MT242, Cours n° 22, Lundi 15 Mai 2000.

On va donner quelques indications sur une démonstration de la formule de changement de variables. Cela donne une excellente occasion de réviser le calcul différentiel.

Principe 1 : on considère une application T définie sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et telle que $\mathrm{T}(x_0) \neq y_0$, où y_0 est un autre point de $\mathbb{R}^2$. Si T est différentiable au point x_0 et $(d\mathrm{T})_{x_0}$ inversible, on peut trouver des points x voisins de x_0 tels que $\mathrm{T}x$ se rapproche de y_0 (par rapport à $\mathrm{T}(x_0)$, c'est à dire que $\|\mathrm{T}(x) - y_0\| < \|\mathrm{T}(x_0) - y_0\|$).
Raison : on sait que pour t réel petit

$$\mathrm{T}(x_0 + th) \sim \mathrm{T}(x_0) + t\,(d\mathrm{T})_{x_0}(h),$$

on choisit $t > 0$ et le vecteur h de façon que la direction $(d\mathrm{T})_{x_0}(h) = y_0 - \mathrm{T}(x_0)$ aille vers le point y_0 visé. On peut trouver h puisque $(d\mathrm{T})_{x_0}$ est inversible. Alors $x = x_0 + th$ convient pour $t > 0$ petit.

Principe 2. Si T est continue sur un carré fermé C, différentiable avec $(d\mathrm{T})_x$ inversible pour tout point x de l'intérieur C_0 du carré et s'il existe un point x_0 de l'intérieur du carré tel que $\mathrm{T}(x_0)$ soit plus proche de y_0 que tous les points $\mathrm{T}(x')$ image des points x' du bord $\partial\mathrm{C}$ de C, alors y_0 est dans l'image $\mathrm{T}(\mathrm{C}_0)$ de l'intérieur du carré.
Raison : la fonction continue $f : x \to \|\mathrm{T}(x) - y_0\|$ atteint son minimum en un point x_1 du compact C. Ce point ne peut pas être au bord de C puisque x_0 fait déjà mieux que tout point x' du bord : $f(x_1) \le f(x_0) < f(x')$, donc $x_1 \neq x'$. Alors $x_1 \in \mathrm{C}_0$, et $(d\mathrm{T})_{x_1}$ inversible par hypothèse. Si on avait $\mathrm{T}(x_1) \neq y_0$, on pourrait faire un peu mieux pour des points voisins de x_1 d'après le principe 1, ce qui contredirait le fait que x_1 minimise f sur C. On a donc $y_0 = \mathrm{T}(x_1) \in \mathrm{T}(\mathrm{C}_0)$.

Principe 3. *On considère un carré fermé* C *de côté* $2\,\delta$ *et de centre* a, *et deux autres carrés fermés* $\mathrm{C}_{\mathrm{int}}$ *et* $\mathrm{C}_{\mathrm{ext}}$ *de même centre* a, *et respectivement de côté* $2\,(1-t)\,\delta$ *et* $2\,(1+t)\,\delta$, *avec* $0 < t < 1$, *de façon que* $\mathrm{C}_{\mathrm{int}} \subset \mathrm{C} \subset \mathrm{C}_{\mathrm{ext}}$.

On suppose que T *est continue sur* C, *différentiable dans l'intérieur* C_0 *de* C *avec* $(d\mathrm{T})_x$ *inversible pour tout* $x \in \mathrm{C}_0$, *et on désigne par* S_a *l'application affine tangente à* T *au point* a,

$$\mathrm{S}_a(x) = \mathrm{T}(a) + (d\mathrm{T})_a(x - a).$$

On suppose que $m > 0$ *est tel que pour tout* $h \in \mathbb{R}^2$ *on ait*

$$\|(d\mathrm{T})_a(h)\| \ge 4\,m\,\|h\|, \quad \textit{et on suppose} \qquad \|\mathrm{T}(x) - \mathrm{S}_a(x)\| \le t\,m\,\|x - a\|$$

pour tout $x \in \mathrm{C}$. *Alors*

$$\mathrm{S}_a(\mathrm{C}_{\mathrm{int}}) \subset \mathrm{T}(\mathrm{C}_0) \subset \mathrm{T}(\mathrm{C}) \subset \mathrm{S}_a(\mathrm{C}_{\mathrm{ext}}).$$

Démonstration. Pour montrer que $\mathrm{S}_a(\mathrm{C}_{\mathrm{int}}) \subset \mathrm{T}(\mathrm{C})$, on considère un point quelconque $x_0 \in \mathrm{C}_{\mathrm{int}}$, on pose $y_0 = \mathrm{S}_a(x_0)$ et on veut montrer qu'il existe $x_1 \in \mathrm{C}_0$ tel que $\mathrm{T}(x_1) = y_0 = \mathrm{S}_a(x_0)$. Pour cela on applique le principe 2 : on va vérifier que dans le problème de minimiser $f(x) = \|\mathrm{T}(x) - y_0\|$ sur le compact C, le point x_0 intérieur à C fait mieux que tout point $x' \in \partial\mathrm{C}$. Le résultat voulu en résultera par le principe 2. On commence par estimer la performance de x_0,

$$f(x_0) = \|\mathrm{T}(x_0) - \mathrm{S}_a(x_0)\| \le t\,m\,\|x_0 - a\| \le t\,m\,\delta\sqrt{2}.$$

Soit maintenant x' sur le bord de C ; alors $\|x' - x_0\| \geq t\delta$ (parce que $x_0 \in \mathrm{C_{int}}$ et x' au bord de C), et

$$\|\mathrm{S}_a(x') - \mathrm{S}_a(x_0)\| = \|(d\mathrm{T})_a(x' - x_0)\| \geq 4\,m\|x' - x_0\| \geq 4\,tm\delta.$$

D'autre part, $\|\mathrm{T}(x') - \mathrm{S}_a(x')\| \leq tm\|x' - a\| \leq tm\delta\sqrt{2}$. Par l'inégalité triangulaire,

$$f(x') = \|\mathrm{T}(x') - \mathrm{S}_a(x_0)\| \geq \|\mathrm{S}_a(x') - \mathrm{S}_a(x_0)\| - \|\mathrm{T}(x') - \mathrm{S}_a(x')\| \geq tm\delta(4 - \sqrt{2}) > f(x_0).$$

D'apès le principe 2 on en déduit que $\mathrm{S}_a(x_0) = y_0$ est dans l'image $\mathrm{T(C_0)}$ de $\mathrm{C_0}$ par T.

Pour montrer que $\mathrm{T(C)} \subset \mathrm{S}_a(\mathrm{C_{ext}})$, on répète en gros le même argument en échangeant les rôles de T et S_a ; choisit un point $x_0 \in \mathrm{C}$, on pose $y_0 = \mathrm{T}(x_0)$ et on veut montrer qu'il existe $x_1 \in \mathrm{C_{ext}}$ tel que $\mathrm{S}_a(x_1) = y_0 = \mathrm{T}(x_0)$. Pour cela on applique le principe 2 à l'application affine S_a : on vérifie que dans le problème de minimiser $g(x) = \|\mathrm{S}_a(x) - y_0\|$ sur le compact $\mathrm{C_{ext}}$, le point x_0 fait mieux que tout point $x' \in \partial\mathrm{C_{ext}}$. On commence par estimer la performance de x_0,

$$g(x_0) = \|\mathrm{S}_a(x_0) - \mathrm{T}(x_0)\| \leq t\,m\,\|x_0 - a\| \leq t\,m\,\delta\sqrt{2}.$$

Soit maintenant x' sur le bord de $\mathrm{C_{ext}}$; alors $\|x' - x_0\| \geq t\delta$ et on a comme avant

$$\|\mathrm{S}_a(x') - \mathrm{S}_a(x_0)\| = \|(d\mathrm{T})_a(x' - x_0)\| \geq 4\,m\|x' - x_0\| \geq 4tm\delta.$$

D'autre part, $\|\mathrm{T}(x_0) - \mathrm{S}_a(x_0)\| \leq tm\|x_0 - a\| \leq tm\delta\sqrt{2}$. Par l'inégalité triangulaire,

$$g(x') = \|\mathrm{S}_a(x') - \mathrm{T}(x_0)\| \geq \|\mathrm{S}_a(x') - \mathrm{S}_a(x_0)\| - \|\mathrm{T}(x_0) - \mathrm{S}_a(x_0)\| \geq tm\delta(4 - \sqrt{2}) > g(x_0).$$

La philosophie est très claire : si T est suffisamment proche de son application affine tangente, on a la situation du principe 3 avec $t > 0$ *petit* et l'ensemble image T(C) est encadré entre deux parallélogrammes $\mathrm{S}_a(\mathrm{C_{int}})$ et $\mathrm{S}_a(\mathrm{C_{ext}})$ qui sont très proches. Si T(C) a une aire, elle sera très voisine de l'aire de $\mathrm{S}_a(\mathrm{C})$, qui est égale à $|\det(\mathrm{JT})_a|\,\mathrm{aire(C)}$. C'est le fond du théorème de changement de variable.

Le résultat et la démonstration qui suivent n'ont pas été donnés à l'amphi. Je les donne ici pour les amateurs.

Proposition 5.3.1. *Soient* U *et* V *deux ouverts quarrables,* T *une application bijective de* U *sur* V, *de classe* C^1 *sur* U, *avec une différentielle inversible en tout point de* U. *Pour tout compact* $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$ *qui est une réunion finie de carrés, l'image* T(K) *est quarrable et*

$$\mathrm{aire(T(K))} = \iint_{\mathrm{K}} |\det(\mathrm{JT})_u|\,du_1\,du_2.$$

Il en résulte que si $u \to \det(\mathrm{JT})_u$ *est bornée sur* U, *on a*

$$\mathrm{aire(V)} = \iint_{\mathrm{U}} |\det(\mathrm{JT})_u|\,du_1\,du_2.$$

Démonstration. Puisque K est compact et $u \to (\mathrm{JT})_u^{-1}$ continue (clair sur la formule qui donne l'inverse d'une matrice), il existe une constante M telle que $\|(\mathrm{JT})_u^{-1}\| \leq \mathrm{M}$ pour tout $u \in \mathrm{K}$. Posons $m = 1/(4\mathrm{M})$. D'autre part étant donné $t > 0$ (petit) on peut trouver par uniforme continuité de $u \to (d\mathrm{T})_u$ sur K un $\delta_0 > 0$ tel que $\|(d\mathrm{T})_u - (d\mathrm{T})_{u'}\| < t\,m$ si $u, u' \in \mathrm{K}$ peuvent être placés dans un même carré de côté $\leq 2\,\delta_0$. Découpons K en un nombre fini de petits carrés C_i de côté $2\,\delta < 2\,\delta_0$. Pour chaque carré C_i de centre a_i on construit les deux carrés $\mathrm{C}_{i,\mathrm{int}}$ et $\mathrm{C}_{i,\mathrm{ext}}$ associés (voir le principe 3). Pour chaque point a_i on a $\|(\mathrm{JT})_{a_i}^{-1}\| \le \mathrm{M} = 1/(4m)$ ce qui implique que $\|(d\mathrm{T})_{a_i}(h)\| \ge 4\,m\,\|h\|$ pour tout $h \in \mathbb{R}^2$. D'autre part, si $u \in \mathrm{C}_i$ on aura par le théorème des accroissements finis appliqué à l'application $\mathrm{V}(v) = \mathrm{T}(v) - \mathrm{S}_{a_i}(v)$, puisque $\|(d\mathrm{T})_v - (d\mathrm{T})_{a_i}\| = \|(d\mathrm{V})_v\| < t\,m$ pour tout point v du segment qui joint a_i à u,

$$\|\mathrm{T}(u) - \mathrm{S}_{a_i}(u)\| = \|\mathrm{V}(u) - \mathrm{V}(a_i)\| \le t\,m\,\|u - a_i\|.$$

D'après le principe 3, chaque image $\mathrm{T}(\mathrm{C}_i)$ est encadrée par les parallélogrammes $\mathrm{B}_i = \mathrm{S}_{a_i}(\mathrm{C}_{i,\mathrm{int}})$ et $\mathrm{D}_i = \mathrm{S}_{a_i}(\mathrm{C}_{i,\mathrm{ext}})$, donc (en utilisant le caractère bijectif de T ; pour être tout à fait rigoureux, il faudrait se débrouiller pour ne compter les bordures des carrés qu'une seule fois, en remplaçant les carrés fermés C_i par des carrés semi-ouverts)

$$\mathbf{1}_{\mathrm{K}} = \sum_i \mathbf{1}_{\mathrm{C}_i},\ \mathbf{1}_{\mathrm{T(K)}} = \sum_i \mathbf{1}_{\mathrm{T}(\mathrm{C}_i)},\ \mathbf{1}_{\mathrm{B}_i} \le \mathbf{1}_{\mathrm{T}(\mathrm{C}_i)} \le \mathbf{1}_{\mathrm{D}_i},$$

ce qui donne l'encadrement

$$f = \sum_i \mathbf{1}_{\mathrm{B}_i} \le \mathbf{1}_{\mathrm{T(K)}} \le \sum_i \mathbf{1}_{\mathrm{D}_i} = g.$$

L'application affine S_{a_i} transforme les aires de la même façon que sa partie linéaire $(d\mathrm{T})_{a_i}$, donc elle multiplie les aires par $|\det(\mathrm{JT})_{a_i}|$. On a donc

$$\mathrm{aire}(\mathrm{S}_{a_i}(\mathrm{C}_{i,\mathrm{int}})) = |\det(\mathrm{JT})_{a_i}|\ \mathrm{aire}(\mathrm{C}_{i,\mathrm{int}}) = (1-t)^2\,|\det(\mathrm{JT})_{a_i}|\ \mathrm{aire}(\mathrm{C}_i)$$

et l'analogue pour $\mathrm{C}_{i,\mathrm{ext}}$. Les fonctions f et g sont clairement intégrables, et on a en notant l'aire d'un ensemble A par $|\mathrm{A}|$

$$\iint f = \sum_i |\mathrm{B}_i| = (1-t)^2 \sum_i |\det(\mathrm{JT})_{a_i}|\,|\mathrm{C}_i|,$$

$$\iint g = \sum_i |\mathrm{D}_i| = (1+t)^2 \sum_i |\det(\mathrm{JT})_{a_i}|\,|\mathrm{C}_i|.$$

Par continuité de la fonction $u \to |\det(\mathrm{JT})_u|$ sur K, la quantité $\sum_i |\det(\mathrm{JT})_{a_i}|\,|\mathrm{C}_i|$ tend vers $\iint_{\mathrm{K}} |\det(\mathrm{JT})_u|\,du_1\,du_2$ lorsque δ tend vers 0. On obtient donc un encadrement de $\mathbf{1}_{\mathrm{T(K)}}$ entre deux fonctions intégrables qui ont presque la même intégrale. Il en résulte que T(K) est quarrable et que

$$\mathrm{aire}(\mathrm{T(K)}) = \iint \mathbf{1}_{\mathrm{T(K)}} = \iint_{\mathrm{K}} |\det(\mathrm{JT})_u|\,du_1\,du_2.$$

Puisque V est quarrable on peut choisir $\mathrm{L} \subset \mathrm{V}$, L compact réunion finie de carrés, qui a presque la même aire que V, disons $\mathrm{aire(V)} \le \mathrm{aire(L)} + \varepsilon$. Puisque $\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{L})$ est compact contenu dans U, on peut trouver K comme ci-dessus tel que $\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{L}) \subset \mathrm{K} \subset \mathrm{U}$. Puisque $\mathrm{L} \subset \mathrm{T(K)} \subset \mathrm{V}$, on aura

$$\mathrm{aire(V)} - \varepsilon \le \mathrm{aire(L)} \le \mathrm{aire(T(K))} = \iint_{\mathrm{K}} |\det(\mathrm{JT})_u|\,du_1\,du_2 \le \iint_{\mathrm{U}} |\det(\mathrm{JT})_u|\,du_1\,du_2.$$

Inversement si $u \to \det(\mathrm{JT})_u$ est bornée par M sur U, on choisit $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$ tel que $\mathrm{aire(U)} \le \mathrm{aire(K)} + \varepsilon/\mathrm{M}$. La différence entre les deux intégrales doubles $\iint_{\mathrm{K}} |\det(\mathrm{JT})_u|\,du_1\,du_2$ et $\iint_{\mathrm{U}} |\det(\mathrm{JT})_u|\,du_1\,du_2$ est alors $\le \varepsilon$, donc

$$\iint_{\mathrm{U}} |\det(\mathrm{JT})_u|\,du_1\,du_2 - \varepsilon \le \iint_{\mathrm{K}} |\det(\mathrm{JT})_u|\,du_1\,du_2 = \mathrm{aire(T(K))} \le \mathrm{aire(V)}.$$

Chapitre 6. Intégrales dépendant d'un paramètre

Le problème général est le suivant : on se donne une fonction $f(x,t)$ et on pose

$$\mathrm{F}(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx.$$

A quelles conditions cette fonction F sera-t-elle continue, dérivable ? Les mêmes deux questions se posent pour les intégrales généralisées.

6.1. Continuité

Théorème 6.1.1. *Supposons donnée une fonction réelle f, définie et continue sur le produit $[a,b] \times \mathrm{I}$, où* I *est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Posons pour $t \in \mathrm{I}$*

$$\mathrm{F}(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx.$$

La fonction F *est alors continue sur l'intervalle* I.

Démonstration. Soit t_0 un point de I et choisissons c, d de façon que $c < t_0 < d$ et $[c,d] \subset \mathrm{I}$. Il suffit de montrer que f est continue sur l'intervalle $[c,d]$. La fonction f étant continue sur le compact $[a,b] \times [c,d]$ est uniformément continue sur $[a,b] \times [c,d]$. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\eta > 0$ tel que $|f(x,t) - f(x',t')| < \varepsilon/(b-a)$ dès que $|x - x'| + |t - t'| < \eta$. On a alors si $t \in [c,d]$ et $|t - t_0| < \eta$

$$|\mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(t_0)| \le \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)|\,dx \le (b-a)\,\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon,$$

ce qui montre que F est continue au point t_0.

Théorème 6.1.2. *Supposons donnée une fonction réelle f, définie et continue sur $[a,b[\times \mathrm{I}$, où* I *est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et où b est soit un nombre réel, soit $+\infty$. On suppose qu'il existe une fonction $g \ge 0$ sur $[a,b[$, telle que*

$$\forall (x,t) \in [a,b[\,\times \mathrm{I}, \quad |f(x,t)| \le g(x) \quad \textit{et que l'intégrale généralisée} \quad \int_a^b g(x)\,dx$$

soit (absolument) convergente. Alors la fonction F *définie sur* I *par*

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

est une fonction continue sur l'intervalle I *(la valeur* $\mathrm{F}(t)$ *est une intégrale généralisée absolument convergente, d'après les hypothèses sur f et g).*

Démonstration. On va traiter le cas où $a = 0$ et $b = +\infty$ pour simplifier les notations. Pour toute fonction h définie sur $[0,+\infty[$ et dont l'intégrale généralisée est convergente, on a

$$\int_0^{+\infty} h(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_n^{n+1} h(x)\,dx \Big).$$

Posons pour tout $n \ge 0$ et tout $t \in \mathrm{I}$

$$u_n(t) = \int_n^{n+1} f(x,t)\,dx.$$

La fonction u_n est continue sur I d'après le théorème 6.1.1. L'hypothèse de majoration donne pour tout $t \in \mathrm{I}$

$$|u_n(t)| \le \int_n^{n+1} g(x)\,dx = v_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \int_0^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$$

ce qui montre que la série de fonctions continues $\sum u_n$ est normalement convergente sur I, donc sa somme $\mathrm{S}(t)$ est une fonction continue sur I. Mais on a

$$\mathrm{S}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dx = \mathrm{F}(t).$$

Exemple : la fonction Γ. On pose pour tout $t > 0$

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\ dx.$$

Dans le cas $0 < t < 1$, il s'agit d'une intégrale généralisée avec deux problèmes de convergence, en 0 et en $+\infty$. On va vérifier que Γ est continue sur $]0,1[$, en découpant le problème en deux,

$$\mathrm{F}_1(t) = \int_0^1 x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\ dx, \quad \mathrm{F}_2(t) = \int_1^{+\infty} x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\ dx.$$

On a ici $f(x,t) = x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}$. Soit t_0 tel que $0 < t_0 < 1$ et choisissons c, d tels que $0 < c < t_0 < d < 1$. Alors

$$0 \le f(x,t) \le g_1(x) = x^{c-1}\,\mathrm{e}^{-x}$$

pour tout $x \in [0,1]$ et tout $t \in [c,d]$, et l'intégrale $\int_0^1 g_1(x)\,dx$ converge. D'après le théorème 6.1.2, la fonction F_1 est continue sur $]0,1[$. Pour traiter F_2 il faut changer de majorant : on prendra $g_2(x) = x^{d-1}\,\mathrm{e}^{-x}$, qui majore $f(x,t)$ pour tout $x \ge 1$ et $t \in]0,1[$, et qui vérifie $\int_1^{+\infty} g_2(x)\,dx < +\infty$. En additionnant les deux résultats on trouve que Γ est continue sur $]0,1]$. La démonstration de la continuité de Γ sur $[1,+\infty[$ est analogue, en plus simple (un seul problème de convergence).

Cours n° 23, Mercredi 17 Mai 2000.

Une application à certaines intégrales curvilignes

On considère une courbe γ dans le plan, joignant un point q_0 à un point q_1. Pour traduire plus précisément l'idée d'une courbe du plan, parcourue dans le sens qui va de q_0 à q_1, on supposera que γ est l'image d'un intervalle $[a,b]$ par une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, telle que $f(a) = q_0$ et $f(b) = q_1$. On dit que f est un *paramétrage* de la courbe.

On suppose qu'un vecteur $\mathrm{F}(p) \in \mathbb{R}^2$ est attaché à chaque point p de γ. On cherche si la limite

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{F}(p_i)\,.\,(p_{i+1} - p_i)$$

(somme de produits scalaires) existe, lorsqu'on divise la courbe en n morceaux par $n+1$ points de subdivision $p_0 = q_0, \ldots, p_n = q_1$ (correspondant à des valeurs croissantes du paramètre), et qu'on fait tendre le pas de la subdivision vers 0. Si la limite existe, on la notera

$$\int_\gamma \mathrm{F}(p)\,.\,dp\,;$$

elle correspond à ce qu'on appelle en physique la *circulation d'un champ de vecteurs.* Un cas particulier est la notion de *travail d'une force.* Avec des notations plus mathématiques, on considérera les composantes de F, soit $\mathrm{F}(p) = (\mathrm{U}(p), \mathrm{V}(p)) \in \mathbb{R}^2$ et on écrira $p = (x, y)$. L'intégrale précédente sera alors notée aussi

$$\int_\gamma \big(\mathrm{U}(x,y)\,dx + \mathrm{V}(x,y)\,dy\big)$$

et appelée *intégrale curviligne.*

Proposition 6.1.1. *Si le champ* F *est continu sur* γ *et si* γ *admet une paramétrisation de classe* C^1 *par morceaux par* $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ *définie sur un intervalle* $[a, b]$*, alors la limite existe et*

$$\int_\gamma \big(\mathrm{U}(x,y)\,dx + \mathrm{V}(x,y)\,dy\big) = \int_a^b \big(\mathrm{U}(f(t))f_1'(t) + \mathrm{V}(f(t))f_2'(t)\big)\,dt.$$

Démonstration. Supposons que les fonctions coordonnées f_1 et f_2 du paramétrage f sont de classe C^2 pour simplifier. La somme de produits scalaires dont on cherche la limite comporte pour la partie qui traite la coordonnée x

$$\mathrm{A} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{U}(f(t_i))\,\big(f_1(t_{i+1}) - f_1(t_i)\big)$$

et de même pour la deuxième coordonnée

$$\mathrm{B} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{V}(f(t_i))\,\big(f_2(t_{i+1}) - f_2(t_i)\big).$$

Traitons le cas de A (le cas de B est identique). Avec Taylor-Lagrange à l'ordre deux on a

$$f_1(t_{i+1}) - f_1(t_i) = f_1'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{1}{2} f_1''(c_i)(t_{i+1} - t_i)^2$$

où c_i est un point entre t_i et t_{i+1}, ce qui donne

$$\mathrm{A} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{U}(f(t_i))f_1'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \mathrm{E}.$$

On reconnaît dans la première expression une somme de Riemann de la fonction continue $t \to \mathrm{U}(f(t))f_1'(t)$, qui convergera vers l'intégrale de Riemann $\int_a^b \mathrm{U}(f(t))f_1'(t)\,dt$ lorsque le pas de la subdivision tend vers 0. Le terme d'erreur

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{U}(f(t_i))f_1''(c_i)(t_{i+1} - t_i)^2$$

tend vers 0 parce que les fonctions $t \to \mathrm{U}(f(t))$ et f_1'' sont bornées sur $[a, b]$, et parce que $\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)^2 \to 0$ lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

Cas particulier. Longueur d'une courbe C^1 par morceaux. En chaque point p de la courbe où celle-ci est C^1, on peut considérer le vecteur tangent unitaire $\mathrm{T}(p)$ dirigé dans le sens du parcours. L'intégrale curviligne

$$\mathrm{L} = \int_\gamma \mathrm{T}(p) \,.\, dp$$

représente la longueur L de la courbe. Si $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ est un paramétrage de classe C^1 (par morceaux), on obtiendra après petit calcul (mal fait à l'amphi)

$$\mathrm{L} = \int_a^b \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2}\, dt.$$

Champ F dérivant d'un potentiel

Dans le cas où le champ F est défini sur un ouvert Ω et dérive d'un potentiel P défini sur cet ouvert, c'est à dire qu'il existe une fonction P de classe C^1 sur l'ouvert Ω telle que $\mathrm{F}(p) = \nabla \mathrm{P}(p)$ pour tout point $p \in \Omega$, on a

$$\int_\gamma \mathrm{F}(p) \,.\, dp = \mathrm{P}(q_1) - \mathrm{P}(q_0)$$

lorsque la courbe γ est contenue dans Ω. En particulier, l'intégrale ne dépend pas du chemin suivi pour aller de q_0 à q_1, pourvu que ce chemin reste dans l'ouvert Ω.

Nombre de tours

Posons $\mathrm{F}(x, y) = (-y/\sqrt{x^2 + y^2},\ x/\sqrt{x^2 + y^2})$. Si on se place dans l'ouvert

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \le 0\},$$

ce champ F dérive du potentiel donnée par la fonction $\mathrm{P}(x, y) = \theta(x, y)$, l'angle polaire du vecteur (x, y) calculé dans $]-\pi, \pi[$. Dans le sous-ensemble de Ω formé des points (x, y) tels que $x > 0$, on vérifie facilement cette affirmation en notant que dans ce cas $\theta(x, y) = \mathrm{Arctan}(y/x)$. Si γ est une courbe fermée (c'est à dire $q_1 = q_0$) qui reste dans Ω, on en déduit que

$$\mathrm{N}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \Bigl(\frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2} \Bigr) = \theta(q_1) - \theta(q_0) = 0.$$

Si $\gamma' = (q_0, q_1)$ est une courbe ne passant pas par $(0, 0)$ et dont les points sont dans Ω, à l'exception des extrémités q_0 et q_1 qui sont sur la demi-droite "interdite", on aura

$$\mathrm{N}' = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma'} \Bigl(\frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2} \Bigr) = \theta(q_{1,-}) - \theta(q_{0,+}),$$

en notant par $\theta(q_{1,-})$ la limite de $\theta(p)$ quand on tend vers q_1 par des points p de γ', et de même pour $\theta(q_{0,+})$; ces deux valeurs limite sont égales à $\pm\pi$, donc N vaut 1, -1 ou 0 suivant que γ' tourne autour de $(0, 0)$, dans un sens, dans l'autre ou bien pas du tout. En découpant si nécessaire une courbe fermée γ qui ne passe par $(0, 0)$ en morceaux de la forme γ', on peut se convaincre que pour toute courbe fermée γ qui ne passe pas par $(0, 0)$, la quantité $\mathrm{N}(\gamma)$ représente le nombre de tours autour de 0 effectués par la courbe, et comptés dans le sens trigonométrique direct.

Théorème de Brouwer dans $\mathbb{R}^2$

Théorème 6.1.3. *Pour toute application continue φ du disque unité fermé D dans lui-même, il existe un point fixe, c'est à dire un point $p \in \mathrm{D}$ tel que $\varphi(p) = p$.*

Indication, dans le cas où φ est de plus de classe C^1. Supposons par l'absurde que $\varphi(p) = (\varphi_1(p), \varphi_2(p))$ est toujours différent de p. On peut considérer le champ non nul défini sur D par

$$\forall p \in \mathrm{D}, \quad \mathrm{F}(p) = \varphi(p) - p = (\varphi_1(x,y) - x,\ \varphi_2(x,y) - y).$$

Considérons ensuite les paramétrages de chemins fermés ne passant pas par $(0,0)$

$$\gamma_r(t) = \mathrm{F}(r\cos t, r\sin t)$$

avec $t \in [0, 2\pi]$, et où la variable r varie dans $[0,1]$. On voit que $\mathrm{N}(\gamma_r)$ s'exprime par une horrible intégrale en t, de 0 à 2π qui est de la forme

$$\mathrm{G}(r) = \mathrm{N}(\gamma_r) = \int_0^{2\pi} g(t,r)\, dt$$

avec g continue sur $[0,2\pi] \times [0,1]$ (on utilise ici l'hypothèse additionnelle que φ est de classe C^1 ; la première moitié de cette horrible expression a été écrite au tableau). En posant $c_r(t) = (r\cos t, r\sin t)$ et avec des notations un peu condensées on trouve que

$$\mathrm{G}(r) = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{2\pi} \frac{-(\varphi_2(c_r(t)) - r\sin t)(\nabla\varphi_1(c_r(t))\,.\,c_r'(t) + r\cos t)}{\|\mathrm{F}(c_r(t))\|^2} +$$

$$+ \frac{(\varphi_1(c_r(t)) - r\cos t)(\nabla\varphi_2(c_r(t))\,.\,c_r'(t) - r\sin t)}{\|\mathrm{F}(c_r(t))\|^2}\, dt\Big).$$

Il en résulte que $r \to \mathrm{G}(r)$ est continu sur $[0,1]$. Mais ce nombre est en fait un entier ! Il est donc constant quand r décrit $[0,1]$, donc $\mathrm{N}(\gamma_0) = \mathrm{N}(\gamma_1)$. Mais on voit que $\mathrm{N}(\gamma_0) = 0$ (clair intuitivement : le vecteur $\gamma_0(t)$ ne tourne pas, puisqu'il est constant égal à $\mathrm{F}(0,0)$, ou bien clair sur l'horrible expression). En revanche, le vecteur $\gamma_1(t)$, tracé au point $p(t) = (\cos t, \sin t)$, pointe toujours vers l'intérieur du cercle (parce que $\varphi(p(t))$ est dans le disque D), ce qui l'oblige à faire un tour quand on parcourt le cercle de rayon un, donc $\mathrm{N}(\gamma_1) = 1$. On a une contradiction qui termine la démonstration.

6.2. Dérivabilité

Théorème 6.2.1. *Supposons donnée une fonction réelle f, définie et continue sur le produit $[a,b] \times \mathrm{I}$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et possédant une dérivée partielle $g(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ par rapport au paramètre t, pour tout point $(x,t) \in [a,b] \times \mathrm{I}$. Posons pour $t \in \mathrm{I}$*

$$\mathrm{F}(t) = \int_a^b f(x,t)\, dx.$$

Si la fonction $(x,t) \to \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est continue sur $[a,b] \times \mathrm{I}$, la fonction F est dérivable sur l'intervalle I et

$$\mathrm{F}'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx.$$

pour tout $t \in \mathrm{I}$.

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$\mathrm{G}(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

est une fonction continue sur I d'après le paragraphe précédent. Considérons comme avant un intervalle fermé $[c,d]$ contenu dans I. Pour tout $t \in [c,d]$, on obtient en calculant l'intégrale double de $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ sur le rectangle $[a,b] \times [c,t]$

$$\int_c^t \Big(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,s)\,dx\Big)\,ds = \int_a^b \Big(\int_c^t \frac{\partial f}{\partial t}(x,s)\,ds\Big)\,dx =$$

$$\int_a^b \big(f(x,t) - f(x,c)\big)\,dx = \mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(c)$$

d'où le résultat, puisqu'on a montré que

$$\mathrm{F}(t) = \mathrm{F}(c) + \int_c^t \mathrm{G}(s)\,ds$$

pour tout $t \in \mathrm{I}$ tel que $t > c$.

Exemple. Posons

$$\mathrm{F}(t) = \int_{1/2}^2 x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\;dx.$$

La fonction $f(x,t) = x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x+(t-1)\ln x}$ admet une dérivée en t donnée par $\ln(x)f(x,t)$, qui est continue sur $[1/2] \times \mathbb{R}$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\mathrm{F}'(t) = \int_{1/2}^2 \ln(x)\,x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\;dx.$$

De la même façon on voit que F est indéfiniment dérivable. En particulier,

$$\mathrm{F}''(t) = \int_{1/2}^2 \ln(x)^2\,x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\;dx \geq 0$$

donc F est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.