MT242 **Examen du 7 Septembre 2000 ; durée 3 heures**

Sans documents ni calculatrices.

Exercice I

On désigne par $\mathrm{D_R} = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq \mathrm{R}^2\}$ le disque fermé de rayon R dans $\mathbb{R}^2$. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre réel α l'intégrale double

$$\mathrm{J}_\alpha(\mathrm{R}) = \iint_{\mathrm{D_R}} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha}\, dx\, dy$$

tend vers une limite finie lorsque $\mathrm{R} \to +\infty$. Calculer cette limite quand elle existe.

Exercice II

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x-y+z)(1-x^2-y^2-z^2).$$

On désigne par D la boule unité fermée $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un point $(x_0,y_0,z_0) \in \mathrm{D}$ tel que

$$f(x_0,y_0,z_0) = \max\{f(x,y,z) : (x,y,z) \in \mathrm{D}\}.$$

Déterminer ce point (x_0,y_0,z_0) ainsi que la valeur $f(x_0,y_0,z_0)$.

Exercice III

On désigne par a un paramètre réel, et on définit une fonction réelle f sur $\mathbb{R}^2$ par la formule

$$f(x,y) = \frac{x\sin^2 x + a\,xy^2}{x^2+2y^2+3y^4} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Calculer les dérivées partielles de la fonction f au point $(0,0)$. La fonction f est-elle différentiable au point $(0,0)$? On discutera selon la valeur du paramètre a.

Exercice IV

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^3$ une matrice symétrique réelle de taille 3×3 possédant des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; pour tout vecteur $v = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ on pose $\mathrm{Q}(v) = \sum_{i,j=1}^3 a_{i,j}\, x_i x_j$. Un *plan vectoriel* est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

1. Dans cette question on suppose que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$. Montrer qu'il existe un plan vectoriel F_0 tel que $\mathrm{Q}(v) > 0$ pour tout vecteur v non nul de F_0. Montrer que pour tout plan vectoriel E, il existe un vecteur $v \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{Q}(v) > 0$.

2. Dans cette question on suppose seulement que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire et de la norme euclidienne usuels. Pour tout vecteur v de norme un on désigne par $v^\perp$ le plan vectoriel orthogonal au vecteur v et on pose $f(v) = \max\{\mathrm{Q}(w) : w \in v^\perp, \|w\| = 1\}$. Montrer que λ_2 est le minimum de la fonction f sur la sphère unité $\mathrm{S} = \{v = (x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ (on pourra appliquer la question *1* aux matrices $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}$ pour λ convenable).