Exercice I

1. On considère l'endomorphisme a de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est égale à

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base orthonormée (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de a (le produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ est le produit scalaire usuel).

La matrice A est réelle symétrique ; on sait donc d'avance qu'elle est diagonalisable et que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

On calcule le polynôme caractéristique de A en développant le déterminant caractéristique suivant la deuxième ligne (ou colonne)

$$\chi_{\mathrm{A}}(\lambda) = (-1-\lambda)\big((3-\lambda)^2 - 1\big) = -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-4).$$

Les racines sont donc -1, 2 et 4. Elles sont deux à deux distinctes, donc les sous-espaces propres sont de dimension 1. Pour la valeur propre -1, on trouve que le sous-espace propre est la droite $\mathbb{R}\mathbf{e}_2 = \mathbb{R}(0,1,0)$; pour $\lambda = 2$, on trouve $\mathbb{R}(1,0,1)$ et pour $\lambda = 4$ on trouve $\mathbb{R}(1,0,-1)$. On a bien comme prévu des sous-espaces propres deux à deux orthogonaux, et il suffit de "normer" les vecteurs générateurs, ce qui donne

$$v_1 = (0,1,0); \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1); \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

ou bien l'une des sept autres possibilités obtenues en changeant v_i en $-v_i$ pour $i = 1,2,3$.

2. On considère la fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2 - 2\,(3x^2 - y^2 + 3z^2 - 2xz).$$

Montrer que la différentielle de f s'annule au point $v = (x,y,z)$ si et seulement si $a(v) = \|v\|^2\, v$ (où a est l'endomorphisme défini dans la question précédente). En déduire que f possède cinq points critiques, que l'on déterminera.

La fonction f est une fonction polynomiale des coordonnées, donc elle admet des dérivées partielles continues de tous les ordres, et en particulier f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. La différentielle de f s'annule lorsque les trois dérivées partielles s'annulent. On obtient

$$\mathrm{D}_1 f(x,y,z) = 2\,(x^2+y^2+z^2)\,(2x) - 12x + 4z,$$

$$\mathrm{D}_2 f(x,y,z) = 2\,(x^2+y^2+z^2)\,(2y) + 4y,$$

$$\mathrm{D}_3 f(x,y,z) = 2\,(x^2+y^2+z^2)\,(2z) + 4x - 12z.$$

De plus, $a(v) = (3x - z, -y, -x + 3z)$ si $v = (x,y,z)$. En désignant par $\nabla f(v)$ le *vecteur* dont les coordonnées sont $\mathrm{D}_1 f(v), \mathrm{D}_2 f(v), \mathrm{D}_3 f(v)$, on obtient

$$\nabla f(v) = 4\,(x^2+y^2+z^2)\,v - 4\,a(v) = 4\,\|v\|^2\,v - 4\,a(v)$$

et ce vecteur est nul si et seulement si la différentielle de f est nulle au point v, ce qui montre que la différentielle de f s'annule au point v si et seulement si $a(v) = \|v\|^2\, v$.

Si v est un point critique de f (c'est à dire que $(df)_v = 0$), ou bien $v = (0,0,0)$ (le vecteur nul 0_{E} de $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ vérifie bien que $a(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{E}} = \|0_{\mathrm{E}}\|^2\, 0_{\mathrm{E}}$), ou bien v doit être un vecteur propre de a, mais en plus la valeur propre λ correspondante doit être $\lambda = \|v\|^2 > 0$. Cela exclut la valeur propre -1 de l'endomorphisme a. Pour $\lambda = 2$, on doit choisir un multiple de v_2 tel que $\|v\|^2 = \lambda = 2$, ce qui donne $(1,0,1)$ ou bien son opposé $(-1,0,-1)$. Pour $\lambda = 4$, on obtient de même $(\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$ ou bien $(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$. En ajoutant le point critique $(0,0,0)$, on a bien tous les points critiques, et il y en a cinq.

3. La fonction f admet-elle un extremum local au point $(1,0,1)$? On pourra remarquer que les vecteurs v_1, v_2, v_3 de la question 1 sont vecteurs propres du hessien de f au point $(1,0,1)$.

On sait déjà que la différentielle de f s'annule au point $(1,0,1)$, ce qui est une condition nécessaire pour que la fonction f de classe C^1 admette un extremum local en ce point. On continue l'étude de cette question en calculant la matrice des dérivées secondes, d'abord pour un point général $v = (x,y,z)$,

$$\mathrm{H}_v = \begin{pmatrix} 4(x^2+y^2+z^2)+8x^2-12 & 8xy & 8xz+4 \\ 8xy & 4(x^2+y^2+z^2)+8y^2+4 & 8yz \\ 8xz+4 & 8zy & 4(x^2+y^2+z^2)+8z^2-12 \end{pmatrix}.$$

Pour le point $(1,0,1)$ on trouve

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 0 \\ 12 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $\mathrm{H}v_1 = 12v_1$, $\mathrm{H}v_2 = 16v_2$ et $\mathrm{H}v_3 = -8v_3$. Puisque le hessien admet des valeurs propres strictement positives et une valeur propre strictement négative, la fonction $v \to {}^t v\, \mathrm{H}\, v$ change de signe, et il en résulte que la fonction f n'admet pas d'extremum local au point $(1,0,1)$.

Exercice II

1. On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme euclidienne usuelle. On donne θ tel que $0 \le \theta < 2\pi$ et on considère l'endomorphisme r de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est égale à

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Montrer que r est une isométrie de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la nature géométrique de la transformation r ?

Pour voir que r est une isométrie il suffit de vérifier que la matrice R est orthogonale. On vérifie facilement que

$${}^t\mathrm{R}\,\mathrm{R} = \mathrm{I}_3.$$

L'axe $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$ est fixe, et on reconnaît une rotation d'angle θ dans le plan $x = 0$. La transformation r est la rotation de $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$, d'angle θ.

2. Montrer que pour tout vecteur $v = (x,y,z)$, on a

$$\|r(v) - v\|^2 = 2(1-\cos\theta)\,(y^2+z^2).$$

En déduire que $\|r - \mathrm{Id}\,\| = 2\sin(\theta/2)$ (on rappelle que pour tout $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$,

$$\|u\| = \max\{\|u(v)\| : v \in \mathbb{R}^3,\ \|v\| \le 1\}\ ).$$

En utilisant la matrice $\mathrm{R} - \mathrm{I}_3$ on voit que

$$r(v) - v = \big(0,\ (\cos(\theta)-1)y - \sin(\theta)z,\ \sin(\theta)y + (\cos(\theta)-1)z\big),$$

donc

$$\|r(v)-v\|^2 = \big((\cos(\theta)-1)y - \sin(\theta)z\big)^2 + \big(\sin(\theta)y + (\cos(\theta)-1)z\big)^2 =$$
$$= (\cos(\theta)-1)^2(y^2+z^2) + \sin^2(\theta)(y^2+z^2) = (2-2\cos\theta)(y^2+z^2) = 4\,\sin^2(\theta/2)(y^2+z^2).$$

Si $v=(x,y,z)$ est un vecteur de norme ≤ 1, on a $y^2+z^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 1$, donc $\|r(v)-v\|^2 \le 2(1-\cos(\theta))$ d'après ce qui précède. Ceci étant vrai pour tout vecteur v de norme ≤ 1, on en déduit que $\|r-\mathrm{Id}\,\|^2 \le 2(1-\cos(\theta))$. Mais si on prend le vecteur $v=(0,1,0)$ ou bien $v=(0,0,1)$ le calcul précédent donne $\|r(v)-v\|^2 = 2(1-\cos(\theta))$ donc $\|r-\mathrm{Id}\,\|^2 = 2(1-\cos(\theta)) = 4\sin^2(\theta/2)$. Puisque $0\le\theta<2\pi$, on a $\sin(\theta/2)\ge 0$ et $\|r(v)-v\| = 2\,\sin(\theta/2)$.

3. On considère une isométrie u de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\max\{\|u(v)-v\| : v\in\mathbb{R}^3,\ \|v\|\le 1\} = \sqrt{2}.$$

Montrer que -1 n'est pas valeur propre de u. Montrer qu'il existe une base orthonormée (f_1,f_2,f_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $u(f_1)=f_1$, $u(f_2)=f_3$ et $u(f_3)=-f_2$. Donner une description géométrique de u.

Si -1 était valeur propre de u on pourrait trouver un vecteur v de norme 1 tel que $u(v)=-v$, et on aurait alors $\|u(v)-v\| = \|2\,v\| = 2 > \sqrt{2}$ ce qui contredit l'hypothèse $\|u-\mathrm{Id}\,\| = \sqrt{2}$. En dimension 3 on sait que toute isométrie u admet au moins une valeur propre réelle, qui ne peut donc être que 1. Il existe donc un vecteur propre f_1 de norme 1 tel que $u(f_1)=f_1$. Il en résulte que le plan vectoriel P orthogonal à f_1 est stable par u. La restriction u_1 de u à ce plan est une isométrie en dimension 2 qui n'admet pas la valeur propre -1, donc u_1 n'est pas une symétrie par rapport à une droite. C'est donc une rotation d'un certain angle θ. Dans une base orthonormée formée de f_1 et d'une base orthonormée du plan P, la matrice de u est égale à la matrice R de la première question. D'après les calculs de la question précédente on aura $\|u-\mathrm{Id}\,\| = 2\sin(\theta/2) = \sqrt{2}$, donc $\theta/2 = \pi/4$ ou bien $3\pi/4$, et $\theta=\pi/2$ ou bien $3\pi/2$.

Finalement, u est une rotation d'angle $\pi/2$ ou bien $3\pi/2$ autour d'un axe de $\mathbb{R}^3$. On peut prendre pour f_2 un vecteur quelconque de norme 1 du plan P, et on prendra $f_3=u(f_2)$; ce vecteur est de norme 1, et orthogonal à f_2 pour une rotation d'angle $\pi/2$ ou $3\pi/2$. On aura $u(f_3)=-f_2$ pour les deux cas (mais dans le cas de l'angle $3\pi/2$ la base obtenue n'a pas l'orientation positive).

Exercice III

1. Calculer les intégrales doubles

$$\iint_{\mathrm{A}} dx\,dy \quad \textit{et} \quad \iint_{\mathrm{A}} (x-1)\,dx\,dy$$

sur le demi-disque ouvert

$$\mathrm{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>1,\ (x-1)^2+y^2<1\}.$$

La première intégrale est l'intégrale de la fonction 1 sur le domaine A, donc c'est l'aire de A. Le domaine A est la moitié du disque de rayon 1 centré au point $(1,0)$, donc l'aire de A est $\pi/2$,

$$\iint_{\mathrm{A}} dx\,dy = \frac{\pi}{2}.$$

La deuxième intégrale se calcule par deux intégrales simples successives ; faisons le calcul en intégrant d'abord en x, puis en y. La variable y varie entre -1 et 1. Pour y fixé entre -1 et 1, la variable x varie entre les bornes 1 et $1+\sqrt{1-y^2}$. La première intégrale (en x, pour y fixé) est donc

$$\int_1^{1+\sqrt{1-y^2}} (x-1)\,dx = \frac{1}{2}\Big[(x-1)^2\Big]_1^{1+\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2}\,(1-y^2).$$

Ensuite,

$$\iint_{\mathrm{A}} (x-1)\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-y^2)\, dy = \frac{1}{2}\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

2. On pose $\mathrm{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *et on considère l'application* $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ *définie par* $\varphi(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}(x,-y)$. *Vérifier que* $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}$. *En déduire que* φ *est une bijection de* U *sur* U. *Montrer que* φ *est de classe* C^1 *sur* U. *Calculer le jacobien de* φ *et le déterminant du jacobien de* φ *en tout point* $(x,y) \in \mathrm{U}$.

Posons $(s,t) = \varphi(x,y)$. On aura

$$s^2 + t^2 = (x^2+y^2)^{-2}(x^2+y^2) = (x^2+y^2)^{-1}.$$

Ensuite,

$$\varphi(\varphi(x,y)) = \varphi(s,t) = (s^2+t^2)^{-1}(s,-t) = (x^2+y^2)\Big(\frac{x}{x^2+y^2}, -\ \frac{-y}{x^2+y^2}\Big) = (x,y).$$

Il est clair que φ est bijective puisqu'elle admet une application réciproque (égale à φ). On voit que φ est de classe C^1 sur U en vérifiant que toutes les dérivées partielles existent et sont continues en tout point de U, ou bien directement en remarquant que les deux cordonnées de φ sont obtenues à partir de produits et quotient (non nul) de fonctions polynomiales. Le calcul de la matrice jacobienne au point $(x,y) \in \mathrm{U}$ donne

$$(\mathrm{J}\varphi)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

(tous les coefficients de cette matrice sont des fonctions continues sur U, c'est une façon de justifier que φ est de classe C^1 sur U). Le déterminant jacobien de φ au point (x,y) vaut

$$(x^2+y^2)^{-4}\big((y^2-x^2)^2 + 4x^2y^2\big) = (x^2+y^2)^{-2}.$$

3. Au moyen d'un changement de variable convenable et en utilisant les résultats de la question 1, calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathrm{B}} \frac{s}{(s^2+t^2)^3}\, ds\, dt$$

où $\mathrm{B} = \varphi(\mathrm{A})$ *est l'image de* A *par* φ *(l'ensemble* B *est le demi-disque ouvert*

$$\mathrm{B} = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s > 1/2,\ (s-1/2)^2 + t^2 < 1/4\}\,;$$

on ne demande pas de vérifier cette égalité d'ensembles).

On utilise tout simplement le changement de variable $(s,t) = \varphi(x,y)$. L'élément différentiel $ds\,dt$ doit être remplacé par $|\det(\mathrm{J}\varphi)_{(x,y)}|\, dx\, dy$, et on a vérifié que $s^2+t^2 = (x^2+y^2)^{-1}$. On obtient

$$\iint_{\mathrm{B}} s\, \frac{1}{(s^2+t^2)^3}\, ds\, dt = \iint_{\mathrm{A}} \frac{x}{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)^3\,(x^2+y^2)^{-2}\, dx\, dy = \iint_{\mathrm{A}} x\, dx\, dy.$$

D'après la première question on obtient

$$\iint_{\mathrm{B}} \frac{s}{(s^2+t^2)^3}\, ds\, dt = \iint_{\mathrm{A}} dx\, dy + \iint_{\mathrm{A}} (x-1)\, dx\, dy = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}.$$