Problème 2

A remettre la semaine du 27 mars

EXERCICE 1

Soit $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$; on pose $\|\mathrm{A}\| = \sup_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

1) Montrer que $\|\,.\,\|$ est une norme qui définit la topologie usuelle de $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ (en identifiant $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{m\times n}$), qui est égale à la norme $\|\,.\,\|_1$ ou à la norme $\|\,.\,\|_\infty$, selon que $m = 1$ ou $n = 1$.

2) Si $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, montrer que l'on a $\|\mathrm{AB}\| \leq \|\mathrm{A}\|\,\|\mathrm{B}\|$.

3) Dans cette question, tout X désignera une matrice colonne de $\mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ (que l'on écrira “en ligne”, puisqu'on identifie $\mathrm{M}_{n\times 1}$ à $\mathbb{R}^n$).

a) Montrer que l'on a $\|\mathrm{AX}\|_\infty \leq \|\mathrm{A}\|\,\|\mathrm{X}\|_\infty$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ et tout $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

b) Trouver un $\mathrm{X}_0 \neq 0$ vérifiant $||\mathrm{AX}_0||_\infty = \|\mathrm{A}\|\,\|\mathrm{X}_0\|_\infty$.

c) En déduire que l'on a l'égalité $\|\mathrm{A}\| = \sup_{\mathrm{X}\neq 0} \dfrac{\|\mathrm{AX}\|_\infty}{\|\mathrm{X}\|_\infty}$.

Indication. Pour la question 3) b), on considérera un entier $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\|\mathrm{A}\| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0\, j}|$, et $\mathrm{X}_0 = (x_1, \ldots, x_n)$, où $x_j = 1$ ou -1, selon que $a_{i_0\, j} \geq 0$ ou < 0.

EXERCICE 2

On considère dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, munis de leur topologie usuelle, les sous-espaces ci-dessous ; préciser ceux qui sont compacts et ceux qui ne le sont pas.

$\mathrm{A}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 - 2xy = 1\}$,
$\mathrm{A}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 - 2xy = 1\}$,
$\mathrm{B}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$,
$\mathrm{B}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$,
$\mathrm{B}_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - \mathrm{R})^2 + z^2 = r^2\}$ (où $0 < r < \mathrm{R}$).

EXERCICE 3

1) Soit $\mathrm{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ et $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + y^2}}{x - y}$.

a) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que f est continue sur U.

b) Prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

2) Soit $\alpha > 0$ et f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f_\alpha(x, y) = \dfrac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^\alpha}$ ou 0, selon que $(x, y) \neq (0, 0)$ ou non. Etudier la continuité de f_α, selon les valeurs de α.

3) Montrer que $\lim_{\|(x,y)\|_2 \to +\infty} |x + y|\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 0$.