Problème numéro 1

à remettre la semaine du 28 février

EXERCICE 1

On considère la fonction réelle Q définie sur l'espace $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles de taille 2×2 par

$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \det \mathrm{X} - \frac{1}{4} (\mathrm{tr}\, \mathrm{X})^2,$$

où la notation $\mathrm{tr}\, \mathrm{X}$ représente la trace de la matrice X.

1. Montrer que Q est une forme quadratique sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer le rang et la signature de Q.

3. Montrer (sans calcul sur les coefficients de X) que

$$\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \frac{1}{4} (\mathrm{tr}\, \mathrm{X})^2 - \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}(\mathrm{X}^2).$$

4. Déduire de la question 3 une expression de la forme polaire f de Q. Déterminer le noyau de la forme bilinéaire symétrique f.

EXERCICE 2

Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie dans la base canonique par

$$\mathrm{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4) = a^2 x_1^2 + (2+a) x_2^2 - x_4^2 + 2a x_1 x_2 - 2a x_1 x_3 + 2a x_2 x_3 + 2(2+a) x_3 x_4$$

où a est un paramètre réel. Déterminer suivant les valeurs de a le rang et la signature de Q.

EXERCICE 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$ et Q une forme quadratique sur E, non dégénérée.

On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel F de E, de dimension n, tel que la restriction de Q à F soit nulle. Montrer que la signature de Q est (n, n).