MT242 **Examen du 15 Juin 2000 ; durée 3 heures**

Sans documents ni calculatrices.

Exercice I

1. On considère l'endomorphisme a de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est égale à

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base orthonormée (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de a (le produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ est le produit scalaire usuel).

2. On considère la fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2\,(3x^2 - y^2 + 3z^2 - 2xz).$$

Montrer que la différentielle de f s'annule au point $v = (x, y, z)$ si et seulement si $a(v) = \|v\|^2\, v$ (où a est l'endomorphisme défini dans la question précédente). En déduire que f possède cinq points critiques, que l'on déterminera.

3. La fonction f admet-elle un extremum local au point $(1, 0, 1)$? On pourra remarquer que les vecteurs v_1, v_2, v_3 de la question *1* sont vecteurs propres du hessien de f au point $(1, 0, 1)$.

Exercice II

1. On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme euclidienne usuelle. On donne θ tel que $0 \leq \theta < 2\pi$ et on considère l'endomorphisme r de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est égale à

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Montrer que r est une isométrie de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la nature géométrique de la transformation r ?

2. Montrer que pour tout vecteur $v = (x, y, z)$, on a

$$\|r(v) - v\|^2 = 2(1 - \cos\theta)\,(y^2 + z^2).$$

En déduire que $\|r - \mathrm{Id}\,\| = 2\,\sin(\theta/2)$ (on rappelle que pour tout $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$,

$$\|u\| = \max\{\|u(v)\| : v \in \mathbb{R}^3,\ \|v\| \leq 1\}\ ).$$

3. On considère une isométrie u de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\max\{\|u(v) - v\| : v \in \mathbb{R}^3,\ \|v\| \leq 1\} = \sqrt{2}.$$

Montrer que -1 n'est pas valeur propre de u. Montrer qu'il existe une base orthonormée (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $u(f_1) = f_1$, $u(f_2) = f_3$ et $u(f_3) = -f_2$. Donner une description géométrique de u.

TOURNEZ S.V.P.

Exercice III

1. Calculer les intégrales doubles

$$\iint_{\mathrm{A}} dx\,dy \quad \text{et} \quad \iint_{\mathrm{A}} (x-1)\,dx\,dy$$

sur le demi-disque ouvert

$$\mathrm{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1,\ (x-1)^2 + y^2 < 1\}.$$

2. On pose $\mathrm{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on considère l'application $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ définie par $\varphi(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}\,(x,-y)$. Vérifier que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}$. En déduire que φ est une bijection de U sur U. Montrer que φ est de classe C^1 sur U. Calculer le jacobien de φ et le déterminant du jacobien de φ en tout point $(x,y) \in \mathrm{U}$.

3. Au moyen d'un changement de variable convenable et en utilisant les résultats de la question *1*, calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathrm{B}} \frac{s}{(s^2+t^2)^3}\,ds\,dt$$

où $\mathrm{B} = \varphi(\mathrm{A})$ est l'image de A par φ (l'ensemble B est le demi-disque ouvert

$$\mathrm{B} = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s > 1/2,\ (s-1/2)^2 + t^2 < 1/4\}\,;$$

on ne demande pas de vérifier cette égalité d'ensembles).