MT242, Cours n° 21, Mercredi 10 Mai 2000.

On va reprendre et corriger légèrement l'énoncé du théorème de changement de variable dans les intégrales doubles, en mettant en italique la précision ajoutée aujourd'hui (ajoutée, par rapport aux notes du cours précédent).

Soient U et V deux ouverts quarrables de $\mathbb{R}^2$ et T une application bijective de U sur V, qui soit de classe C^1 ainsi que la bijection inverse (il en résulte en particulier que la différentielle $d\mathrm{T}_u$ est inversible en tout point $u \in \mathrm{U}$). Si f est une fonction réelle Riemann-intégrable sur l'ensemble V,

et si la fonction $g : u \in \mathrm{U} \to f(\mathrm{T}(u))\,|\det(\mathrm{JT})_u|$ *est bornée sur* U, *alors* g *est Riemann-intégrable sur* U *et*

on a la formule de changement de variables

$$\iint_{\mathrm{V}} f(v)\,dv_1 dv_2 = \iint_{\mathrm{U}} f(\mathrm{T}(u))\,|\det(\mathrm{JT})_u|\,du_1 du_2$$

où $u = (u_1, u_2) \in \mathrm{U}$ et $v = (v_1, v_2) \in \mathrm{V}$.

En raccourci : on pose $v = \mathrm{T}(u)$ et on transforme "l'élément différentiel" $dv_1 dv_2$ en $|\det(\mathrm{JT})_u|\,du_1 du_2$, ce qui rappelle un peu le changement de dv en $\mathrm{T}'(u)\,du$ dans le cas d'une seule variable.

Coordonnées polaires

On pose

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

c'est à dire $\mathrm{T}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Pour obtenir une application bijective on est obligé de restreindre les possibilités de θ à un intervalle de longueur 2π. On prend par exemple l'ensemble ouvert $\mathrm{U} =]0, +\infty[\, \times\,]-\pi, \pi[$. Alors T est une bijection de U sur l'ouvert $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \le 0\}$. Le déterminant jacobien de T au point $(r,\theta) \in \mathrm{U}$ est égal à r, donc $dx\,dy$ est remplacé par $r\,dr\,d\theta$. Plus précisément, si on fixe R et si on regarde le pavé ouvert

$$\mathrm{U_R} = \{(r,\theta) : 0 < r < \mathrm{R}; -\pi < \theta < \pi\}$$

la restriction de T à $\mathrm{U_R}$ est une bijection de $\mathrm{U_R}$ sur l'ouvert $\mathrm{V_R}$ qui est la boule ouverte de rayon R, privée de la demi-droite fermée formée des points $(x,0)$, pour $x \le 0$. On a donc

$$\iint_{\mathrm{V_R}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathrm{U_R}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Si les hypothèses convenables sont réalisées, on pourra calculer cette dernière intégrale double par intégrales simples itérées. Par ailleurs on n'est pas en général intéressé par l'intégrale de f sur $\mathrm{V_R}$, mais plutôt par l'intégrale de f sur la boule $\mathrm{B_R}$ de rayon R. Il se trouve que $\iint_{\mathrm{V_R}} f = \iint_{\mathrm{B_R}} f$ (parce que la demi-droite enlevée à $\mathrm{B_R}$ pour obtenir $\mathrm{V_R}$ a une aire nulle), et de même l'intégrale sur le rectangle ouvert $\mathrm{U_R}$ est la même que l'intégrale sur le rectangle fermé $[0,\mathrm{R}] \times [-\pi, +\pi]$. Finalement on aura, par exemple si f est continue sur la boule fermée $\mathrm{B_R}$

$$\iint_{\mathrm{B_R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\pi}^{+\pi} \Big(\int_0^{\mathrm{R}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr \Big)\,d\theta.$$

Le choix des bornes $-\pi, +\pi$ pour l'angle polaire θ n'a rien d'obligatoire, et peut être remplacé par n'importe quel intervalle de longueur 2π.

Développons un exemple hyper-classique, le calcul de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx$ par l'intermédiaire du calcul de l'intégrale double de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par la formule $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}$. On calcule d'abord l'intégrale de la fonction f sur le disque de rayon R

$$\mathrm{D_R} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq \mathrm{R}^2\}.$$

On obtient par changement de variable polaire

$$\iint_{\mathrm{D_R}} f = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{-r^2/2}\, r\, dr \Big) d\theta = 2\pi(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{R}^2/2}).$$

On compare cette intégrale à l'intégrale de la fonction f sur les carrés

$$\mathrm{C_R} = \{(x,y) : |x| \leq \mathrm{R}\,;\ |y| \leq \mathrm{R}\},$$

qui est égale à $\big(\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx\big)^2$, et en encadrant $\mathrm{D_R} \subset \mathrm{C_R} \subset \mathrm{D}_{\mathrm{R}\sqrt{2}}$ puis en passant à la limite quand $\mathrm{R} \to +\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 1.$$

Cette fonction est appellée *fonction gaussienne* et l'intégrale correspondante *intégrale gaussienne*. Elles jouent un très grand rôle en probabilités et en statistiques.

Remarque. Donnons un exemple qui explique les précautions supplémentaires prises au début de cette séance dans l'énoncé du théorème de changement de variable. L'intégrale

$$\iint_{\mathrm{U_R}} dr\, d\theta$$

ne pose absolument aucun problème, elle vaut $2\pi\mathrm{R}$. Si on fait le changement de variable inverse pour revenir aux coordonnées cartésiennes, on voit que l'intégrale cartésienne correspondante est

$$\iint_{\mathrm{V_R}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy.$$

Maintenant il y a un problème : la fonction $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-1/2}$ n'est pas bornée sur $\mathrm{V_R}$ (elle tend vers $+\infty$ à l'origine), et l'étude de son intégrale sort du cadre défini dans ce chapitre, qui ne s'intéresse qu'aux fonctions bornées. Pour pouvoir interpréter la formule de changement de variable dans le cas présent, il faudrait introduire une notion d'intégrale double généralisée, comme on a fait dans le cas d'une seule variable. Mais on ne le fera pas...

Il faut quand même dire que si on le faisait, tout marcherait très bien. Si on gêné ici, c'est la faute du cadre qui est trop étroit.

Ensembles quarrables

Si A est un ensemble borné de $\mathbb{R}^2$, on peut considérer un pavé P qui contienne l'ensemble A. On dit que A est *quarrable* si la fonction indicatrice $\mathbf{1}_\mathrm{A}$ est R-intégrable sur P. On appelle *aire de* A l'intégrale de $\mathbf{1}_\mathrm{A}$ sur P ; cette valeur ne change pas si on remplace P par un autre pavé contenant A. On peut donc écrire si on veut

$$\mathrm{aire}(\mathrm{A}) = \iint \mathbf{1}_\mathrm{A}$$

sans préciser le pavé $\mathrm{P} \supset \mathrm{A}$. Par des opérations algébriques simples sur les fonctions indicatrices, on voit que :

si A est quarrable et $\mathrm{A} \subset \mathrm{P}$, alors $\mathrm{P} \setminus \mathrm{A}$ est quarrable ;
si $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ sont quarrables, alors $\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2$ est quarrable ;
si $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ sont quarrables, alors $\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2$ est quarrable et

$$\mathrm{aire}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2) = \mathrm{aire}(\mathrm{A}_1) + \mathrm{aire}(\mathrm{A}_2) - \mathrm{aire}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2).$$

Exemples simples d'ensembles quarrables

Soit g une fonction positive sur $[a, b]$ et R-intégrable ; l'ensemble

$$\mathrm{A} = \{(x, y) : a \le x \le b,\ 0 \le y \le g(x)\}$$

est un ensemble quarrable.
Soit en effet $\varphi^{\mathrm{inf}} \le g \le \varphi^{\mathrm{sup}}$ un encadrement de g par deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $\int_a^b (\varphi^{\mathrm{sup}} - \varphi^{\mathrm{inf}}) < \varepsilon$. On peut supposer que $0 \le \varphi^{\mathrm{inf}}$. On a alors un encadrement d'ensembles $\mathrm{A}^{\mathrm{inf}} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{A}^{\mathrm{sup}}$ où on a posé

$$\mathrm{A}^{\mathrm{inf}} = \{(x, y) : a \le x \le b,\ 0 \le y \le \varphi^{\mathrm{inf}}(x)\},$$
$$\mathrm{A}^{\mathrm{sup}} = \{(x, y) : a \le x \le b,\ 0 \le y \le \varphi^{\mathrm{sup}}(x)\}.$$

Les ensembles $\mathrm{A}^{\mathrm{inf}}$ et $\mathrm{A}^{\mathrm{sup}}$ sont des unions finies de rectangles, et on vérifie facilement que $\iint \mathbf{1}_{\mathrm{A}^{\mathrm{inf}}} = \int_a^b \varphi^{\mathrm{inf}}$, et de même pour φ^{sup}. On a obtenu un encadrement de $\mathbf{1}_\mathrm{A}$ entre $\mathbf{1}_{\mathrm{A}^{\mathrm{inf}}}$ et $\mathbf{1}_{\mathrm{A}^{\mathrm{sup}}}$, et ces deux fonctions en escalier ont des intégrales aussi voisines que souhaité, donc $\mathbf{1}_\mathrm{A}$ est intégrable. De plus,

$$\mathrm{aire}(\mathrm{A}) = \iint \mathbf{1}_\mathrm{A} = \int_a^b g(t)\, dt.$$

La méthode s'applique aussi bien à un domaine qui serait limité par une courbe fonction de y, par exemple

$$\mathrm{B} = \{(x, y) : c \le y \le d, a \le x \le g(y)\}$$

où g est une fonction continue sur $[c, d]$, telle que $g(y) \ge a$ pour tout $y \in [c, d]$. On trouve de même que B est quarrable et que

$$\mathrm{aire}(\mathrm{B}) = \int_c^d (g(y) - a)\, dy.$$

En appliquant ce principe plusieurs fois à des découpages convenables, on voit que la plupart des ensembles A limités par des courbes d'équations raisonnables sont quarrables (disques, polygones, etc. . .).

Intégrale sur un sous-ensemble quarrable

Soit A un ensemble quarrable et soit f une fonction définie sur A ; soit P un pavé borné contenant A ; désignons par f_1 la fonction égale à f sur A et à 0 en dehors de A. On dira que f est intégrable sur A si f_1 est intégrable sur P, et on posera

$$\iint_{\mathrm{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathrm{P}} f_1(x,y)\,dx\,dy.$$

Le résultat ne dépend pas du pavé P qui contient A.

En particulier, si A est un domaine limité par deux graphes de fonctions de x sur un intervalle $[a,b]$,

$$\mathrm{A} = \{(x,y) : a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x)\}$$

on aura

$$\iint_{\mathrm{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Bigl(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\Bigr)\,dx.$$

Exemple : calcul du volume de la boule de rayon R *dans* $\mathbb{R}^3$

De la même façon qu'on calcule des surfaces avec des intégrales simples, on peut calculer des volumes à partir d'intégrales doubles. Considérons le cas de la demi-boule dans $\mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge 0,\ x^2+y^2+z^2 \le \mathrm{R}^2\}.$$

Le volume de cet ensemble se ramène à

$$\iint_{\mathrm{D_R}} \sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$$

où $\mathrm{D_R}$ est le disque de rayon R. On va calculer cette intégrale double en suivant les indications précédentes. Le domaine $\mathrm{D_R}$ est limité par les conditions $-\mathrm{R} \le x \le \mathrm{R}$ et $g(x) = -\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2} \le y \le h(x) = \sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}$, donc

$$\mathrm{vol(D)} = \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \Bigl(\int_{g(x)}^{h(x)} \sqrt{h(x)^2 - y^2}\,dy\Bigr)\,dx;$$

par un petit changement de variable $y = h(x)\sin\varphi$ on voit que l'intégrale intérieure vaut $\pi(\mathrm{R}^2 - x^2)/2$, donc

$$\mathrm{vol(D)} = \frac{\pi}{2}\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} (\mathrm{R}^2 - x^2)\,dx = \pi\bigl(\mathrm{R}^3 - \frac{\mathrm{R}^3}{3}\bigr) = \frac{2}{3}\,\pi\mathrm{R}^3.$$

ce qui donne bien le volume $\frac{4}{3}\,\pi\mathrm{R}^3$ pour la boule entière. Pour le même calcul, la méthode dite *de Cavalieri* est un peu plus rapide. On considère le volume limité par la surface d'équation

$$r = f(z)$$

en coordonnées cylindriques, où $f \ge 0$ est définie pour z entre deux "altitudes" z_0 et z_1, avec $z_0 < z_1$ et par les deux plans horizontaux $z = z_0$ et $z = z_1$. Le volume limité par cette surface et par les deux plans d'altitude $z = z_1$ et $z = z_2$ est donné par la formule

$$\mathrm{V} = \pi \int_{z_0}^{z_1} f(z)^2\,dz.$$

Pour comprendre cette formule, il faut imaginer qu'on découpe le volume en petites tranches circulaires découpées par les plans horizontaux d'altitudes z et $z+dz$. Appliquée à la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^3$, cette formule fait gagner un temps par rapport à la méthode précédente. L'unique intégrale simple qu'il faut calculer maintenant est la même que la deuxième intégrale simple du cas précédent.

Changement de variables linéaire

On remarque d'abord que l'aire du parallélogramme Q construit sur deux vecteurs v, w de $\mathbb{R}^2$ est égale à $|\det(v,w)|$: en effet, on applique une rotation ρ qui amène v sur un vecteur $v' = (a, 0)$ parallèle à l'axe des x. L'image par ρ du parallélogramme Q est le parallélogramme Q′ engendré par v' et $w' = \rho(w)$. Comme la rotation est de déterminant 1, $\det(v', w') = \det(v, w)$. Par ailleurs il est intuitivement clair (mais pas mathématiquement démontré) que $\mathrm{aire}(\mathrm{Q}') = \mathrm{aire}(\mathrm{Q})$. Si $w' = (b, d)$, on voit que Q′ a une base de longueur $|a|$ et une hauteur égale à $|d|$, donc $\mathrm{aire}(\mathrm{Q}) = |ad|$, et

$$\det(v,w) = \det(v', w') = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad$$

d'où le résultat voulu. Si S est une application linéaire, l'image du parallélogramme Q par S est le parallélogramme S(Q) engendré par $\mathrm{S}(v), \mathrm{S}(w)$ donc, en notant $|\mathrm{A}|$ pour l'aire d'un ensemble A,

$$|\mathrm{S}(\mathrm{Q})| = |\det(\mathrm{S}(v), \mathrm{S}(w))| = |\det \mathrm{S}|\,|\det(v,w)| = |\det \mathrm{S}|\,|\mathrm{Q}|,$$

ce qui montre que $|\det \mathrm{S}|$ est le facteur de transformation des surfaces entre Q et son image S(Q).

Supposons ensuite que T soit une bijection linéaire de $\mathbb{R}^2$. Soit f une fonction en escalier de la forme

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{\mathrm{Q}_i}$$

où les Q_i sont des rectangles. La fonction $g : u \to f(\mathrm{T}(u))$ est égale à

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{Q}_i)}$$

donc

$$\iint g = \sum_{i=1}^{n} c_i\,|\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{Q}_i)| = |\det(\mathrm{T}^{-1})| \sum_{i=1}^{n} c_i\,|\mathrm{Q}_i| = |\det \mathrm{T}|^{-1} \iint f.$$

Par approximation en escalier on en déduit pour toute fonction f, nulle en dehors d'un pavé P et intégrable sur ce pavé

$$\iint f(v)\, dv_1 dv_2 = \iint f(\mathrm{T}(u))|\det \mathrm{T}|\, du_1 du_2.$$

On peut écrire aussi, si A est un ensemble quarrable

$$\iint_{\mathrm{T}(\mathrm{A})} f(v)\, dv_1 dv_2 = \iint_{\mathrm{A}} f(\mathrm{T}(u))|\det \mathrm{T}|\, du_1 du_2.$$