MT242 **Corrigé de l'examen partiel du 18 Mars 2000**

Exercice I

On désigne par a un paramètre réel. On définit $\mathrm{Q} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ en posant pour tout vecteur $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$\mathrm{Q}(v) = xy + 2yz + azt.$$

a. Vérifier que Q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ et donner sa forme polaire β. Ecrire la matrice de Q dans la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

Si $v = (x, y, z, t)$ et $v' = (x', y', z', t')$, posons

$$\beta(v, v') = \frac{1}{2}\,(xy' + x'y) + (yz' + y'z) + \frac{a}{2}\,(zt' + z't).$$

On vérifie facilement que β est bilinéaire symétrique et que $\mathrm{Q}(v) = \beta(v, v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^4$, ce qui montre que Q est quadratique et que β est sa forme polaire. La matrice B de Q (ou de β) dans la base canonique est égale à

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a/2 \\ 0 & 0 & a/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Ecrire Q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. Donner la signature de Q (selon la valeur de a). Déterminer le noyau de Q (selon la valeur de a).

L'expression proposée ne contient pas de carré. On va suivre le manuel ; posons $x = \xi + \eta$ et $y = \xi - \eta$. L'expression de $\mathrm{Q}(v)$ devient

$$\xi^2 - \eta^2 + 2(\xi - \eta)z + a\,zt = (\xi + z)^2 - z^2 - \eta^2 - 2\eta z + a\,zt =$$
$$= (\xi + z)^2 - (\eta + z)^2 + a\,zt$$

et $zt = \frac{1}{4}\,(z + t)^2 - \frac{1}{4}\,(z - t)^2$, donc en revenant aux variables initiales $x = (\xi + \eta)/2$ et $y = (\xi - \eta)/2$ on trouve

$$\mathrm{Q}(v) = \Big(\frac{x + y}{2} + z\Big)^2 - \Big(\frac{x - y}{2} + z\Big)^2 + \frac{a}{4}\,(z + t)^2 - \frac{a}{4}\,(z - t)^2 =$$
$$= \ell_1(v)^2 - \ell_2(v)^2 + \frac{a}{4}\,\ell_3(v)^2 - \frac{a}{4}\,\ell_4(v)^2.$$

Vérifions que les formes linéaires obtenues, $\ell_1(v) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z$, $\ell_2(v) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z$, $\ell_3(v) = (z + t)^2$ et $\ell_4(v) = (z - t)^2$, sont linéairement indépendantes. La matrice de leurs coordonnées est

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut $(-1/2)(-2) = 1 \neq 0$.

On voit maintenant immédiatement que la signature de Q est $(2,2)$ lorsque $a \neq 0$ et $(1,1)$ lorsque $a = 0$. Quand $a \neq 0$, le rang est $r = 2+2 = 4$, donc Q est non dégénérée sur $\mathbb{R}^4$ et son noyau est $\mathrm{N(Q)} = \{0\}$. Lorsque $a = 0$, la décomposition se réduit à $\mathrm{Q}(v) = \ell_1(v)^2 - \ell_2(v)^2$, avec ℓ_1, ℓ_2 indépendantes. On a vu en cours que dans ce cas

$$\mathrm{N(Q)} = \{v \in \mathbb{R}^4 : \ell_1(v) = \ell_2(v) = 0\}$$

ce qui donne les deux équations $x + y + 2z = 0$, $x - y + 2z = 0$. La résolution donne d'abord $y = 0$, puis $x = -2z$. On peut prendre t et z quelconques, et décrire N(Q) par

$$\mathrm{N(Q)} = \{(-2z, 0, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$.

c. Dans cette question on pose $a = -2$. Si F *est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, on note $\mathrm{F}^\perp$ son orthogonal par rapport à β. Si* F *est de dimension* 2*, quelle est la dimension de $\mathrm{F}^\perp$? Déterminer $\mathrm{F}^\perp$ lorsque $\mathrm{F} = \mathbb{R}\mathbf{e}_1 \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_3$.*

On a vu que Q est non dégénérée lorsque $a \neq 0$. Dans ce cas, on sait d'après le cours que $\dim \mathrm{F}^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{F} = 4 - 2 = 2$.

Si $\mathrm{F} = \mathbb{R}\mathbf{e}_1 \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_3$, l'orthogonal de F est l'ensemble des vecteurs v tels que $\beta(v, \mathbf{e}_1) = \beta(v, \mathbf{e}_3) = 0$, ce qui donne les deux équations

$$\frac{1}{2}\, y = 0; \quad y - t = 0.$$

On en déduit $y = t = 0$, donc

$$\mathrm{F}^\perp = \{(x, 0, z, 0) : x, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\mathbf{e}_1 \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_3 = \mathrm{F}.$$

d. Dans cette question on garde $a = -2$. Déterminer une base β-orthogonale de $\mathbb{R}^4$. Trouver un sous-espace vectoriel F *de dimension* 2 *tel que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$.*

On sait qu'on peut obtenir une base β-orthogonale en cherchant des vecteurs $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ et $\mathbf{f}_4$ tels que $\ell_i(\mathbf{f}_j) = 0$ lorsque $i \neq j$, et $\ell_i(\mathbf{f}_i) = 1$. Pour $\mathbf{f}_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$, on obtient les équations

$$\frac{x_1 + y_1}{2} + z_1 = 1, \quad \frac{x_1 - y_1}{2} + z_1 = 0, \quad z_1 + t_1 = 0, \quad z_1 - t_1 = 0$$

qui donnent immédiatement $z_1 = t_1 = 0$, puis $x_1 = y_1 = 1$, donc $\mathbf{f}_1 = (1, 1, 0, 0)$. Pour $\mathbf{f}_2$,

$$\frac{x_2 + y_2}{2} + z_2 = 0, \quad \frac{x_2 - y_2}{2} + z_2 = 1, \quad z_2 + t_2 = 0, \quad z_2 - t_2 = 0$$

qui donne encore $z_2 = t_2 = 0$, mais $x_2 = 1$, $y_2 = -1$, donc $\mathbf{f}_2 = (1, -1, 0, 0)$. Pour $\mathbf{f}_3$

$$\frac{x_3 + y_3}{2} + z_3 = 0, \quad \frac{x_3 - y_3}{2} + z_3 = 0, \quad z_3 + t_3 = 1, \quad z_3 - t_3 = 0$$

qui donne $y_3 = 0$, $z_3 = t_3 = -x_3/2$, d'où $\mathbf{f}_3 = (-1, 0, 1/2, 1/2)$. Pour $\mathbf{f}_4$

$$\frac{x_4 + y_4}{2} + z_4 = 0, \quad \frac{x_4 - y_4}{2} + z_4 = 0, \quad z_4 + t_4 = 0, \quad z_4 - t_4 = 1$$

qui donne $y_4 = 0$, $z_4 = -t_4 = -x_4/2$, d'où $\mathbf{f}_4 = (-1, 0, 1/2, -1/2)$.

On a $\mathrm{Q}(\mathbf{f}_1) = 1$, $\mathrm{Q}(\mathbf{f}_2) = -1$, $\mathrm{Q}(\mathbf{f}_3) = -1/2$, $\mathrm{Q}(\mathbf{f}_4) = 1/2$. Pour n'importe quel sous-espace de la forme $\mathrm{F} = \mathbb{R}\mathbf{f}_i \oplus \mathbb{R}\mathbf{f}_j$, avec $i \neq j$, la matrice de la restriction de Q, par rapport à la base $(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j)$ sera diagonale avec coefficients diagonaux $\mathrm{Q}(\mathbf{f}_i)$ et $\mathrm{Q}(\mathbf{f}_j)$ non nuls. cette matrice 2×2 sera donc inversible, ce qui signifie que la restriction de Q à un tel sous-espace F est non dégénérée. D'après le cours, on aura $\mathbb{R}^4 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$.

Exercice II

On désigne par γ un paramètre réel > 0 et on définit une fonction f_γ sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_\gamma(x,y) = \frac{x\,|y|^\gamma}{x^4+y^4} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \quad \text{et} \qquad f_\gamma(0,0) = 0.$$

a. Dans cette question $\gamma = 3$. La fonction f_3 est-elle continue au point $(0,0)$?

On considère lorsque $t > 0$

$$f_3(t,t) = \frac{t\,|t|^3}{2\,t^4} = \frac{1}{2}.$$

Lorsque $t > 0$ tend vers zéro, la valeur de $f_3(t,t)$ ne tend pas vers $f_3(0,0) = 0$, donc f_3 n'est pas continue en $(0,0)$.

b. Déterminer les valeurs de $\gamma > 0$ telles que f_γ soit continue au point $(0,0)$.

On va montrer que f_γ est continue en $(0,0)$ lorsque $\gamma > 3$, et non continue lorsque $0 < \gamma \leq 3$.

Commençons par le cas $\gamma > 3$. On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, avec $r = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$. Alors

$$f_\gamma(x,y) = r^{1+\gamma-4}\,\frac{\cos\theta\,|\sin\theta|^\gamma}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}.$$

Puisque $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, l'un des deux, $\cos^2\theta$ ou $\sin^2\theta$, est $\geq 1/2$. Il en résulte que $\cos^4\theta + \sin^4\theta \geq 1/4$, et

$$\Big|\frac{\cos\theta\,|\sin\theta|^\gamma}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}\Big| \leq 4$$

pour tout θ donc

$$|f_\gamma(x,y)| \leq 4\,r^{1+\gamma-4}$$

tend vers 0 lorsque $r \to 0$, parce que $1+\gamma-4 > 0$. On a montré que f_γ est continue en $(0,0)$ lorsque $\gamma > 3$.

Prenons maintenant $0 < \gamma < 3$. On a pour $t > 0$

$$f_\gamma(t,t) = \frac{t\,|t|^\gamma}{2\,t^4} = t^{1+\gamma-4}$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque $t > 0$ tend vers 0 (parce que $1+\gamma-4 < 0$), donc f_γ n'est pas continue en $(0,0)$ dans ce cas. Comme on a vu que f_3 n'est pas continue en $(0,0)$, il en résulte que f_γ n'est pas continue au point $(0,0)$ lorsque $0 < \gamma \leq 3$

Exercice III

On considère les trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants

$$\mathrm{A}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y^2 + z^4 = 0\},$$
$$\mathrm{A}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \mathrm{e}^x\sin(y) + z^2 \neq 0\},$$
$$\mathrm{A}_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^4 + z^8 = 1\}.$$

a. Parmi les ensembles précédents, quels sont ceux qui sont fermés ? Quels sont ceux qui sont compacts ? On justifiera les réponses.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = x + y^2 + z^4$ est continue comme composition de fonctions continues élémentaires, donc A_1 est fermé : si $(v_n) \subset \mathrm{A}_1$ tend vers $w \in \mathbb{R}^3$, on a $f(v_n) = 0$ pour tout n et $f(v_n) \to f(w)$ par continuité de f au point w, donc $f(w) = 0$ et on a bien montré que A_1 est fermé.

Le raisonnement est exactement le même pour A_3. En revanche A_2 n'est pas fermé. En effet le point $v_n = (0, 0, 2^{-n})$ est dans A_2 pour tout $n \geq 0$, mais la limite $w = (0, 0, 0)$ n'est pas dans A_2.

La question de la compacité ne se pose que pour les deux ensembles fermés A_1 et A_3. Il faut maintenant voir s'ils sont bornés ou non. Montrons d'abord que A_3 est borné, donc compact. Si $v = (x, y, z)$ est dans A_3, on a $x^2 + y^4 + z^8 = 1$, donc $x^2 \leq 1$, $y^4 \leq 1$ et $z^8 \leq 1$. Il en résulte que $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ et $|z| \leq 1$, donc $\|v\|_\infty \leq 1$ pour tout point v de A_3 qui est donc borné.

Montrons maintenant que A_1 n'est pas borné. Le point $v_n = (-4^n, 2^n, 0)$ est dans A_1 et $\|v_n\|_\infty = 4^n$ tend vers $+\infty$, donc A_1 n'est pas borné, donc non compact.

b. L'ensemble A_2 *est-il ouvert ? Montrer que l'ensemble* A_1 *n'est pas ouvert.*

L'ensemble A_2 est ouvert : on peut dire que son complémentaire B_2, défini par l'équation $\mathrm{e}^x \sin(y) + z^2 = 0$ est fermé parce que la fonction $f(x, y, z) = \mathrm{e}^x \sin(y) + z^2$ est continue sur $\mathbb{R}^3$, en raisonnant comme à la question a.

L'ensemble A_1 n'est pas ouvert, parce que son complémentaire B_1, défini par l'équation $x + y^2 + z^4 \neq 0$, n'est pas fermé. En effet, le point $(2^{-n}, 0, 0)$ appartient à B_1 pour tout $n \geq 0$, mais sa limite $w = (0, 0, 0)$ n'est pas dans B_1.