UNIVERSITE DENIS DIDEROT 1999–2000

Premier cycle **M.T. 242**

Devoir n° 4

I. On note E^d l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ habituel, défini pour deux vecteurs x, y de $\mathbb{R}^d$ par :

$$\langle x\,,\,y\rangle = \sum_{l=1}^{d} x_l\, y_l,$$

où l'on a écrit les vecteurs x et y dans la base canonique $\mathbf{e}_l$, soit $x = \sum_{l=1}^{d} x_l\, \mathbf{e}_l$ et $y = \sum_{l=1}^{d} y_l\, \mathbf{e}_l$. Pour n entier ≥ 1 et i et j entiers allant de 0 à n $(i < j)$, on se donne $n\,(n+1)/2$ nombres réels (positifs) $\mathrm{D}_{i,j}$.

Question

Peut-on trouver $n+1$ points $p_0, \ldots, p_n$ dans un espace euclidien E^d tels que les distances mutuelles de ces points soient, pour tous les entiers i et j (avec $i < j$) entre 0 et n, déterminées par les égalités :

$$d(p_i, p_j) = \|p_i - p_j\| = \mathrm{D}_{i,j}.$$

1). Montrer que si l'on peut trouver $n+1$ points $p_0, \ldots, p_n$ de E^d tels que $d(p_i, p_j) = \mathrm{D}_{i,j}$ pour $i < j$ entre 0 et n, la matrice réelle A (*attention !* les indices i et j qui déterminent la place des coefficients de A vont de 1 à n, il s'agit donc d'une matrice à n colonnes et n lignes) :

$$\mathrm{A} = -\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \frac{1}{2}(\mathrm{D}_{i,j}^2 - \mathrm{D}_{i,0}^2 - \mathrm{D}_{j,0}^2) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

est, dans la base canonique de E^n, la matrice d'une forme bilinéaire symétrique positive (pas forcément définie).

2). Soit L une matrice à n colonnes et m lignes. Montrer que la matrice ${}^t\mathrm{L}\,\mathrm{L}$ est, dans la base canonique de E^n, la matrice d'une forme bilinéaire symétrique positive, non nécessairement définie (donner un exemple justifiant ce dernier point).

3). Soit A la matrice dans la base canonique d'une forme bilinéaire positive (non nécessairement définie) sur E^n. Montrer qu'il existe une matrice Δ diagonale de rang r :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et une matrice inversible P telle que ${}^t\mathrm{P}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \Delta$. En déduire qu'il existe une matrice L à n colonnes et r lignes telle que ${}^t\mathrm{L}\,\mathrm{L} = \mathrm{A}$.

4). Soient $n \geq 1$ entier et $\mathrm{D}_{i,j}$ pour i, j entiers $(0 \leq i < j \leq n)$ $n\,(n+1)/2$ nombres réels positifs. Montrer que l'on peut trouver $n+1$ points $p_0, \ldots, p_n$ dans E^n (mais pas dans E^d pour $d \leq n-1$) tels que les distances mutuelles de ces points soient, pour tous les entiers i et j $(0 \leq i < j \leq n)$, déterminées par les égalités :

$$d(p_i, p_j) = \|p_i - p_j\| = \mathrm{D}_{i,j}$$

si et seulement si :

$(*)$ la matrice A introduite au 1) est définie positive.

Dire ce qui se passe lorsque cette matrice est positive de rang $r < n$.

Observer que si l'on ne peut trouver dans E^n des points $p_0, \ldots, p_n$ dont les distances mutuelles soient déterminées par les $\mathrm{D}_{i,j}$, alors on ne peut trouver ces points dans aucun autre espace E^d.

5). Soit α réel > 0, on définit les nombres :

$$\spadesuit \quad \mathrm{D}_{0,1} = \mathrm{D}_{0,2} = \mathrm{D}_{0,3} = 1,\ \mathrm{D}_{1,2} = \mathrm{D}_{1,3} = \mathrm{D}_{2,3} = \alpha.$$

a). Dire (choisir la méthode que vous préférez) pour quels α on peut, pour tout triplet d'entiers r, s, t avec $0 \leq r < s < t \leq 3$, trouver trois points p_r, p_s, p_t de E^2 tels que $d(p_r, p_s) = \mathrm{D}_{r,s}$, $d(p_s, p_t) = \mathrm{D}_{s,t}$ et $d(p_r, p_t) = \mathrm{D}_{r,t}$.

b). Donner une valeur α pour laquelle on peut trouver quatre points de E^3 dont les distances mutuelles sont déterminées par $\spadesuit$, puis donner une autre valeur de α qui réponde au a)., mais pour laquelle on ne peut trouver quatre points de E^3 dont les distances mutuelles sont déterminées par $\spadesuit$.

c). Pour quels α peut-on trouver quatre points de E^2 tels que leurs distances mutuelles soient déterminées par $\spadesuit$? Des dessins !

A ne pas rédiger. Pour la beauté de l'art.

Montrer que la condition $(*)$ équivaut à (en notant $\mathbf{e}_i^*$ la base duale de la base canonique $\mathbf{e}_i$ de $\mathbf{R}^{n+1}$) :

$(**)$ la matrice $(n+1)\times(n+1)$ notée D^2 qui a pour coefficients diagonaux 0 et pour autres coefficients (pour $i \neq j$ entre 0 et n) $\mathrm{D}^2_{i,j}$ est la matrice d'une forme bilinéaire symétrique définie négative sur le sous-espace vectoriel $\ker(\mathbf{e}_0^* + \mathbf{e}_1^* + \cdots + \mathbf{e}_n^*)$.

II. Soit M une matrice réelle inversible.

1). Utilisant le I.2) et un théorème du cours, montrer qu'il existe une matrice orthogonale O_1 et une matrice diagonale Γ (à coefficients diagonaux strictement positifs) telle que :

$${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{M} = {}^t\mathrm{O}_1\,\Gamma\,\mathrm{O}_1.$$

2). En déduire qu'il existe une unique matrice symétrique définie positive B telle que :

$$\mathrm{B}^2 = \mathrm{B}\,\mathrm{B} = {}^t\mathrm{M}\,\mathrm{M}.$$

3). Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale O_2 telle que :

$$\mathrm{M} = \mathrm{O}_2\,\mathrm{B}.$$