MT242 **Examen partiel du 18 Mars 2000 ; durée 2 heures**

Sans documents ni calculatrices.

Exercice I

On désigne par a un paramètre réel. On définit $\mathrm{Q} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ en posant pour tout vecteur $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$\mathrm{Q}(v) = xy + 2yz + azt.$$

a. Vérifier que Q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ et donner sa forme polaire β. Ecrire la matrice de Q dans la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

b. Ecrire Q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. Donner la signature de Q (selon la valeur de a). Déterminer le noyau de Q (selon la valeur de a).

c. Dans cette question on pose $a = -2$. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, on note $\mathrm{F}^\perp$ son orthogonal par rapport à β. Si F est de dimension 2, quelle est la dimension de $\mathrm{F}^\perp$? Déterminer $\mathrm{F}^\perp$ lorsque $\mathrm{F} = \mathbb{R}\mathbf{e}_1 \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_3$.

d. Dans cette question on garde $a = -2$. Déterminer une base β-orthogonale de $\mathbb{R}^4$. Trouver un sous-espace vectoriel F de dimension 2 tel que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$.

Exercice II

On désigne par γ un paramètre réel > 0 et on définit une fonction f_γ sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_\gamma(x, y) = \frac{x\,|y|^\gamma}{x^4 + y^4} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad \text{et} \quad f_\gamma(0, 0) = 0.$$

a. Dans cette question $\gamma = 3$. La fonction f_3 est-elle continue au point $(0, 0)$?

b. Déterminer les valeurs de $\gamma > 0$ telles que f_γ soit continue au point $(0, 0)$.

Exercice III

On considère les trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants

$$\mathrm{A}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y^2 + z^4 = 0\},$$
$$\mathrm{A}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \mathrm{e}^x \sin(y) + z^2 \neq 0\},$$
$$\mathrm{A}_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^4 + z^8 = 1\}.$$

a. Parmi les ensembles précédents, quels sont ceux qui sont fermés ? Quels sont ceux qui sont compacts ? On justifiera les réponses.

b. L'ensemble A_2 est-il ouvert ? Montrer que l'ensemble A_1 n'est pas ouvert.