Exercice I

On désigne par $\mathrm{D_R} = \{(x,y) : x^2+y^2 \le \mathrm{R}^2\}$ *le disque fermé de rayon* R *dans* $\mathbb{R}^2$*. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre réel* α *l'intégrale double*

$$\mathrm{J}_\alpha(\mathrm{R}) = \iint_{\mathrm{D_R}} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy$$

tend vers une limite finie lorsque $\mathrm{R} \to +\infty$*. Calculer cette limite quand elle existe.*

En passant en coordonnées polaires on obtient

$$\mathrm{J}_\alpha(\mathrm{R}) = 2\pi \int_0^{\mathrm{R}} \frac{1}{(1+r^2)^\alpha}\, r\,dr$$

qui se ramène par le changement de variable $u = r^2$ à

$$\mathrm{J}_\alpha(\mathrm{R}) = \pi \int_0^{\mathrm{R}^2} (1+u)^{-\alpha}\,du = \frac{\pi}{1-\alpha}\big((1+\mathrm{R}^2)^{1-\alpha} - 1\big)$$

pour $\alpha \neq 1$, et $\mathrm{J}_1(\mathrm{R}) = \pi \ln(1+\mathrm{R}^2)$ quand $\alpha = 1$; il en résulte que $\mathrm{J}_\alpha(\mathrm{R})$ tend vers une limite finie si et seulement si $\alpha > 1$. La limite est alors

$$\mathrm{J} = \frac{\pi}{\alpha - 1}.$$

Exercice II

Soit f *la fonction réelle définie sur* $\mathbb{R}^3$ *par*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x-y+z)(1-x^2-y^2-z^2).$$

On désigne par D *la boule unité fermée* $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ *de* $\mathbb{R}^3$*. Montrer qu'il existe un point* $(x_0,y_0,z_0) \in \mathrm{D}$ *tel que*

$$f(x_0,y_0,z_0) = \max\{f(x,y,z) : (x,y,z) \in \mathrm{D}\}.$$

Déterminer ce point (x_0,y_0,z_0) *ainsi que la valeur* $f(x_0,y_0,z_0)$*.*

La boule D est fermée et bornée, donc compacte, et elle est non vide ; par conséquent, la fonction continue f atteint un maximum sur D. Posons

$$\mathrm{M} = \max\{f(x,y,z) : (x,y,z) \in \mathrm{D}\}.$$

On note que $f(t,0,0) = t(1-t^2) > 0$ lorsque $0 < t < 1$, ce qui donne des points de D où $f > 0$. Il en résulte que la valeur maximale M de f sur D est > 0. Les points où f atteint son maximum sur D ne peuvent donc pas se trouver sur la sphère unité, où on a $f = 0$. Ils sont donc dans la boule unité ouverte, et comme f est clairement de classe C^1 les dérivées partielles doivent s'annuler en ces points. En annulant les trois dérivées partielles de f on obtient les équations suivantes pour tout point $v = (x,y,z) \in \mathrm{D}$ tel que $f(v) = \mathrm{M}$:

$$\begin{aligned}
(1-x^2-y^2-z^2) - 2(x-y+z)x &= 0\\
-(1-x^2-y^2-z^2) - 2(x-y+z)y &= 0\\
(1-x^2-y^2-z^2) - 2(x-y+z)z &= 0.
\end{aligned}$$

On a dit que $a = 1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$ pour tout point $v = (x, y, z) \in \mathrm{D}$ tel que $f(v) = \mathrm{M}$. On remarque alors en posant $b = (x - y + z)$ que $2b\,v = a\,(1, -1, 1)$, ce qui entraîne que $b \neq 0$ et $v = (a/2b)(1, -1, 1)$. Les points v cherchés sont donc de la forme $(t, -t, t)$ et on obtient en remplaçant dans la première équation ci-dessus

$$(1 - 3t^2) - 6t^2 = 0,$$

ce qui donne la condition $1 = 9t^2$, qui implique $t = \pm 1/3$; la solution $t = -1/3$ ne convient pas (en fait elle correspond au *minimum* de f sur D) et le point solution (unique) est

$$(x_0, y_0, z_0) = (1/3, -1/3, 1/3)$$

avec $f(x_0, y_0, z_0) = 2/3$.

Exercice III

On désigne par a un paramètre réel, et on définit une fonction réelle f sur $\mathbb{R}^2$ par la formule

$$f(x, y) = \frac{x \sin^2 x + a\,xy^2}{x^2 + 2y^2 + 3y^4} \quad \textit{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad \textit{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

Calculer les dérivées partielles de la fonction f au point $(0, 0)$. La fonction f est-elle différentiable au point $(0, 0)$? On discutera selon la valeur du paramètre a.

Pour la première dérivée partielle on doit calculer la dérivée pour $t = 0$ de la fonction g_1 définie par

$$g_1(t) = f(t, 0) = \frac{\sin^2 t}{t} \quad \text{si} \quad t \neq 0 \quad \text{et} \quad g_1(0) = 0.$$

On examine $(g_1(t) - g_1(0))/t = \sin^2(t)/t^2$, qui tend vers $1^2 = 1$ lorsque $t \to 0$. Par conséquent

$$\mathrm{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$$

existe. L'autre dérivée partielle est très simple à déterminer puisque

$$g_2(t) = f(0, t) = 0$$

pour tout t, ce qui donne

$$\mathrm{B} = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Pour que f soit différentiable au point $(0, 0)$ il faut et il suffit que

$$f(x, y) - f(0, 0) - \mathrm{A}x - \mathrm{B}y = f(x, y) - x$$

soit négligeable devant $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ lorsque $r \to 0$, ce qu'on peut écrire $f(x, y) - x = o(r)$ quand $r \to 0$. On a

$$f(x, y) - x = \frac{x \sin^2 x - x^3 + (a - 2)xy^2 - 3xy^4}{x^2 + 2y^2 + 3y^4}.$$

On voit que $f(t, t) - t \sim (a - 2)t/3$, qui n'est pas $o(r)$ si $a \neq 2$. Il est donc nécessaire que $a = 2$ pour que f soit différentiable au point $(0, 0)$. Dans le cas où $a = 2$,

$$f(x, y) - x = \frac{x \sin^2 x - x^3 - 3xy^4}{x^2 + 2y^2 + 3y^4}.$$

Dans le numérateur, $x \sin^2 x - x^3$ est $\mathrm{O}(x^5)$, donc $\mathrm{O}(r^5)$ et $3xy^4$ est également $\mathrm{O}(r^5)$, le dénominateur est $\geq r^2$ donc $f(x, y) - x$ est $\mathrm{O}(r^3)$ qui est bien en particulier $o(r)$. En conclusion, f est différentiable au point $(0, 0)$ si et seulement si $a = 2$.

Exercice IV

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^3$ *une matrice symétrique réelle de taille* 3×3 *possédant des valeurs propres* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *; pour tout vecteur* $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *on pose* $\mathrm{Q}(v) = \sum_{i,j=1}^3 a_{i,j}\, x_i x_j$*. Un plan vectoriel est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de* $\mathbb{R}^3$*.*

1. Dans cette question on suppose que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$*. Montrer qu'il existe un plan vectoriel* F_0 *tel que* $\mathrm{Q}(v) > 0$ *pour tout vecteur* v *non nul de* F_0*. Montrer que pour tout plan vectoriel* E*, il existe un vecteur* $v \in \mathrm{E}$ *tel que* $\mathrm{Q}(v) > 0$*.*

Soient v_1, v_2 et v_3 des vecteurs propres de norme un de la matrice A, tels que $\mathrm{A}v_j = \lambda_j v_j$ pour $j = 1, 2, 3$. On sait que ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux (matrice réelle symétrique). On note que

$$\mathrm{Q}(v) = \sum_{i=1}^3 x_i \Big(\sum_{j=1}^3 a_{i,j} x_j \Big) = v \,.\, \mathrm{A}v.$$

Si $v = \sum_{j=1}^3 c_j v_j$, on a en utilisant l'orthogonalité des (v_j)

$$\mathrm{Q}(v) = v \,.\, \mathrm{A}v = \Big(\sum_{i=1}^3 c_i v_i \Big) \cdot \Big(\sum_{j=1}^3 \lambda_j c_j v_j \Big) = \sum_{j=1}^3 \lambda_j c_j^2.$$

Si $\mathrm{F}_0 = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$ on a bien $\mathrm{Q}(v) = \lambda_2 c_2^2 + \lambda_3 c_3^2 > 0$ pour tout vecteur non nul $v = c_2 v_2 + c_3 v_3$ de F_0, puisque $\lambda_2, \lambda_3 > 0$ et $c_2^2 + c_3^2 > 0$.

Si E est un plan vectoriel quelconque, il intersecte F_0 suivant une droite. On peut donc trouver un vecteur non nul v qui est dans E et aussi dans F_0, donc $\mathrm{Q}(v) > 0$.

2. Dans cette question on suppose seulement que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$*. On munit* $\mathbb{R}^3$ *du produit scalaire et de la norme euclidienne usuels. Pour tout vecteur* v *de norme un on désigne par* $v^\perp$ *le plan vectoriel orthogonal au vecteur* v *et on pose* $f(v) = \max\{\mathrm{Q}(w) : w \in v^\perp, \|w\| = 1\}$*. Montrer que* λ_2 *est le minimum de la fonction* f *sur la sphère unité* $\mathrm{S} = \{v = (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *(on pourra appliquer la question 1 aux matrices* $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}$ *pour* λ *convenable).*

Choisissons λ tel que $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. La matrice $\mathrm{A}_\lambda = \mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}$ est réelle symétrique, et elle a des valeurs propres $\mu_1 = \lambda_1 - \lambda < 0 < \mu_2 = \lambda_2 - \lambda < \mu_3 = \lambda_3 - \lambda$. Pour la forme quadratique Q_λ associée à la matrice A_λ on a si $w = (x_1, x_2, x_3)$ et $\|w\| = 1$

$$\mathrm{Q}_\lambda(w) = \sum_{i,j=1}^3 (a_{i,j} - \lambda \delta_{i,j}) x_i x_j = \mathrm{Q}(w) - \lambda \sum_{j=1}^3 x_j^2 = \mathrm{Q}(w) - \lambda.$$

D'après la question précédente appliquée à A_λ, il existe pour tout plan vectoriel $v^\perp$ un vecteur $w \in v^\perp$, qu'on peut choisir de norme un, tel que $\mathrm{Q}_\lambda(w) > 0$, donc $\mathrm{Q}(w) = \mathrm{Q}_\lambda(w) + \lambda > \lambda$. Ceci montre que $f(v) \geq \mathrm{Q}(w) > \lambda$, pour tout v. Il en résulte que

$$m = \inf\{f(v) : v \in \mathrm{S}\} \geq \lambda.$$

Comme ceci est vrai pour tout $\lambda < \lambda_2$ on en déduit que $m \geq \lambda_2$.

Inversement considérons le vecteur $v = v_3$ et le plan vectoriel $v^\perp = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Pour tout vecteur $w = c_1 v_1 + c_2 v_2 \in v^\perp$ de norme un on a

$$\mathrm{Q}(w) = \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 \leq \lambda_2 (c_1^2 + c_2^2) = \lambda_2 \|w\|^2 = \lambda_2$$

ce qui montre que $f(v_3) \leq \lambda_2$ et $\min_{v \in \mathrm{S}} f(v) = m \leq f(v_3) \leq \lambda_2$.