MT242, Cours n° 24, Lundi 22 Mai 2000.

Mise au point : longueur de courbe

Si $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ est un paramétrage de classe C^1 (par morceaux) d'un morceau de courbe par un intervalle $[a, b]$, on a

$$\mathrm{L} = \int_a^b \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2}\, dt = \int_a^b \|v(t)\|\, dt$$

si on considère que $v(t) = f'(t)$ est le vecteur vitesse du mouvement sur la courbe.

Exemple. Longueur d'une arche de cycloïde (Pascal, 1658). La cycloïde est la courbe décrite par un point P de la circonférence d'un cercle, lorsque ce cercle roule sur une droite horizontale D. On prendra la position initiale, pour $t = 0$, lorsque le point P se trouve sur la droite D, en un point qui sera repéré $(0, 0)$. La droite D est la droite $y = 0$, parcourue dans le sens des x croissants. Le rayon du cercle est R. Le paramètre t varie de 0 à 2π. Les équations sont

$$f(t) = \mathrm{R}(t - \sin t,\, 1 - \cos t).$$

On trouve $ds = 2\mathrm{R} \sin(t/2)\, dt$ et $\mathrm{L} = 8\mathrm{R}$.

Un peu plus sur le nombre de tours

Si γ est une courbe fermée paramétrée par $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, et qui ne passe pas par $(0, 0)$, on peut calculer le nombre de tours effectués autour de 0 par la trajectoire $t \in [a, b] \to f(t)$ en calculant l'intégrale curviligne

$$\mathrm{N}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \Bigl(\frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2} \Bigr)$$

au moyen du paramétrage.

Exemple calculé : la courbe paramétrée par $f(t) = (2 + \cos t)\,(\cos(2t), \sin(2t))$, $t \in [0, 2\pi]$ tourne deux fois autour de $(0, 0)$.

Si F est un champ de classe C^1 défini au voisinage d'un courbe fermée γ, et si γ est paramétrée par $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, on considère *l'hodographe* $t \to \mathrm{F}(f(t))$. Si le champ ne s'annule pas sur γ, on obtient ainsi un nouveau chemin fermé $\mathrm{F} \circ f$ qui ne passe pas par $(0, 0)$, pour lequel on peut calculer $\mathrm{W}(\mathrm{F}, \gamma) = \mathrm{N}(\mathrm{F} \circ f)$.

Principe : on considère un champ de vecteurs F défini sur un disque de rayon R, de classe C^1 sur un voisinage du disque ; pour tout $r \in [0, \mathrm{R}]$ désignons par γ_r le cercle de rayon r, parcouru dans le sens trigonométrique. Alors la fonction $r \to \mathrm{W}(\mathrm{F}, \gamma_r)$ est constante sur $[0, \mathrm{R}]$.

Conséquence : un champ de vecteurs F défini sur un disque de rayon R, de classe C^1 sur un voisinage du disque et tel que

$$\mathrm{W}(\mathrm{F}, \gamma_\mathrm{R}) \neq 0$$

doit s'annuler dans le disque.

Autre application : “on ne peut pas peigner la sphère” ; si F est un champ de vecteurs défini sur la sphère S de $\mathbb{R}^3$, tel que $\mathrm{F}(p)$ soit tangent à la sphère pour tout $p \in \mathrm{S}$, ce champ doit s'annuler en au moins un point $p_0 \in \mathrm{S}$.

Raison : quand on déploie sur un plan ce champ F (par projection stéréographique), on trouve un champ F_1 qui tourne deux fois sur les grands cercles, donc ce champ doit s'annuler quelque part.

Dernière application : théorème de d'Alembert (mentionné en courant) : si on assimile un polynôme unitaire $z \in \mathbb{C} \to \mathrm{P}(z) = \mathrm{U}(x+iy) + i\mathrm{V}(x+iy)$ de degré $n \geq 1$ à un champ de vecteurs $\mathrm{F}(x,y) = (\mathrm{U}(x,y), \mathrm{V}(x,y))$ défini sur $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, on voit que pour r très grand le comportement de F sur le cercle de rayon r ressemble à celui de son terme de plus haut degré z^n, qui correspond au champ $\mathrm{G}(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^n(\cos(n\theta), \sin(n\theta))$ pour lequel $\mathrm{W}(\mathrm{G}, \gamma_r) = n$. On a aussi $\mathrm{W}(\mathrm{F}, \gamma_r) = n \neq 0$. Il en résulte que F doit s'annuler dans le disque de rayon r, c'est à dire que le polynôme P doit avoir une racine dans $\mathbb{C}$.

Dérivée d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre

On considère des intégrales généralisées, soit sur un intervalle borné semi-ouvert $[a, b[$ (dans le cas de l'intégrale généralisée d'une fonction non bornée au voisinage de b), soit sur $[a, +\infty[$. Pour unifier la notation, on désignera par b soit un nombre fini $> a$, soit $b = +\infty$.

Théorème 6.2.2. *On suppose donnée une fonction $g \geq 0$ sur $[a, b[$, telle que son intégrale généralisée soit (absolument) convergente,*

$$\int_a^b g(x)\,dx < +\infty.$$

On suppose donnée une fonction f définie et continue sur $[a, b[\times \mathrm{I}$, et telle que pour tout $(x,t) \in [a, b[\times \mathrm{I}$ on ait

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x).$$

On suppose aussi que l'intégrale $\int_a^b f(x,t)\,dx$ converge pour tout $t \in \mathrm{I}$. Sous ces conditions la fonction F définie sur I par

$$\mathrm{F}(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

est une fonction dérivable sur l'intervalle I, et

$$\mathrm{F}'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

Démonstration. On prend $[a, b[= [0, +\infty[$ pour simplifier les notations. Pour toute fonction h dont l'intégrale généralisée sur $[0, +\infty[$ est convergente, on peut écrire

$$\int_0^{+\infty} h(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} h(x)\,dx.$$

Posons

$$u_n(t) = \int_n^{n+1} f(x,t)\,dx.$$

D'après le résultat précédent 6.2.1, on sait que chacune des fonctions (u_n) est dérivable sur l'intervalle I, avec

$$u_n'(t) = \int_n^{n+1} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

D'autre part, pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$|u_n'(t)| \leq \int_n^{n+1} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| dx \leq \int_n^{n+1} g(x)\, dx = v_n,$$

et la série numérique positive $\sum v_n$ converge puisque l'intégrale généralisée de g est finie. La série de fonctions $\sum u_n'$ est donc normalement convergente sur I, et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I. Il en résulte que la fonction somme de la série est dérivable, sa dérivée étant égale à la fonction somme de la série dérivée. Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\, dx = \mathrm{F}(t) \quad \text{et} \quad \mathrm{F}'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx.$$

Un exemple : la fonction Γ. On a posé pour tout $s > 0$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\, \mathrm{e}^{-x}\ dx.$$

On voit que $\Gamma(1) = 1$. Une intégration par parties donne la relation fondamentale $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$, d'où il résulte que $\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$, et de proche en proche on obtient que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n \geq 1$.

On va montrer que Γ est dérivable en tout point $s > 0$. Il suffit de trouver un intervalle $\mathrm{I} =]c,d[$ contenant le point s tel que le théorème précédent soit applicable à $]0,+\infty[\, \times [c,d]$ (dans le cas $0 < s < 1$, il s'agit d'une intégrale généralisée avec deux problèmes de convergence, en 0 et en $+\infty$ qu'il faudrait en principe séparer ; on ne le fera pas). Etant donné $s > 0$, on choisit c, d tels que $0 < c < s < d$. On voit que $x^{s-1} \leq x^{c-1}$ pour $0 < x < 1$ et $x^{s-1} \leq x^{d-1}$ pour $x \geq 1$. Pour tout $s \in]c,d[$ on peut donc majorer la fonction

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x,s) = x^{s-1}\ \ln x\ \mathrm{e}^{-x}$$

par la fonction d'une seule variable g définie par

$$g(x) = |\ln x|\, x^{c-1}\, \mathrm{e}^{-x} \ \text{ si } 0 < x \leq 1, \quad g(x) = |\ln x|\, x^{d-1}\, \mathrm{e}^{-x} \ \text{ si } x > 1.$$

On vérifie facilement que cette fonction g est "intégrable" sur $]0,+\infty[$, ce qui achève la vérification. On montrera avec des arguments similaires que Γ est indéfiniment dérivable. Par exemple,

$$\Gamma''(t) = \int_0^{+\infty} (\ln x)^2 x^{t-1}\, \mathrm{e}^{-x}\ dx,$$

ce qui montre que la dérivée seconde est > 0 sur $]0,+\infty[$. La fonction Γ est donc (strictement) convexe. Elle admet un minimum unique, qui est situé entre 1 et 2 (puisque $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$). Les tables numériques donnent ce minimum t_0 un peu au dessous de $3/2$, à savoir $t_0 \simeq 1,46..$

On a vu que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\ dx = \sqrt{\pi/2}.$$

Le changement de variable $u = x^2/2$ donne $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.