre les points x et $x+h$.

Proposition 5.2.2. *Soient f_1 et f_2 deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ (ou bien sur un pavé* P*) ; la fonction produit $f_1 f_2$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ (ou bien sur le pavé* P*).*

Démonstration. Soit M une borne pour les fonctions $|f_1|$ et $|f_2|$, et soit φ_1 une approximation en escalier de f_1, telle que $|f_1 - \varphi_1| \le \psi_1$, avec ψ_1 en escalier et $\int_a^b \psi_1 < \varepsilon/(2\mathrm{M})$. Puisque $|f_1| \le \mathrm{M}$, on peut supposer que $|\varphi_1| \le \mathrm{M}$ (micro-exercice). Soit de même φ_2 une approximation en escalier de f_2, telle que $|f_2 - \varphi_2| \le \psi_2$, avec ψ_2 en escalier et $\int_a^b \psi_2 < \varepsilon/(2\mathrm{M})$; on a alors

$$f_1 f_2 - \varphi_1\varphi_2 = (f_1 - \varphi_1) f_2 + \varphi_1 (f_2 - \varphi_2),$$

donc

$$|f_1 f_2 - \varphi_1\varphi_2| \le \mathrm{M}\psi_1 + \mathrm{M}\psi_2 = \psi,$$

et on obtient $\int_a^b \psi < \varepsilon$, ψ et $\varphi = \varphi_1\varphi_2$ en escalier.

5.3. Calcul des intégrales doubles

Lemme 5.3.1. *Soit φ une fonction en escalier sur le pavé borné $\mathrm{P} = [a,b]\times[c,d]$, à valeurs réelles ; pour tout x fixé dans $[a,b]$, la fonction $y \to \varphi(x,y)$ est en escalier sur $[c,d]$, et la fonction $x \to \int_c^d \varphi(x,y)\,dy$ est en escalier sur $[a,b]$. De plus,*

$$\iint_{\mathrm{P}} \varphi = \int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x,y)\,dy\right) dx.$$

Démonstration. Puisque toute fonction en escalier est une combinaison linéaire de fonctions élémentaires, il suffit de montrer le résultat pour une fonction élémentaire $\psi(x,y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$, où φ_1 est égale à une constante ξ_1 sur $]\alpha,\beta[\subset [a,b]$ et φ_2 est égale à ξ_2 sur $]\gamma,\delta[\subset [c,d]$; alors ψ est égale à $\xi = \xi_1\xi_2$ sur $]\alpha,\beta[\times]\gamma,\delta[$ et à 0 en dehors de $[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$.

Pour tout x fixé, la fonction $y \to \psi(x,y)$ est égale à la fonction $\varphi_1(x)\varphi_2$, qui est une fonction en escalier sur $[c,d]$. De plus

$$\int_c^d \psi(x,y)\,dy = \varphi_1(x)\int_c^d \varphi_2 = (\delta-\gamma)\xi_2\,\varphi_1(x)$$

montre que $x \to \int_c^d \psi(x,y)\,dy$ est un multiple de φ_1, donc est en escalier sur $[a,b]$. Finalement,

$$\int_a^b \Big(\int_c^d \psi(x,y)\,dy\Big)\,dx = (\delta-\gamma)\xi_2\int_a^b \varphi_1 = (\beta-\alpha)(\delta-\gamma)\xi_1\xi_2 = \iint_{\mathrm{P}} \psi.$$

Le résultat précédent, généralisé convenablement, est l'outil fondamental pour le calcul des intégrales doubles.

Rappel : intégrabilité par approximation. Si f est intégrable sur le pavé P, on trouve φ et ψ en escalier sur P telles que $|f-\varphi| \le \psi$ et $\iint_{\mathrm{P}} \psi < \varepsilon$. Alors

$$\Big|\iint_{\mathrm{P}} f - \iint_{\mathrm{P}} \varphi\Big| \le \iint_{\mathrm{P}} |f-\varphi| < \iint_{\mathrm{P}} \psi < \varepsilon.$$

La même remarque s'applique à l'intégrale simple.

Théorème 5.3.1. (Calcul des intégrales doubles) *Soit f une fonction réelle Riemann-intégrable sur le pavé borné $\mathrm{P} = [a,b]\times[c,d]$ et telle que pour tout $x \in [a,b]$, la fonction partielle $y \to f(x,y)$ soit Riemann-intégrable sur $[c,d]$; alors la fonction $x \to \int_c^d f(x,y)\,dy$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et on a*

$$\iint_{\mathrm{P}} f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ donné ; il existe deux fonctions en escalier φ et ψ sur le pavé P telles que $|f-\varphi| \le \psi$ sur P et $\iint_{\mathrm{P}} \psi < \varepsilon$. Il résulte de l'encadrement que pour tout $x \in [a,b]$, on a en posant

$$\Phi(x) = \int_c^d \varphi(x,y)\,dy, \quad \mathrm{F}(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

l'inégalité

$$|\mathrm{F}(x)-\Phi(x)| \le \int_c^d |f(x,y)-\varphi(x,y)|\,dy \le \Psi(x) = \int_c^d \psi(x,y)\,dy.$$

On sait d'après le lemme 5.3.1 que Φ et Ψ sont en escalier sur $[a,b]$, et que $\int_a^b \Psi = \iint_{\mathrm{P}} \psi < \varepsilon$. On a donc $|\mathrm{F}-\Phi| \le \Psi$ et $\int_a^b \Psi < \varepsilon$ ce qui montre que F est intégrable sur $[a,b]$ (parce que $\varepsilon > 0$ est arbitraire). On a aussi les relations

$$\Big|\int_a^b \mathrm{F} - \int_a^b \Phi\Big| \le \int_a^b \Psi < \varepsilon, \quad \Big|\iint_{\mathrm{P}} f - \iint_{\mathrm{P}} \varphi\Big| \le \iint_{\mathrm{P}} \psi < \varepsilon$$

et $\int_a^b \Phi = \iint_{\mathrm{P}} \varphi$ qui entraînent $|\iint_{\mathrm{P}} f - \int_a^b \mathrm{F}| < 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\iint_{\mathrm{P}} f = \int_a^b \mathrm{F}$.

Remarque. Bien entendu, il existe un théorème analogue obtenu en échangeant les rôles de x et y dans l'énoncé précédent. Si la fonction f vérifie les hypothèses dans les deux cas, on en déduit le *théorème d'interversion* des ordres d'intégration,

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)\,dy.$$

Dans certains exemples, l'une des directions est calculable facilement (par calcul de primitive par exemple) alors que l'autre ne l'est pas.

Un cas particulier d'application du théorème précédent est celui où la fonction f est continue sur $\mathrm{P} = [a,b] \times [c,d]$. Dans ce cas, on sait que la fonction f est R-intégrable sur P et toutes les fonctions $x \to f(x,y)$ ou $y \to f(x,y)$ sont continues, donc R-intégrables, donc la formule du théorème s'applique, dans les deux sens, à toute fonction continue sur P. On a donc toujours dans ce cas la propriété d'interversion des ordres d'intégration :

Corollaire 5.3.1. *Soit f une fonction à valeurs réelles, continue sur le pavé borné $\mathrm{P} = [a,b] \times [c,d]$; la fonction f est Riemann-intégrable sur* P *et on a*

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \iint_{\mathrm{P}} f = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)\,dy.$$

Exercices traités.

1. Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert contenant le carré $\mathrm{P} = [0,1] \times [0,1]$; on pose $\mathrm{P}_h = [0,h] \times [0,h]$; calculer

$$\iint_{\mathrm{P}_h} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,dx\,dy.$$

On trouve $f(h,h) - f(h,0) - f(0,h) + f(0,0)$. On peut utiliser ce calcul pour démontrer le lemme de Schwarz. En effet, on voit ainsi que

$$\iint_{\mathrm{P}_h} \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathrm{P}_h} \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy$$

qui sont respectivement équivalents à $h^2\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $h^2\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ par continuité.

2. Calculer

$$\mathrm{I}_{\mathrm{A,B}} = \iint_{\mathrm{P}_{\mathrm{A,B}}} \mathrm{e}^{-xt} \sin x\,dx\,dt$$

sur le rectangle $\mathrm{P}_{\mathrm{A,B}} = [0,\mathrm{A}] \times [0,\mathrm{B}]$ et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ en faisant tendre A et B vers $+\infty$.

La fonction $x \to \mathrm{e}^{-xt} \sin x$ admet pour primitive

$$-\,\mathrm{e}^{-xt}\Big(\frac{\cos x}{1+t^2} + \frac{t\,\sin x}{1+t^2}\Big).$$

Le calcul de $\mathrm{I}_{\mathrm{A,B}}$ en commençant par l'intégrale en x donne

$$\mathrm{I}_{\mathrm{A,B}} = \int_0^{\mathrm{B}} \frac{1}{1+t^2}\,dt - \mathrm{J}_{\mathrm{A,B}}$$

où

$$\mathrm{J}_{\mathrm{A,B}} = \int_0^{\mathrm{B}} \mathrm{e}^{-\mathrm{A}t}\Big(\frac{\cos \mathrm{A}}{1+t^2} + \frac{t\sin \mathrm{A}}{1+t^2}\Big)\,dt.$$

On montre ensuite que $|\mathrm{J}_{\mathrm{A,B}}| \le 1/\mathrm{A}$ tend vers 0 quand A, B tendent vers l'infini, et

$$\lim_{\mathrm{A,B}\to+\infty} \mathrm{I}_{\mathrm{A,B}} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Le calcul de $\mathrm{I}_{\mathrm{A,B}}$ en commençant par l'intégrale en t donne

$$\mathrm{I}_{\mathrm{A,B}} = \int_0^{\mathrm{A}} \frac{\sin x}{x}\,dx - \mathrm{K}_{\mathrm{A,B}}$$

où

$$\mathrm{K}_{\mathrm{A,B}} = \int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{e}^{-\mathrm{B}x}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)\,dx.$$

On montre ensuite que $|\mathrm{K}_{\mathrm{A,B}}| \le 1/\mathrm{B}$ tend vers 0 quand A, B tendent vers l'infini, et il en résulte que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Cette intégrale généralisée semi-convergente ne se calcule pas par calcul de primitive.

Ensembles quarrables

On appelle *fonction indicatrice* de A, notée χ_{A} ou $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$, la fonction égale à 1 sur A et à 0 en dehors de A.

Définition 5.3.1. On dit qu'un ensemble $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^2$ est *quarrable* si A est un ensemble borné et si la fonction indicatrice χ_{A} est R-intégrable sur tout pavé P de $\mathbb{R}^2$ qui contient A. Le résultat ne dépend pas de P. On l'appelle *l'aire de* A.

Intégrale sur un sous-ensemble

Soit A un ensemble quarrable et soit f une fonction définie sur A, et nulle en dehors de A ; soit P un pavé borné contenant A ; désignons par f_1 la fonction égale à f sur A et à 0 en dehors de A. On dira que f est intégrable sur A si f_1 est intégrable sur P. Le résultat ne dépend pas du pavé P qui contient A. On posera

$$\iint_{\mathrm{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathrm{P}} f_1(x,y)\,dx\,dy.$$

Changement de variable dans les intégrales doubles.

Soient U et V deux ouverts quarrables de $\mathbb{R}^2$ et T une application bijective de U sur V, qui soit de classe C^1 ainsi que la bijection inverse (il en résulte en particulier que la différentielle $d\mathrm{T}_x$ est inversible en tout point $x \in \mathrm{U}$). Si f est une fonction réelle R-intégrable sur l'ensemble V, on a la formule de changement de variables

$$\iint_{\mathrm{V}} f(v)\,dv_1 dv_2 = \iint_{\mathrm{U}} f(\mathrm{T}(u))\,|\det(d\mathrm{T}_u)|\,du_1 du_2$$

où $u = (u_1, u_2) \in \mathrm{U}$ et $v = (v_1, v_2) \in \mathrm{V}$.