UNIVERSITE DENIS DIDEROT. 1999–2000.

Premier cycle. **M.T. 242.**

Devoir n° 3

Exercice 1 : Etudier les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x_1, x_2) = 4\,x_1^3 - 15\,x_1 + 3\,(x_1 x_2^2 - 2x_2).$$

Exercice 2 : Sur $\mathbb{R}^2$ l'on considère la norme euclidienne ordinaire.

1° Déterminer en fonction des réels a et b la norme $\|u\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)}$ de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$, défini par :

$$u(x) = (a\,x_1 + b\,x_2, -b\,x_1 + a\,x_2), \quad \text{où} \quad x = (x_1, x_2).$$

2° a. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, définie par

$$f(x) = \big(\frac{x_1^4 + x_2^4}{4} - \frac{3x_1^2 x_2^2}{2} + 3,\ x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) - 2\big), \quad \text{où} \quad x = (x_1, x_2)$$

est de classe C^1. Donner sa matrice jacobienne et calculer la norme $\|df_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)}$.

b. Montrer que dans la boule de centre $(0, 0)$ et de rayon r l'on a l'inéquation :

$$\forall x, \forall y, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq r^3\,\|x - y\|.$$

Exercice 4 : On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel noté ici $< \ | \ >$; la norme euclidienne sera notée $\|\,.\,\|$

1° Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, définie par

$$f(x) = \big(x_1 + \frac{\cos x_1 \,\sin x_2}{2},\ x_2 - \frac{\sin x_1 \,\cos x_2}{2}\big), \quad \text{où} \quad x = (x_1, x_2),$$

est de classe C^1. Donner sa matrice jacobienne Jf_x en x.

Montrer que la différentielle df_x de f en x vérifie :

$$\forall x, h \in \mathbb{R}^2, \quad \|h\|^2 \leq 2\ < df_x(h) | h > .$$

2° Soient a un réel strictement positif et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 vérifiant :

$$\forall x, h \in \mathbb{R}^2, \quad a\,\|h\|^2 \ \leq < dg_x(h) | h > .$$

a) Montrer que dg_x est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^2$ et que g envoie tout ouvert sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b) On considère deux éléments x et y de $\mathbb{R}^2$ et l'on pose $\varphi(t) = g(tx + (1-t)y)$, pour tout t de $[0, 1]$. Montrer que g est dérivable. Calculer $g'(t)$. En utilisant le théorème des accroissements finis, établir que : $a\,\|x - y\|^2 \leq < g(x) - g(y) | x - y >$.

c) En déduire que g est injective (penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

d) Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ est de Cauchy, si et seulement si, son image par g en est aussi une. En conclure que l'image par g de tout fermé de $\mathbb{R}^2$ est fermée.

e) On désigne par X une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ que l'on suppose à la fois ouverte et fermée. Pour tout point x de X et tout réel positif ε, on pose

$$\mathrm{F}(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|x-y\| \leq \varepsilon\} \quad \text{et} \quad \mathrm{S}(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|x-y\| = \varepsilon\}.$$

Est-ce des compacts ? Pour $x \in \mathrm{X}$, on pose $m_x = \sup\{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \mathrm{F}(x,\varepsilon) \subset \mathrm{X}\}$. Montrer que $m_x > 0$.

On veut prouver que $m_x = +\infty$. Dans le cas inverse (avec $x \in \mathrm{X}$) justifier les faits suivants : $\mathrm{S}(x, m_x)$ est contenu dans X et il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{S}(x, m_x)$ telle que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'on ait : $m_{y_n} \leq 1/n$. En déduire une contradiction, puis le fait que $\mathrm{X} = \mathbb{R}^2$.

Montrer que g est surjective (considérer l'image $\mathrm{X} = g(\mathbb{R}^2)$), donc bijective, et que son inverse est de classe C^1.