ANALYSE FONCTIONNELLE ET

THÉORIE SPECTRALE

MT404

Année 2001-2002

Version longue

Sommaire

Chapitre 0. Introduction 1

Chapitre 1. Espaces normés et applications linéaires continues 3

1.1. Normes, semi-normes ; espaces de Banach 3
1.2. Applications linéaires continues 8
1.3. Produits et quotients 11
1.4. Principe de prolongement. Complété d'un espace normé 13
1.5. Complexifié d'un espace normé réel 16
1.6. Dual d'un espace normé, application transposée 17
1.7. Parties totales. Séparabilité 18

Chapitre 2. Espaces de Hilbert 21

2.1. Produits scalaires 21
2.2. Espaces de Hilbert, orthogonalité, bases 23
2.3. Théorème de projection 28

Chapitre 3. Les espaces de Banach classiques 33

3.1. Espaces de fonctions continues ou intégrables 33
3.2. Résultats de densité 35
3.3. Hölder et dualité des espaces ℓ_p 37
3.4. Théorème de Radon-Nikodym et dual de L_p 40
3.5. Dual de C(K) 45
3.6. Séries de Fourier 47
3.7. Transformation de Fourier 49

Chapitre 4. Les théorèmes fondamentaux 53

4.1. Le théorème de Baire et ses conséquences 53
4.2. Théorème de Hahn-Banach 58
4.3. Bidual d'un espace normé. Espaces de Banach réflexifs 65
4.4. Théorème de Riesz 68

Chapitre 5. Topologies faibles 71

5.1. Topologies initiales 71
5.2. Topologie faible sur un espace normé 73
5.3. Suites faiblement convergentes 76

Chapitre 6. Opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert 81

6.1. Applications linéaires continues entre espaces de Hilbert 81
6.2. Familles sommables dans un espace de Banach 84
6.3. Bases hilbertiennes 87
6.4. L'espace hilbertien $\ell^2(\mathrm{I})$ 89

Chapitre 7. Algèbres de Banach et théorie spectrale 91

7.1. Algèbres de Banach, spectre et résolvante 91
7.2. Rayon spectral 95
7.3. Décomposition du spectre d'un opérateur borné 99

Chapitre 8. Quelques classes d'opérateurs 105
8.1. Compacité dans un espace de Banach 105
8.2. Applications linéaires compactes 107
8.3. Théorie spectrale des opérateurs compacts 111
8.4. Opérateurs de Hilbert-Schmidt 116
8.5. Opérateurs nucléaires 120
Chapitre 9. Calcul fonctionnel continu 123
9.1. Calcul fonctionnel polynomial 123
9.2. Calcul fonctionnel continu pour les opérateurs hermitiens 125
9.3. Application aux hermitiens positifs. La racine carrée 130
9.4. Le cas général : opérateurs normaux 133
Chapitre 10. Décomposition spectrale des opérateurs normaux 137
10.1. Opérateurs unitairement équivalents 137
10.2. Opérateurs de multiplication et spectre 138
10.3. Théorème de représentation. Décomposition spectrale 139
Chapitre 11. Opérateurs autoadjoints non bornés 145
11.1. Opérateurs non bornés 145
11.2. Spectre des opérateurs fermés 150
11.3. Transposés et adjoints 153
11.4. Théorème de représentation. Décomposition spectrale 156
11.5. Le théorème de Stone 160

0. Introduction

L'Analyse Fonctionnelle est née au début du 20ème siècle pour fournir un cadre abstrait et général à un certain nombre de problèmes, dont beaucoup sont issus de la physique, et où la question posée est la recherche d'une *fonction* vérifiant certaines propriétés, par exemple une équation aux dérivées partielles. La théorie moderne de l'intégration (Lebesgue, un peu après 1900) et la théorie des espaces de Hilbert se sont rejointes pour créer l'un des objets les plus importants, l'espace L_2 des fonctions de carré sommable, qui a permis en particulier de placer la théorie des séries de Fourier dans un cadre conceptuellement beaucoup plus clair et plus simple que celui qui était en vigueur à la fin du 19ème siècle.

Donnons ici un seul exemple, hyper-classique, celui du *problème de Dirichlet*. Etant donné un ouvert borné Ω du plan, et étant donnée une fonction continue f sur la frontière $\partial\Omega$, on veut trouver une fonction u définie sur le compact $\overline{\Omega}$, de classe C^2 dans Ω et qui vérifie

$$(D) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u = f \quad \text{sur la frontière} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

L'expression Δu désigne le *laplacien* de u,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

On savait depuis longtemps que si u_0 est solution du problème (D), la fonction u_0 minimise une certaine *fonctionnelle d'énergie* I, qui associe à chaque fonction u la quantité

$$\mathrm{I}(u) = \int_\Omega |\nabla u(x,y)|^2 \, dx \, dy,$$

le minimum étant calculé sur l'ensemble des fonctions u qui coïncident avec f au bord ; l'expression ∇u désigne le *gradient* de u, fonction vectorielle définie sur Ω dont les composantes sont les deux dérivées partielles premières de u, et $|\nabla u|^2$ est la fonction égale en chaque point $(x, y) \in \Omega$ au carré de la norme euclidienne du gradient de u au point (x, y). L'une des méthodes de l'Analyse Fonctionnelle consiste à introduire un espace de fonctions X adapté (ici : l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$; c'est un espace de Hilbert), et de développer des théorèmes abstraits d'existence de minimum pour des classes de fonctions définies sur X (analogue, disons, au théorème qui dit que toute fonction réelle continue définie sur un compact atteint son minimum). Le problème est que l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ et C^2 à l'intérieur n'est justement pas adapté à cette approche ; les bons espaces ne sont pas formés de fonctions vraiment dérivables. La deuxième partie de cette approche, qui ne sera pas du tout évoquée dans ce cours, consiste à montrer que sous certaines hypothèses, la solution trouvée dans l'espace généralisé X est bien une solution au sens classique.

La première partie du poly contient les éléments de base de l'Analyse Fonctionnelle : espaces normés et espaces de Banach, applications linéaires continues, dualité, topologies faibles, espaces de Hilbert.

La seconde partie concerne la théorie spectrale. En très gros, il s'agit de la généralisation au cadre infini-dimensionnel de la théorie de la diagonalisation. La notion fondamentale est la notion de *spectre* d'une application linéaire continue d'un espace de Banach dans lui-même. Le *calcul fonctionnel* sera l'occasion de mettre en action nombre d'objets vus en licence.

Ce polycopié provient en grande partie du polycopié de Georges Skandalis pour l'édition 1998-1999 du même enseignement. Je le remercie vivement de m'avoir transmis ses fichiers, ce qui m'a considérablement allégé la tâche. J'encourage très vivement les étudiants à lire de vrais et bons *livres* d'Analyse Fonctionnelle, par exemple ceux de Brézis, Reed et Simon, Rudin, qui sont indiqués dans la brochure de la maîtrise.

Quelques notations : si X est un ensemble, on note Id_{X} *l'application identité* de X, c'est à dire l'application de X dans X telle que $\mathrm{Id}_{\mathrm{X}}(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{X}$. Si A est un sous-ensemble de X, on notera A^c le complémentaire de A. On notera $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ la *fonction indicatrice* de A, qui est égale à 1 en tout point de A et à 0 en tout point de A^c. Si f est une fonction réelle définie sur l'ensemble X, il est parfois rapide et agréable d'utiliser la notation des probabilistes $\{f > t\} = \{x \in \mathrm{X} : f(x) > t\}$. De temps en temps on notera 0_{X} le vecteur nul d'un espace vectoriel X, quand il semblera que cette notation lourde lève toute ambiguïté. La plupart des points du cours sont numérotés, par chapitre-section-type, par exemple le "théorème 2.3.4" serait le quatrième énoncé (théorème, proposition, lemme, corollaire) de la section 3 du chapitre 2 ; à l'intérieur de cette section, le théorème sera appelé "théorème 4", ailleurs dans le chapitre 2 il sera désigné par "théorème 3.4" et dans un autre chapitre "théorème 2.3.4". Les passages écrits en petits caractères contiennent des informations qui peuvent être omises en première lecture. Le poly se termine par un index terminologique et un index des notations.

Depuis deux ans, j'ai fait une tentative pour utiliser les "nouvelles technologies" en plaçant un certain nombre d'informations sur un site Web,

`http://www.math.jussieu.fr/~maurey/ths.html`

en particulier le texte de ce poly, des résumés de cours, etc... Je suis toujours content de recevoir des suggestions constructives pour améliorer l'efficacité de cet outil.

B. Maurey

Chapitre 1. Espaces normés et applications linéaires continues

1.1. Normes, semi-normes ; espaces de Banach

On note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les espaces vectoriels considérés dans ce cours seront toujours des espaces vectoriels réels ou complexes.

Définition 1.1.1. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$; on appelle *semi-norme* sur X une application $p : \mathrm{X} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $x \in \mathrm{X}$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$;

(ii) pour tous $x, y \in \mathrm{X}$, on a $p(x+y) \le p(x) + p(y)$.

Si pour tout vecteur x non nul de X on a $p(x) > 0$, on dit que p est une *norme* sur X.

La propriété $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ s'appelle *l'inégalité triangulaire* pour la semi-norme p. De l'inégalité triangulaire ci-dessus, on peut déduire une deuxième forme : on a $p(x) = p\big((x-y)+y\big) \le p(x-y) + p(y)$, donc $p(x) - p(y) \le p(x-y)$; en échangeant les rôles de x et y et en utilisant $p(x-y) = p(y-x)$ on trouve :

Lemme 1.1.1. *Si p est une semi-norme sur X, on a $|p(x) - p(y)| \le p(x-y)$ pour tous vecteurs $x, y \in \mathrm{X}$.*

Il est facile de vérifier que cette deuxième forme de l'inégalité triangulaire implique la première forme (ii).

Rappelons qu'un sous-ensemble C d'un espace vectoriel X est dit *convexe* si pour tout couple (x, y) d'éléments de C, le *segment* $[x, y]$ est tout entier contenu dans C ; le segment $[x, y]$ est formé des *combinaisons convexes* des deux points x et y, c'est à dire tous les points de la forme $z = (1-t)x + ty$, où t varie dans $[0, 1]$. Plus généralement, une combinaison convexe d'éléments d'un sous-ensemble $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ est un vecteur z de la forme $z = \sum \lambda_\alpha x_\alpha$, où la somme est finie, $\lambda_\alpha \ge 0$ pour chaque α et $\sum \lambda_\alpha = 1$. L'ensemble de toutes les combinaisons convexes d'éléments de A est un ensemble convexe appelé *l'enveloppe convexe* de A, noté $\mathrm{co}(\mathrm{A})$. C'est aussi le plus petit ensemble convexe contenant A, c'est à dire l'intersection de tous les ensembles convexes qui contiennent A.

Une fonction réelle f définie sur un sous-ensemble convexe C de X est dite *fonction convexe sur* C si

$$f((1-t)x + ty) \le (1-t)\, f(x) + t\, f(y)$$

pour tous $x, y \in \mathrm{C}$ et tout $t \in [0, 1]$. On dira qu'une fonction réelle q sur X est *positivement homogène* si elle vérifie que $q(\mu x) = \mu\, q(x)$ pour tout $x \in \mathrm{X}$ et tout nombre réel $\mu \ge 0$. Si q est positivement homogène et *sous-additive*, c'est à dire que $q(x+y) \le q(x) + q(y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{X}$, alors q est une fonction convexe sur X, puisqu'on aura alors

$$q((1-t)x + ty) \le q((1-t)x) + q(ty) = (1-t)q(x) + tq(y).$$

En particulier, les semi-normes sur X sont des fonctions convexes. Lorsque f est une fonction convexe définie sur un ensemble convexe $\mathrm{C} \subset \mathrm{X}$, les ensembles de la forme $\mathrm{C}_t = \{x \in \mathrm{C} : f(x) \le t\}$ sont des ensembles convexes, pour tout t réel (la réciproque n'est pas vraie).

Lemme 1.1.2. *Soient* X *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *et* q *une fonction* **à valeurs** ≥ 0 *et positivement homogène sur* X *; pour que* q *soit sous-additive sur* X, *il faut et il suffit que l'ensemble*

$$\mathrm{C}_q = \{x \in \mathrm{X} : q(x) \leq 1\}$$

soit convexe.

Démonstration. Si q est positivement homogène et sous-additive, on a vu que q est une fonction convexe, ce qui implique que C_q est convexe. Inversement, supposons que C_q soit convexe, et déduisons la sous-additivité de q ; soient x et y deux vecteurs de X, et supposons que $a > q(x)$ et $b > q(y)$; considérons les deux vecteurs de C_q définis par $x_1 = a^{-1}x$ et $y_1 = b^{-1}y$, puis formons la combinaison convexe

$$z = \frac{a}{a+b}\, x_1 + \frac{b}{a+b}\, y_1,$$

qui est dans C_q d'après l'hypothèse de convexité, c'est à dire que $q(z) \leq 1$. Mais on vérifie immédiatement que $z = (a+b)^{-1}(x+y)$, et l'homogénéité de q transforme alors l'inégalité $q(z) \leq 1$ en $q(x+y) \leq a+b$. En faisant tendre a vers $q(x)$ et b vers $q(y)$ on obtient $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$.

//

Corollaire 1.1.3. *Pour que la fonction* $p \geq 0$ *soit une semi-norme sur l'espace vectoriel* X, *il faut et il suffit que* $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ *pour tout scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et pour tout vecteur* $x \in \mathrm{X}$ *et que l'ensemble* $\{x \in \mathrm{X} : p(x) \leq 1\}$ *soit convexe.*

Exemple 1.1.2. Pour $1 \leq r < +\infty$, soit $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions f complexes définies sur $[0,1]$ telles que f soit mesurable et $\int_0^1 |f(s)|^r\, ds < +\infty$; la quantité

$$p(f) = \Bigl(\int_0^1 |f(s)|^r\, ds\Bigr)^{1/r}$$

est une semi-norme sur $\mathcal{L}_r$;

pour le vérifier, on voit d'abord que $p(\lambda f) = |\lambda|\, p(f)$ (facile), puis on montre que l'ensemble $\{f \in \mathcal{L}_r : p(f) \leq 1\}$ est convexe. Cela provient de la convexité sur $[0, +\infty[$ de la fonction $u \to u^r$; on a alors si f, g sont deux éléments de $\mathcal{L}_r$ tels que $p(f) \leq 1$, $p(g) \leq 1$ et si $0 \leq t \leq 1$,

$$|(1-t)f(s) + tg(s)|^r \leq \bigl((1-t)|f(s)| + t|g(s)|\bigr)^r \leq (1-t)|f(s)|^r + t|g(s)|^r$$

pour tout $s \in [0,1]$, donc

$$\int_0^1 \bigl|(1-t)f(s) + tg(s)\bigr|^r\, ds \leq (1-t)\int_0^1 |f(s)|^r\, ds + t\int_0^1 |g(s)|^r\, ds \leq (1-t) + t = 1.$$

On appelle *espace normé* un espace vectoriel X muni d'une norme p. Si (X, p) est un espace normé, nous en ferons un *espace métrique* en définissant la distance d sur X par $d(x,y) = p(x-y)$, et nous munirons X de la topologie associée à cette métrique, que nous appellerons *topologie de la norme*. Soient $x \in \mathrm{X}$ et $r > 0$; on appelle *boule ouverte* de centre x et de rayon r le sous-ensemble $\mathrm{B}_p(x,r) = \{y \in \mathrm{X} : p(y-x) < r\}$ de X. Quand il n'y aura pas d'ambiguïté sur la norme considérée, on notera ces boules simplement $\mathrm{B}(x,r)$. Rappelons que dans la topologie de la norme sur X, les parties ouvertes sont les réunions de boules ouvertes ; une partie U de X est un voisinage de $x \in \mathrm{X}$ si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{U}$. Dans un espace vectoriel normé, la *boule fermée* de centre x et de rayon $r > 0$, qui est l'ensemble $\{y \in \mathrm{X} : p(y-x) \le r\}$, est bien égale à l'adhérence de la boule ouverte $\mathrm{B}_p(x,r)$ (ça n'est pas toujours vrai dans un espace métrique général) ; on pourra donc la noter $\overline{\mathrm{B}}_p(x,r)$. Par convention, la *boule unité* d'un espace normé X sera la boule *fermée* de centre 0_{X} et de rayon 1 ; on la notera B_{X}.

Proposition 1.1.4. *Soit* (X,p) *un espace normé ; l'application* $p : \mathrm{X} \to \mathbb{R}_+$ *est continue pour la topologie de la norme.*

Cela résulte immédiatement du lemme 1. En effet, si la suite $(x_n) \subset \mathrm{X}$ tend vers y, on aura

$$|p(x_n) - p(y)| \le p(x_n - y) = d(x_n, y) \to 0.$$

En général, nous noterons $\|x\|$ la norme d'un vecteur x d'un espace normé X, ou bien $\|x\|_{\mathrm{X}}$ s'il y a un risque de confusion ; parfois il sera encore commode de désigner la fonction norme par un symbole littéral, comme dans la notation (X,p) utilisée jusqu'ici.

La topologie et la structure d'espace vectoriel d'un espace normé sont compatibles, autrement dit, un espace normé est un espace vectoriel topologique au sens suivant :

Définition 1.1.3. Un *espace vectoriel topologique* est un espace vectoriel X sur $\mathbb{K}$ muni d'une topologie pour laquelle les deux applications $(x,y) \to x+y$ de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ dans X et $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $\mathbb{K} \times \mathrm{X}$ dans X sont continues.

Proposition 1.1.5. *Un espace normé, muni de la topologie de la norme, est un espace vectoriel topologique.*

Démonstration. Soit X un espace normé ; démontrons la continuité de l'application $(x,y) \to x+y$. Puisque la topologie provient d'une métrique, nous pouvons utiliser des suites convergentes. Soient donc (x_n) une suite qui converge vers x et (y_n) une suite qui converge vers y ; on aura

$$d(x_n + y_n, x+y) = \|x_n + y_n - x - y\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$$

qui tend bien vers 0. La continuité de l'application $(\lambda, x) \to \lambda\, x$ se démontre de façon analogue : si (λ_n) converge vers $\lambda \in \mathbb{K}$ et si (x_n) converge vers $x \in \mathrm{X}$, on écrira

$$d(\lambda_n x_n, \lambda\, x) \le d(\lambda_n x_n, \lambda_n x) + d(\lambda_n x, \lambda\, x) = |\lambda_n|\, \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda|\, \|x\|$$

qui tend vers 0 (noter que la suite (λ_n) est bornée puisqu'elle est convergente).

//

Exercice 1.1.4. Si C est un sous-ensemble convexe d'un espace normé X, montrer que son adhérence est convexe. Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

Si C est convexe, si $x \in \mathrm{C}$ et si y est dans l'intérieur (topologique) de C, montrer que le segment semi-ouvert $]x,y]$ est contenu dans l'intérieur de C.

Définition 1.1.5. Un *espace de Banach* est un espace vectoriel normé, complet pour la distance associée à la norme.

Si F est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach E, il est lui aussi complet pour la norme induite par celle de E, donc F est un espace de Banach.

Exemples 1.1.6.

1. L'espace $\mathrm{C}([0,1])$ (réel ou complexe) des fonctions scalaires continues sur $[0,1]$, muni de la *norme uniforme*,

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|,$$

est un espace de Banach. Le fait qu'il soit complet est une traduction du théorème selon lequel une limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue.

2. Pour $1 \le p < +\infty$, l'espace $\mathrm{L}_p = \mathrm{L}_p([0,1])$ des *classes de fonctions* f complexes sur $[0,1]$ telles que f soit mesurable et $\int_0^1 |f(s)|^p\,ds < +\infty$ est normé par

$$\|f\|_p = \Bigl(\int_0^1 |f(s)|^p\,ds\Bigr)^{1/p}.$$

On a déjà vu que $f \to \|f\|_p$ est une semi-norme. Si $\|f\|_p = 0$ et si $f_1 \in \mathcal{L}_p$ est un représentant quelconque de f, on a $\int_0^1 |f_1(s)|^p\,ds = 0$. Comme la fonction $|f_1|^p$ est ≥ 0, cela entraîne que $f_1 = 0$ presque partout, donc f est la classe nulle, c'est à dire que $f = 0_{\mathrm{L}_p}$. On a ainsi montré que $f \to \|f\|_p$ est une norme sur L_p.

Cet espace L_p est de plus complet (voir le chapitre 3).

3. De façon analogue, on désigne par $\ell_p = \ell_p(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites scalaires $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum |x_n|^p < +\infty$. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|x\|_p = \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p\Bigr)^{1/p}.$$

L'espace ℓ_∞ est l'espace des suites scalaires $x = (x_n)$ bornées, normé par

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

L'espace ℓ_∞ est complet pour cette norme. L'espace c_0 est l'espace des suites scalaires (x_n) telles que $\lim x_n = 0$. C'est un sous-espace fermé de ℓ_∞, donc un espace de Banach.

Séries de vecteurs

Une série de vecteurs $\sum u_k$ dans un espace normé X est dite *convergente dans* X si la suite des sommes partielles (U_n) est convergente dans X, où la somme partielle U_n est définie pour tout $n \ge 0$ par

$$\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \in \mathrm{X}.$$

Si la série converge dans X, la *somme de la série* est un vecteur de X, qui est la limite de la suite (U_n), et on note

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_n \mathrm{U}_n \in \mathrm{X}.$$

Il faut bien comprendre que la notion de somme de la série n'a aucun sens si on ne mentionne pas la topologie qui a été utilisée pour définir la notion de limite.

Un cas particulier est celui des séries $\sum u_k$ telles que $\sum \|u_k\| < +\infty$, que l'on peut appeler *absolument convergentes* ou bien *normalement convergentes*.

Sous la condition $\sum \|u_k\| < +\infty$, le reste de la série des normes

$$r_n = \sum_{k>n} \|u_k\|$$

est une suite numérique qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$, et on peut écrire pour tous $\ell, m \ge n$, en supposant $\ell < m$ pour fixer les idées

$$\mathrm{U}_m - \mathrm{U}_\ell = u_{\ell+1} + \cdots + u_m,$$
$$\|\mathrm{U}_m - \mathrm{U}_\ell\| \le \|u_{\ell+1}\| + \cdots + \|u_m\| \le \sum_{k>n} \|u_k\| = r_n,$$

ce qui montre que la suite (U_n) est alors de Cauchy.

Quand X est complet, la condition $\sum \|u_k\| < +\infty$ garantit donc la convergence dans X de la série $\sum u_k$. En fait, on a

Proposition 1.1.6. *Soit* X *un espace normé ; pour que* X *soit complet, il faut et il suffit que : pour toute série* $\sum u_k$ *de vecteurs de* X, *la condition* $\sum \|u_k\| < +\infty$ *entraîne que la série* $\sum u_k$ *est convergente dans* X.

Démonstration. On a déjà vu que si X est complet, les séries absolument convergentes sont convergentes dans X ; montrons la réciproque : soit (x_n) une suite de Cauchy de vecteurs de X ; pour tout entier $k \ge 0$, on peut trouver un entier N_k tel que $\|x_m - x_n\| < 2^{-k}$ pour tous entiers $m, n \ge \mathrm{N}_k$, et on peut supposer que $\mathrm{N}_{k+1} > \mathrm{N}_k$. Posons alors $u_0 = x_{\mathrm{N}_0}$ et

$$u_{k+1} = x_{\mathrm{N}_{k+1}} - x_{\mathrm{N}_k}$$

pour tout $k \ge 0$. Par construction, on a $\|u_{k+1}\| < 2^{-k}$, donc $\sum \|u_k\| < +\infty$, et la série $\sum u_k$ converge dans X d'après l'hypothèse. Mais les sommes partielles (U_k) de cette série sont égales aux vecteurs (x_{N_k}), donc la sous-suite (x_{N_k}) converge vers le vecteur $\mathrm{U} \in \mathrm{X}$ somme de la série $\sum u_k$. Puisque la suite (x_n) est de Cauchy, on en déduit facilement que la suite entière (x_n) converge vers U, donc X est complet.

//

Notons que lorsque la série $\sum u_k$ converge dans X, on a l'inégalité

$$\Big\| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \Big\| \le \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|,$$

en convenant que la somme de la série des normes vaut $+\infty$ lorsqu'elle est divergente. Cette inégalité est obtenue en passant à la limite dans la suite des inégalités triangulaires $\| \sum_{k=0}^n u_k\| \le \sum_{k=0}^n \|u_k\|$.

Exemple 1.1.7. Pour tout $n \ge 0$, désignons par $\mathbf{e}_n$ le vecteur de ℓ_p, ou de c_0, dont les coordonnées sont $\mathbf{e}_{n,i} = 0$ si $i \ne n$ et $\mathbf{e}_{n,n} = 1$. On appellera $(\mathbf{e}_n)_{n\ge0}$ la *suite canonique*. Soit $x = (x_n)$ un élément de c_0 ; le vecteur x est la somme (dans l'espace normé c_0) de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbf{e}_k$ (petit exercice pour le lecteur ; le même résultat vaut pour tous les espaces ℓ_p avec $p < +\infty$).

Remarque 1.1.8.

Certains espaces importants tels que l'espace $C^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, ou bien l'espace produit $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, n'admettent pas de norme satisfaisante, c'est à dire de norme qui définisse la topologie que l'on estime être la bonne sur l'espace considéré (la topologie produit, dans le cas de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$). Dans les bons cas, on peut tout de même définir sur un espace vectoriel X une distance qui garde certaines des bonnes propriétés des distances déduites d'une norme, à savoir :

(*i*) pour tous $x, y, v \in X$, on a $d(x+v, y+v) = d(x,y)$ (invariance par translation) ;
(*ii*) pour tout $x \in X$, on a $d(\lambda x, 0) \le d(x, 0)$ si $|\lambda| \le 1$;
(*iii*) pour chaque vecteur $x \in X$, on a $\lim_{\lambda \to 0} d(\lambda x, 0) = 0$

(et bien entendu on garde les propriétés usuelles des distances, en particulier l'inégalité triangulaire). Muni de la topologie associée à une telle distance, l'espace reste un espace vectoriel topologique (exercice).

C'est le cas pour l'espace C^∞. Pour tout entier $n \ge 1$, on peut considérer la semi-norme p_n qui contrôle le caractère C^n de la fonction f sur l'intervalle $[-n, n]$,

$$p_n(f) = \max\{|f^{(k)}(s)| : 0 \le k \le n,\ |s| \le n\}.$$

On pose ensuite

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \min(p_n(f-g), 2^{-n}).$$

L'espace C^∞ est alors complet pour cette distance. On dit que c'est un *espace de Fréchet*. De même, on pourra définir sur $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ la distance

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \min(|x_n - y_n|, 2^{-n})$$

où $x = (x_n)_{n \ge 0}$ et $y = (y_n)_{n \ge 0}$ sont deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

Un autre exemple est l'espace L_0 des (classes) de fonctions mesurables. Supposons que $\mu(\Omega) = 1$ pour simplifier. On peut définir une distance pour la convergence en mesure en posant par exemple

$$d(f,g) = \int_\Omega \min(1, |f(s) - g(s)|)\, d\mu(s).$$

L'espace L_0 est complet pour cette distance.

1.2. Applications linéaires continues

Théorème 1.2.1. *Soient* X *et* Y *deux espaces normés et* $T : X \to Y$ *une application linéaire ; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *l'application* T *est continue sur* X *;*
(*ii*) *l'application* T *est continue au point* 0_X *;*
(*iii*) *il existe un nombre* $M \ge 0$ *tel que, pour tout* $x \in X$ *on ait*

$$\|T(x)\|_Y \le M\, \|x\|_X.$$

Démonstration. Il est clair que (*i*) ⇒ (*ii*). Si T est continue en 0, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $u \in X$, la condition $d_X(u, 0) \le \delta$ implique $d_Y(T(u), T(0)) \le 1$; autrement dit, $\|u\|_X \le \delta$ implique $\|T(u)\|_Y \le 1$. Etant donné un vecteur x non nul quelconque dans X, le vecteur $u = \delta\, \|x\|_X^{-1} x$ vérifie $\|u\|_X \le \delta$, donc $\|T(u)\|_Y \le 1$, ce qui revient à dire que $\|T(x)\|_Y \le \delta^{-1}\, \|x\|_X$. On a ainsi montré que (*iii*) est vraie, avec $\mathrm{M} = \delta^{-1}$. Enfin, supposons (*iii*) vérifiée ; si une suite (x_n) de X tend vers un vecteur $x \in \mathrm{X}$, on aura

$$d(\mathrm{T}(x_n), \mathrm{T}(x)) = \|\mathrm{T}(x_n) - \mathrm{T}(x)\|_{\mathrm{Y}} = \|\mathrm{T}(x_n - x)\|_{\mathrm{Y}} \le \mathrm{M}\, \|x_n - x\|_{\mathrm{X}} \to 0,$$

ce qui montre que T est continue au point x, et ceci pour tout $x \in \mathrm{X}$.

//

Soient p et q deux semi-normes sur un espace vectoriel X ; on dit que p et q sont *équivalentes* s'il existe deux nombres réels $m > 0$ et $\mathrm{M} \ge 0$ tels que $m\,p \le q \le \mathrm{M}\,p$.

Corollaire 1.2.2. *Deux normes p et q sur un espace vectoriel* X *définissent la même topologie si et seulement si elles sont équivalentes.*

Démonstration. On utilise l'équivalence (*i*) $\iff$ (*iii*) du théorème 1, appliquée à l'identité de X vue comme application de (X, p) dans (X, q), puis de (X, q) dans (X, p).

//

Soient X et Y deux espaces normés et S, T deux applications linéaires continues de X dans Y ; on sait que l'application $\mathrm{S}+\mathrm{T}$, qui associe à tout $x \in \mathrm{X}$ l'image $\mathrm{S}(x)+\mathrm{T}(x) \in \mathrm{Y}$, est linéaire. Vérifions rapidement sa continuité en 0 : si (x_n) tend vers 0 dans X, alors $(\mathrm{S}(x_n))$ et $(\mathrm{T}(x_n))$ tendent vers 0 dans Y donc $(\mathrm{S} + \mathrm{T})(x_n) = \mathrm{S}(x_n) + \mathrm{T}(x_n)$ tend vers 0 par la propriété d'espace vectoriel topologique.

L'ensemble des applications linéaires continues de X dans Y est donc un sous-espace vectoriel, noté $\mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, de l'espace des applications linéaires de X dans Y. On appelle aussi *opérateur borné* une application linéaire continue entre deux espaces normés. Dans le cas où $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$, on note simplement $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ l'espace des endomorphismes continus de X.

Soit $\mathrm{T} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application linéaire continue ; d'après le théorème 1, il existe une constante M telle que $\|\mathrm{T}(x)\|_{\mathrm{Y}} \le \mathrm{M}$ pour tout vecteur x de X tel que $\|x\|_{\mathrm{X}} \le 1$. On peut donc considérer la quantité (finie)

$$\|\mathrm{T}\| = \|\mathrm{T}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})} = \sup\{\|\mathrm{T}(x)\|_{\mathrm{Y}} : \|x\|_{\mathrm{X}} \le 1\}$$

qui s'appelle la *norme de l'application linéaire* T.

Si x est un vecteur non nul de X, le vecteur $z = \|x\|_{\mathrm{X}}^{-1} x$ vérifie $\|z\|_{\mathrm{X}} \le 1$, donc $\|\mathrm{T}(z)\|_{\mathrm{Y}} \le \|\mathrm{T}\|$, d'où par homogénéité $\|x\|^{-1}\|\mathrm{T}(x)\| \le \|\mathrm{T}\|$, ou encore

$$\|\mathrm{T}(x)\|_{\mathrm{Y}} \le \|\mathrm{T}\|\, \|x\|_{\mathrm{X}};$$

si x est le vecteur nul, la relation ci-dessus est encore vraie, elle est donc vraie pour tout vecteur $x \in \mathrm{X}$.

Résumons ce qui vient d'être dit.

Proposition 1.2.3. *Soient* X *et* Y *deux espaces normés et* $\mathrm{T} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *une application linéaire continue ; on pose*

$$\|\mathrm{T}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})} = \sup\{\|\mathrm{T}(x)\|_{\mathrm{Y}} : \|x\|_{\mathrm{X}} \le 1\}.$$

Pour tout $x \in \mathrm{X}$, on a

$$\|\mathrm{T}(x)\|_{\mathrm{Y}} \le \|\mathrm{T}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}\, \|x\|_{\mathrm{X}}.$$

La constante $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ *est le plus petit nombre* M *tel que l'inégalité* $\|T(x)\|_Y \le M\,\|x\|_X$ *soit vraie pour tout* $x \in X$. *L'application* $T \to \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ *est une norme sur* $\mathcal{L}(X, Y)$.

Démonstration. Vérifions que $T \to \|T\|$ est une norme. Il est d'abord évident que $\|T\| = 0$ implique que $\|T(x)\| = 0$ pour tout $x \in X$, c'est à dire $T(x) = 0_Y$ pour tout $x \in X$ puisque Y est normé, donc T est l'application nulle. Montrons ensuite que $T \to \|T\|$ est une semi-norme ; il est facile de vérifier que $\|\lambda T\| = |\lambda|\,\|T\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$; ensuite, pour tout $x \in X$,

$$\|(S + T)(x)\| = \|S(x) + T(x)\| \le \|S(x)\| + \|T(x)\| \le \big(\|S\| + \|T\|\big)\,\|x\|,$$

d'où l'inégalité $\|S + T\| \le \|S\| + \|T\|$.

//

Exemples 1.2.1.

1. Si X est un espace normé non nul, on a toujours $\|\,\mathrm{Id}_X\,\| = 1$.

2. Soit $f \in C([0, 1])$ fixée ; on définit un endomorphisme M_f de $C([0, 1])$, l'application de multiplication par f, en posant $M_f(g) = fg$ pour toute $g \in C([0, 1])$. On montre que $\|M_f\| = \|f\|_\infty$.

Il est clair que $\|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty\,\|g\|_\infty$ pour toute fonction g, donc $\|M_f\| \le \|f\|_\infty$. Inversement, considérons la fonction constante $g_0 = 1$. On a $\|g_0\|_\infty = 1$ et $M_f(g_0) = f$, donc

$$\|f\|_\infty = \|M_f(g_0)\|_\infty \le \|M_f\|\,\|g_0\|_\infty = \|M_f\|$$

d'où $\|M_f\| = \|f\|_\infty$.

Il est en général très difficile de calculer exactement la norme d'une application linéaire continue. A titre d'anecdote, on sait depuis environ 1920 que la transformée de Fourier définit un opérateur borné T_p de $L_p(\mathbb{R})$ dans $L_q(\mathbb{R})$ lorsque $1 < p < 2$ et $1/p + 1/q = 1$, mais la valeur exacte de la norme n'a été déterminée que 50 ans plus tard !

La proposition suivante est facile mais importante.

Proposition 1.2.4. *Soient* X, Y *et* Z *des espaces normés,* $S : X \to Y$ *et* $T : Y \to Z$ *des applications linéaires continues ; on a*

$$\|T \circ S\| \le \|S\|\,\|T\|.$$

Démonstration. Soit x un vecteur de X ; on peut écrire

$$\|(T \circ S)(x)\|_Z = \|T(S(x))\|_Z \le \|T\|\,\|S(x)\|_Y \le \|T\|\,\|S\|\,\|x\|_X,$$

ce qui entraîne l'inégalité voulue.

//

Proposition 1.2.5. *Soient* X *et* Y *deux espaces normés ; si* Y *est un espace de Banach, l'espace* $\mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. Supposons que Y soit un espace de Banach. Soit $\sum u_k$ une série normalement convergente dans $\mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$, c'est à dire que $\sum \|u_k\| < +\infty$; pour tout vecteur $x \in \mathrm{X}$, on a $\|u_k(x)\| \le \|u_k\|\,\|x\|$, donc la série $\sum u_k(x)$ est normalement convergente dans Y. Puisque Y est complet, cette série converge dans Y et on peut poser pour tout $x \in \mathrm{X}$

$$\mathrm{U}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \in \mathrm{Y}.$$

Il est facile de vérifier que l'application U ainsi définie de X dans Y est linéaire, et de plus pour tout $x \in \mathrm{X}$ on a $\|\mathrm{U}(x)\| \le \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k(x)\| \le \big(\sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|\big)\,\|x\|$, ce qui montre que U est continue et

$$(*) \qquad \|\mathrm{U}\| \le \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|.$$

Il reste à voir que U est la limite dans $\mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ de la suite (U_n) des sommes partielles. On a

$$(\mathrm{U} - \mathrm{U}_n)(x) = \sum_{j>n} u_j(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(x)$$

où on a posé $v_k = u_{n+k+1}$ pour tout $k \ge 0$; en appliquant l'inégalité $(*)$ à la série $\sum v_k$ on obtient $\|\mathrm{U} - \mathrm{U}_n\| \le \sum_{k=0}^{+\infty} \|v_k\| = \sum_{k>n} \|u_k\|$, et cette quantité tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

//

Image d'une série convergente. Soit $\sum u_k$ une série convergente de vecteurs dans l'espace normé X et soit $\mathrm{T} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application linéaire continue ; alors la série $\sum \mathrm{T}(u_k)$ converge dans Y et

$$\mathrm{T}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{T}(u_k).$$

Démonstration. La suite des sommes partielles $\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge dans X vers la somme U de la série, on a $\mathrm{T}(\mathrm{U}_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{T}(u_k)$ par linéarité de T, et $\mathrm{T}(\mathrm{U}_n)$ tend vers l'image $\mathrm{T}(\mathrm{U})$ de U, par la continuité de T.

//

1.3. Produits et quotients

Proposition 1.3.1. *Soient* X *et* Y *deux espaces normés ; il existe une norme sur* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *qui définit la topologie produit.*

Démonstration. Notons $\mathrm{N} : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathbb{R}$ l'application $(x, y) \to \|x\|_{\mathrm{X}} + \|y\|_{\mathrm{Y}}$. Il est clair que N est une norme, et que pour toute suite (x_n, y_n) dans $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, la quantité $\mathrm{N}(x_n, y_n)$ tend vers 0 si et seulement si $\|x_n\| \to 0$ **et** $\|y_n\| \to 0$, c'est à dire si et seulement si (x_n) tend vers 0 dans X et (y_n) tend vers 0 dans Y, ce qui équivaut à dire que (x_n, y_n) tend vers $(0, 0)$ pour la topologie produit.

//

Remarquons que la norme N décrite dans la démonstration ci-dessus n'est pas l'unique norme définissant la topologie produit : n'importe quelle norme équivalente convient. Plusieurs normes équivalentes sont tout aussi naturelles que N. Par exemple la norme $(x, y) \to \max(\|x\|, \|y\|)$ ou la norme $(x, y) \to (\|x\|^r + \|y\|^r)^{1/r}$, pour $r > 1$. On dit qu'un espace vectoriel topologique X est *normable* s'il existe une norme sur X qui définisse la topologie de X ; l'énoncé raisonnable pour ce qui précède est que $X \times Y$ est normable quand X et Y sont normables.

Remarque 1.3.1. On vérifie sans peine que $X \times Y$ est un espace de Banach si et seulement si X et Y sont des espaces de Banach.

Soient X un espace vectoriel et Y un sous-espace de X ; rappelons que X/Y est le quotient de X pour la relation d'équivalence R_Y telle que $x \, R_Y \, y \iff y - x \in Y$. Le quotient X/Y est muni de l'unique structure d'espace vectoriel pour laquelle l'application quotient $X \to X/Y$ est linéaire. La classe de 0_X est égale à Y, et c'est le vecteur nul de l'espace quotient X/Y ; les autres classes sont les translatés de Y (ce sont les sous-espaces affines $Y + x$, parallèles à Y).

Proposition 1.3.2. *Soient* X *un espace normé et* Y *un sous-espace vectoriel fermé de* X *; notons* $\pi : X \to X/Y$ *l'application quotient. La fonction* $q : X/Y \to \mathbb{R}_+$ *définie par*

$$\forall \xi \in X/Y, \quad q(\xi) = \inf\{\|x\| : x \in X, \, \pi(x) = \xi\}$$

est une norme sur X/Y.

Démonstration. Supposons que $q(\xi) = 0$ et montrons que ξ est la classe nulle dans X/Y, c'est à dire la classe d'équivalence égale au sous-espace Y ; c'est ici que l'hypothèse Y fermé est cruciale : dire que $q(\xi) = 0$ signifie qu'il existe des vecteurs x_n tels que $\pi(x_n) = \xi$ et tels que $\|x_n\| \to 0$. Si $y \in \xi$, la suite $(y - x_n)$ est dans la classe de 0, c'est à dire dans Y, et converge vers y ; il en résulte que $y \in Y$ puisque Y est fermé, donc $\xi \subset Y$ ce qui implique en fait $\xi = Y = 0_{X/Y}$.

Montrons que q est une semi-norme. Il est clair que $q(\lambda\xi) = |\lambda| \, q(\xi)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $\xi \in X/Y$. Soient $\xi, \xi' \in X/Y$ et $\varepsilon > 0$; on peut trouver $x, x' \in X$ tels que $\pi(x) = \xi$, $\pi(x') = \xi'$ et $\|x\| \le q(\xi) + \varepsilon$, $\|x'\| \le q(\xi') + \varepsilon$; on a

$$q(\xi + \xi') \le \|x + x'\| \le \|x\| + \|x'\| \le q(\xi) + q(\xi') + 2\varepsilon,$$

d'où $q(\xi + \xi') \le q(\xi) + q(\xi')$ en faisant tendre ε vers 0.

//

Notons que la distance $d(\xi, \eta)$ de deux classes de X/Y est simplement la distance naturelle des sous-ensembles ξ et η de X, c'est à dire l'inf de $d(x, y)$, lorsque x varie dans ξ et y dans η. Notons aussi que la projection π vérifie $\|\pi\| \le 1$; on a même en général $\|\pi\| = 1$, sauf si $X/Y = \{0\}$, c'est à dire si $Y = X$ (on suppose toujours Y fermé). Notons encore que l'image par π de la boule unité ouverte $B_X(0, 1)$ de X est exactement la boule unité ouverte du quotient X/Y (l'énoncé correspondant pour la boule unité fermée n'est pas vrai en général).

Proposition 1.3.3. *Soient* X, Z *deux espaces normés,* Y *un sous-espace fermé de* X *et* $g \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Z})$ *nulle sur* Y *; il existe une unique* $h \in \mathcal{L}(\mathrm{X}/\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ *telle que* $g = h \circ \pi$ *(où* $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathrm{Y}$ *est l'application quotient) ; on a* $\|h\| = \|g\|$.

Démonstration. Soit $\xi \in \mathrm{X}/\mathrm{Y}$; on va vérifier que tous les vecteurs x de la classe ξ ont la même image z dans Z, ce qui permettra de poser $h(\xi) = z = g(x)$: si $x, x' \in \mathrm{X}$ sont dans la classe ξ, alors $x - x' \in \mathrm{Y} \subset \ker \pi$, donc $g(x - x') = 0$, soit $g(x) = g(x')$. Donc $g(x)$ ne dépend pas du choix du représentant x de la classe ξ ; notons le $h(\xi)$. Il est clair que h est linéaire, et par construction on a $g = h \circ \pi$. Comme π est surjective, il est clair que h est unique.

Notons q la norme quotient de X/Y. Pour $\xi \in \mathrm{X}/\mathrm{Y}$ et pour tout x tel que $\pi(x) = \xi$, on a

$$\|h(\xi)\| = \|g(x)\| \leq \|g\| \, \|x\|.$$

Cela étant vrai pour tout x dans la classe ξ, on a $\|h(\xi)\| \leq \|g\| \, q(\xi)$. Donc h est continue et $\|h\| \leq \|g\|$. Enfin, $\|g\| = \|h \circ \pi\| \leq \|h\| \, \|\pi\| \leq \|h\|$, puisque $\|\pi\| \leq 1$, et on a bien $\|h\| = \|g\|$.

//

Proposition 1.3.4. *Soient* X *un espace de Banach et* Y *un sous-espace fermé ; alors* X/Y *est un espace de Banach.*

Démonstration. On va utiliser le critère de la proposition 1.6. Soit $\sum \xi_k$ une série normalement convergente dans le quotient ; pour tout entier $k \geq 0$ on peut trouver un représentant $u_k \in \xi_k$ tel que $\|u_k\| \leq 2 \, \|\xi_k\|$; la série $\sum u_k$ est elle aussi normalement convergente, donc convergente dans X puisque X est complet. Finalement, la série $\sum \xi_k$, image par l'application linéaire continue π de la série convergente $\sum u_k$, est convergente dans X/Y, ce qui termine la démonstration.

//

1.4. Principe de prolongement. Complété d'un espace normé

Commençons par un lemme de prolongement, facile mais très important.

Lemme 1.4.1. *Soient* X *un espace normé,* X_0 *un sous-espace vectoriel de* X*, dense dans* X *et* F *un espace de Banach ; toute application linéaire continue* $\mathrm{T} : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{F}$ *se prolonge de façon unique en application linéaire continue* $\widetilde{\mathrm{T}} : \mathrm{X} \to \mathrm{F}$, *et* $\|\widetilde{\mathrm{T}}\| = \|\mathrm{T}\|$.

C'est par ce procédé que l'on définit par exemple la transformée de Fourier sur $\mathrm{X} = \mathrm{F} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, à partir de sa définition intégrale sur le sous-espace dense $\mathrm{X}_0 = \mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$.

Démonstration. Soient $x \in \mathrm{X}$ et $n \geq 0$; d'après la densité de X_0 dans X, l'ensemble

$$\mathrm{A}_n = \{y \in \mathrm{X}_0 : \|y - x\| < 2^{-n}\}$$

est non vide ; si $y, y' \in \mathrm{A}_n$, on a $\|y' - y\| \leq \|y' - x\| + \|y - x\| \leq 2^{-n+1}$, donc le diamètre de A_n tend vers 0 (l'ensemble A_n devrait s'appeler $\mathrm{A}_n(x)$, mais ce serait vraiment trop lourd). Puisque T est linéaire bornée, la suite $(\mathrm{T}(\mathrm{A}_n))$ est une suite décroissante de sous-ensembles non vides de F, de diamètres tendant vers 0. Précisément, on déduit de ce qui précède que si $v, w \in \overline{\mathrm{T}(\mathrm{A}_n)}$, on a $\|v - w\| \leq \|\mathrm{T}\| \, 2^{-n+1}$. Puisque

F est complet, on sait que $\bigcap_n \overline{\mathrm{T}(\mathrm{A}_n)}$ contient exactement un point. Appelons $\mathrm{S}(x)$ cet unique point.

Soit $(y_k)_k \subset \mathrm{X}_0$ une suite quelconque telle que $y_k \to x$, et soit n_0 quelconque ; on aura $y_k \in \mathrm{A}_{n_0}$ pour tout $k \geq k_0$, donc $\|\mathrm{T}(y_k) - \mathrm{S}(x)\| \leq 2^{-n_0+1}\,\|\mathrm{T}\|$ pour $k \geq k_0$; ceci montre que $\mathrm{S}(x) = \lim_k \mathrm{T}(y_k)$ pour toute suite $(y_k) \subset \mathrm{X}_0$ telle que $x = \lim_k y_k$. Il est facile de vérifier que $x \to \mathrm{S}(x)$ est linéaire de X dans F, à partir de cette remarque (prendre $y_k \to x$ et $y'_k \to x'$). On a aussi

$$\|\mathrm{S}(x)\| = \lim_k \|\mathrm{T}(y_k)\| \leq \|\mathrm{T}\| \lim_k \|y_k\| = \|\mathrm{T}\|\,\|x\|,$$

ce qui montre que S est continue et $\|\mathrm{S}\| \leq \|\mathrm{T}\|$. Si $x \in \mathrm{X}_0$, il est clair que $\mathrm{T}(x)$ est l'unique point commun aux ensembles $\mathrm{T}(\mathrm{A}_n)$, donc $\mathrm{S}(x) = \mathrm{T}(x)$ dans ce cas, ce qui montre que S prolonge T ; il en résulte que $\|\mathrm{T}\| \leq \|\mathrm{S}\|$, donc $\|\mathrm{T}\| = \|\mathrm{S}\|$. Si S_1 est une autre application continue qui prolonge T, on aura $\mathrm{S}_1(x) = \lim_k \mathrm{S}_1(y_k)$ par continuité de S_1, mais $\mathrm{S}_1(y_k) = \mathrm{T}(y_k)$ par hypothèse, donc $\mathrm{S}_1(x) = \lim_k \mathrm{T}(y_k) = \mathrm{S}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{X}$, ce qui montre l'unicité de S. Il nous suffit pour finir de prendre $\widetilde{\mathrm{T}} = \mathrm{S}$.

//

Lemme 1.4.2. *Soient* X *un espace normé,* X_0 *un sous-espace vectoriel de* X*, dense dans* X *et* F *un espace de Banach ; si* (T_n) *est une suite d'applications linéaires de* X *dans* F*, telle que* $\mathrm{M} = \sup_n \|\mathrm{T}_n\| < +\infty$ *et telle que* $\lim_n \mathrm{T}_n(x)$ *existe dans* F *pour tout* $x \in \mathrm{X}_0$*, alors* $\mathrm{T}(x) = \lim_n \mathrm{T}_n(x)$ *existe dans* F *pour tout* $x \in \mathrm{X}$*, et l'application* T *est linéaire continue de* X *dans* F*, avec* $\|\mathrm{T}\| \leq \mathrm{M}$.

Démonstration. Puisque F est complet, il suffit de montrer que $(\mathrm{T}_n(x))$ est de Cauchy pour tout $x \in \mathrm{X}$; soit $x \in \mathrm{X}$, et soit $\varepsilon > 0$ donné ; on peut d'abord trouver $x_0 \in \mathrm{X}_0$ tel que $\|x - x_0\| < \varepsilon/(3\mathrm{M})$; par hypothèse, la suite $(\mathrm{T}_n(x_0))$ est convergente, donc il existe N tel que pour tous $m, n \geq \mathrm{N}$ on ait $\|\mathrm{T}_m(x_0) - \mathrm{T}_n(x_0)\| < \varepsilon/3$; pour finir, on a $\|\mathrm{T}_k(x) - \mathrm{T}_k(x_0)\| \leq \mathrm{M}\,\|x - x_0\| < \varepsilon/3$ pour tout entier k. On peut écrire pour finir, pour tous $m, n \geq \mathrm{N}$ que $\|\mathrm{T}_m(x) - \mathrm{T}_n(x)\|$ est majoré par

$$\|\mathrm{T}_m(x) - \mathrm{T}_m(x_0)\| + \|\mathrm{T}_m(x_0) - \mathrm{T}_n(x_0)\| + \|\mathrm{T}_n(x_0) - \mathrm{T}_n(x)\| < \varepsilon.$$

//

Corollaire 1.4.3. *Soient* X, Y *deux espaces normés,* F *un espace de Banach,* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *une application linéaire isométrique d'image dense ; pour toute* $f \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{F})$*, il existe une unique* $g \in \mathcal{L}(\mathrm{Y}, \mathrm{F})$ *telle que* $f = g \circ u$*. On a* $\|f\| = \|g\|$.

Démonstration. Il suffit de considérer le sous-espace $\mathrm{Y}_0 = u(\mathrm{X})$, dense dans Y, et de prolonger à Y l'application $f \circ u^{-1}$ qui est définie de Y_0 dans F.

//

Théorème 1.4.4. *Soit* X *un espace normé ; il existe un couple* $(\widehat{\mathrm{X}}, u)$ *où* $\widehat{\mathrm{X}}$ *est un espace de Banach et* $u : \mathrm{X} \to \widehat{\mathrm{X}}$ *est une application linéaire isométrique d'image dense.*

Démonstration. La somme de deux suites de Cauchy $x = (x_n)$ de vecteurs de X est une suite de Cauchy, et si on multiplie une suite de Cauchy par un scalaire on obtient une suite de Cauchy. Donc les suites de Cauchy forment un espace vectoriel, qui sera noté Y. De plus, les suites de Cauchy sont des suites bornées. Pour tout élément $x = (x_n)$ de Y on peut donc poser

$$\|x\|_\infty = \sup_n \|x_n\|.$$

On vérifie sans peine que cette quantité définit une norme sur Y. Posons

$$\mathrm{Z} = \{z = (z_n) \in \mathrm{Y} : \lim \|z_n\| = 0\};$$

on vérifie que Z, muni de la norme $\|x\|_\infty$, est un sous-espace vectoriel fermé de Y ; notons $\widehat{\mathrm{X}} = \mathrm{Y}/\mathrm{Z}$ le quotient de Y par Z et $\pi : \mathrm{Y} \to \widehat{\mathrm{X}}$ l'application quotient ; munissons $\widehat{\mathrm{X}}$ de la norme quotient, notée $\|.\|$. Le point crucial est que $\widehat{\mathrm{X}}$ est complet, même si X n'était pas complet. Il est commode de démontrer d'abord les autres propriétés voulues.

Pour $x \in \mathrm{X}$, notons $\mathrm{U}(x) \in \mathrm{Y}$ la suite constante égale à x ; posons $u = \pi \circ \mathrm{U}$. Si $y = (y_n)$ est un représentant quelconque de $u(x)$, on a par définition $y - \mathrm{U}(x) \in \mathrm{Z}$, c'est à dire $\lim_n \|y_n - x\| = 0$; il en résulte que $\|y\|_\infty = \sup_n \|y_n\| \geq \lim_n \|y_n\| = \|x\|$, donc $\|u(x)\| \geq \|x\|$, mais le choix du représentant $y = \mathrm{U}(x)$ donne $\|y\|_\infty = \|x\|$, donc $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{X}$.

Vérifions que $u(\mathrm{X})$ est dense dans $\widehat{\mathrm{X}}$. Soient $\xi \in \widehat{\mathrm{X}}$ et $\varepsilon > 0$; il existe une suite de Cauchy $y = (y_n)$ telle que $\xi = \pi(y)$. Il existe un entier $n \geq 0$ tel que, pour tout $k \geq n$ on ait $\|y_k - y_n\| \leq \varepsilon$. Considérons l'élément y' de Y défini par $y'_j = y_j$ si $j < n$ et $y'_j = y_n$ si $j \geq n$. Ce que nous avons dit se traduit par $\|y - y'\|_\infty \leq \varepsilon$, donc $\|\pi(y) - \pi(y')\| \leq \varepsilon$, mais y' est un représentant de $\mathrm{U}(y_n)$, donc $\|\pi(y) - u(y_n)\| \leq \varepsilon$, ce qui montre la densité voulue.

Pour finir la démonstration, il nous reste à démontrer que $\widehat{\mathrm{X}}$ est un espace de Banach. Soit (ξ_n) une suite de Cauchy dans $\widehat{\mathrm{X}}$; comme $u(\mathrm{X})$ est dense, pour tout entier $n \geq 0$, il existe $x_n \in \mathrm{X}$ tel que $\|\xi_n - u(x_n)\| \leq 2^{-n}$. La suite $(u(x_n))_{n \geq 0}$ est alors de Cauchy et, comme u est isométrique, la suite $x = (x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans X ; on vérifie alors que $\pi(x)$ est la limite de la suite de Cauchy (ξ_n) : Comme ci-dessus, on voit que la suite $(u(x_n))$ converge vers $\pi(x)$; comme la suite $(\xi_n - u(x_n))$ converge vers 0, la suite (ξ_n) converge vers $\pi(x)$, d'où le résultat.

On appelle *complété* de X un couple $(\widehat{\mathrm{X}}, u)$ où $\widehat{\mathrm{X}}$ est un espace de Banach et $u : \mathrm{X} \to \widehat{\mathrm{X}}$ est une application linéaire isométrique d'image dense. Le plus souvent, on ne mentionne pas l'application u : on dit alors que $\widehat{\mathrm{X}}$ est un *complété* de X (ou **le** *complété* de X, car on montre facilement que le complété est unique à isométrie près).

Séparé complété

Si X est un espace vectoriel muni d'une semi-norme p qui n'est pas une norme, on peut lui associer de façon naturelle un espace normé ; on voit que

$$\mathrm{Z} = \{z \in \mathrm{X} : p(z) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de X. On peut donc considérer le quotient (algébrique) X/Z. Si ξ est un élément de X/Z et x un représentant quelconque de ξ, on voit que la quantité $p(x)$ ne dépend pas du représentant choisi (si x' est un autre représentant de ξ, on aura $x - x' \in \mathrm{Z}$ et $|p(x) - p(x')| \leq p(x - x') = 0$). On peut donc poser $q(\xi) = p(x)$ où x est un représentant quelconque de la classe ξ. Il est facile de vérifier que q est une semi-norme sur X/Z, mais c'est en fait une *norme* : si $q(\xi) = 0$, cela signifie que $p(x) = 0$ pour tout représentant x de ξ, c'est à dire que $x \in \mathrm{Z}$, donc ξ est la classe Z qui est la classe nulle du quotient, donc $\xi = 0_{\mathrm{X}/\mathrm{Z}}$.

Ce quotient X/Z s'appelle le *séparé* de X.

C'est exactement l'opération que l'on fait en Intégration, si on définit d'abord l'espace $\mathcal{L}_p$ des "vraies" fonctions mesurables f telles que

$$p(f) = \Bigl(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\Bigr)^{1/p} < +\infty.$$

La fonction p est une semi-norme sur $\mathrm{X} = \mathcal{L}_p$, et l'espace Z est l'espace vectoriel des *fonctions négligeables*. Le quotient X/Z est l'espace L_p des *classes* de fonctions de puissance $p$ième intégrable. On prend rapidement l'habitude de laisser tomber le mot "classe", mais il faut rester vigilant : si $f \in \mathrm{L}_p$ et si t_0 est un point **fixé** de l'espace mesuré, l'expression $f(t_0)$ n'a pas de sens !

1.5. Complexifié d'un espace normé réel

Si X est un espace vectoriel réel, on peut lui associer un espace vectoriel complexe $\mathrm{X}_\mathbb{C}$ d'une manière qui rappelle le passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$: l'espace $\mathrm{X}_\mathbb{C}$ sera l'espace des "vecteurs complexes" de la forme $z = x + iy$, où x et y sont deux "vecteurs réels", c'est à dire que $x, y \in \mathrm{X}$, et où il faut prendre pour l'instant iy comme une notation formelle ; on définira la somme de deux vecteurs complexes z et z' par $(x+iy)+(x'+iy') = (x+x')+i(y+y')$, et la multiplication du vecteur z par un nombre complexe $\lambda = a + ib$ sera définie par

$$\lambda z = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay).$$

Pour rendre les choses plus "carrées", on va dire que $\mathrm{X}_\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ (mais on pensera au couple $(x, y) \in \mathrm{X}\times\mathrm{X}$ comme étant le vecteur complexe $z = x+iy$). L'addition de l'espace vectoriel $\mathrm{X}_\mathbb{C}$ est l'addition naturelle $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ (qui correspond à ce qui a été dit un peu plus haut) et la multiplication par les scalaires complexes est définie par la formule

$$(a + ib)(x, y) = (ax - by, bx + ay).$$

Résumons :

Définition 1.5.1. Soit X un espace vectoriel réel ; on appelle *complexifié* de X l'espace vectoriel complexe $\mathrm{X}_\mathbb{C}$ obtenu en munissant l'espace vectoriel réel $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ de la structure d'espace vectoriel complexe donnée par $(a + ib)(x, y) = (ax - by, ay + bx)$ (pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathrm{X}$). On plonge X dans $\mathrm{X}_\mathbb{C}$ par l'application $u : x \to (x, 0)$, de sorte que (x, y) peut s'écrire $u(x) + iu(y)$.

Si l'espace vectoriel réel X est de plus normé, on a envie de définir sur $\mathrm{X}_\mathbb{C}$ une norme p qui soit une norme *d'espace vectoriel complexe*, c'est à dire telle que $p(\lambda z) = |\lambda|\, p(z)$ si λ est un nombre complexe quelconque, mais si possible de façon que les "vecteurs réels" $z = (x, 0)$ gardent la même norme, c'est à dire que $p(x, 0) = \|x\|_\mathrm{X}$. On doit en particulier garantir que $p(\lambda z) = |\lambda|\, p(z)$ si λ est un nombre complexe tel que $|\lambda| = 1$. Il y a de nombreuses façons de procéder ; en voici une qui est assez simple : si $z = x + iy$, on dira que $x = \operatorname{Re} z$, et on posera $p(z) = \max\{\|\operatorname{Re}(\lambda z)\|_\mathrm{X} : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$, ce qui s'écrit aussi

$$p(x + iy) = \max\{\|\cos(\theta)\, x - \sin(\theta)\, y\|_\mathrm{X} : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

On peut aussi se trouver dans la situation où X est un espace vectoriel complexe, mais muni d'une norme q d'espace vectoriel réel : autrement dit, on a $q(\lambda x) = |\lambda|\, q(x)$ pour tout $x \in \mathrm{X}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, mais on n'a pas nécessairement cette égalité avec λ complexe. Si la multiplication par i, c'est à dire l'application $\varphi : x \to ix$, est continue sur (X, q), on peut remplacer q par une norme p équivalente à q qui vérifie de plus $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ pour tout $x \in \mathrm{X}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, en posant pour tout $x \in \mathrm{X}$

$$p(x) = \sup\{q(\lambda x) : \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1\}.$$

C'est exactement ce qu'on a fait au paragraphe précédent : on a commencé par définir sur $\mathrm{X}_{\mathbb{C}}$ la norme $q(x + iy) = \max(\|x\|, \|y\|)$, mais cette norme n'est pas une norme complexe. On l'a alors remplacée par p, définie comme dans ce paragraphe.

1.6. Dual d'un espace normé, application transposée

Rappelons que $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit X un espace normé sur $\mathbb{K}$; on appelle *dual* (topologique) de X et on note X^* l'espace de Banach $\mathrm{X}^* = \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathbb{K})$. Cet espace est complet par la proposition 2.5.

Exemple 1.6.1. Si $x = (x_n)$ est un élément de ℓ_1, on lui associe une forme linéaire continue f_x sur c_0 en posant

$$\forall y = (y_n) \in c_0, \quad f_x(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k.$$

De plus, la norme de f_x dans le dual de c_0 est égale à la norme de x dans ℓ_1.

On a en effet $|f_x(y)| \le \|y\|_\infty \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| = \|x\|_1\, \|y\|_\infty$ (en utilisant la majoration $|y_k| \le \|y\|_\infty$), pour tout $y \in c_0$, qui montre que $\|f_x\| \le \|x\|_1$.

Pour tout $n \ge 0$ posons $x_n = r_n\, \mathrm{e}^{i\theta_n}$, avec $r_n = |x_n|$ réel ≥ 0 et θ_n réel ; fixons N et définissons $y = (y_n) \in c_0$ en posant $y_n = \mathrm{e}^{-i\theta_n}$ si $0 \le n \le \mathrm{N}$ et $y_n = 0$ si $n > \mathrm{N}$. On aura $\|y\|_\infty = 1$ et $\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} |x_k| = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k = f_x(y) \le \|f_x\|$. En faisant tendre N vers l'infini on obtient $\|f_x\| = \|x\|_1$.

L'application $x \to f_x$ est donc une application linéaire isométrique de ℓ_1 dans $(c_0)^*$. Elle est aussi surjective, donc bijective. D'une certaine façon, le dual de c_0 "*est*" égal à ℓ_1.

On a dit que si $y = (y_n) \in c_0$, on a $y = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k e_k$, série convergente dans c_0. Si f est linéaire et continue sur c_0, l'image de la somme y de la série est la somme de la série des images,

$$f(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(y_k e_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(e_k)\, y_k.$$

Posons $x_k = f(e_k)$ pour tout $k \ge 0$; pour chaque entier N on définit un vecteur y comme ci-dessus, de façon que $\|y\|_\infty \le 1$ et $x_k y_k = |x_k|$ pour $0 \le k \le \mathrm{N}$; en utilisant l'inégalité $|f(y)| \le \|f\|\, \|y\|_\infty \le \|f\|$, on obtient $\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} |x_k| \le \|f\|$ pour tout N, donc $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| < +\infty$; le vecteur $x = (x_n)_{n \ge 0}$ est dans ℓ_1 et $f = f_x$, ce qu'il fallait démontrer.

Soit X un espace normé complexe ; c'est, en particulier, un espace normé réel. Il y a deux notions distinctes de dual pour X : le dual en tant qu'espace réel $\mathrm{X}^*_{\mathbb{R}} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ et le dual en tant qu'espace complexe $\mathrm{X}^*_{\mathbb{C}} = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$. En fait, on peut identifier ces deux espaces. Notons $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ l'application $\mathbb{R}$-linéaire qui à un nombre complexe $a + ib$ associe sa partie réelle a (pour $a, b \in \mathbb{R}$).

Proposition 1.6.1. *L'application* $g \to \operatorname{Re}\circ g$ *est une bijection isométrique de* $X^*_{\mathbb{C}}$ *sur l'espace* $X^*_{\mathbb{R}}$.

Démonstration. Soit $g \in X^*_{\mathbb{C}}$; alors $x \to \operatorname{Re} g(x)$ est $\mathbb{R}$-linéaire, et $|\operatorname{Re} g(x)| \leq |g(x)|$ pour tout $x \in X$, donc $\|\operatorname{Re}\circ g\| \leq \|g\|$. Par ailleurs, pour tout x dans la boule unité de X, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $\lambda g(x) = |g(x)|$, donc

$$|g(x)| = \lambda g(x) = g(\lambda x) = (\operatorname{Re}\circ g)(\lambda x) \leq \|\operatorname{Re}\circ g\|,$$

par conséquent $\|g\| = \|\operatorname{Re}\circ g\|$. Par ailleurs, soit $\ell \in X^*_{\mathbb{R}}$, notons $g : x \to \ell(x) - i\ell(ix)$; on vérifie sans peine que g est $\mathbb{C}$-linéaire, et $\operatorname{Re} g = \ell$. On a donc prouvé que $g \to \operatorname{Re}\circ g$ est surjective ; comme elle est isométrique, elle est injective donc bijective.
//

Définition 1.6.2. Soient X et Y deux espaces normés et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$; on appelle *transposée topologique* de T (ou juste *transposée*) l'application ${}^tT : y^* \to y^* \circ T$ de Y^* dans X^*.

Regroupons dans la proposition suivante des propriétés élémentaires de la transposition :

Proposition 1.6.2. *Soient* X, Y *et* Z *des espaces normés ;*

(i) *pour tout* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, *l'application* ${}^tT$ *est linéaire et continue et* $\|{}^tT\| \leq \|T\|$ *;*

(ii) *l'application* $T \to {}^tT$ *est linéaire de* $\mathcal{L}(X, Y)$ *dans* $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$ *;*

(iii) *pour tout* $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ *et tout* $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$, *on a* ${}^t(T \circ S) = {}^tS \circ {}^tT$ *(bien noter l'interversion de* S *et* T*).*

Vérifions que $\|{}^tT\| \leq \|T\|$. Soit $y^* \in Y^*$ tel que $\|y^*\| \leq 1$. Pour tout vecteur $x \in X$ tel que $\|x\| \leq 1$ on a

$$|{}^tT(y^*)(x)| = |y^*(T(x))| \leq \|y^*\| \, \|T(x)\| \leq \|y^*\| \, \|T\| \, \|x\| \leq \|T\|,$$

d'où il résulte que $\|{}^tT(y^*)\| \leq \|T\|$ en prenant le sup sur x dans la boule unité de X, puis $\|{}^tT\| \leq \|T\|$ en prenant le sup sur y^* dans la boule unité de Y^*. La démonstration des autres points est laissée en exercice.

1.7. Parties totales. Séparabilité

Définition 1.7.1. On dit qu'un espace topologique Z est *séparable* s'il existe une partie *dénombrable* $D \subset Z$ qui soit dense dans Z.

– 1. Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont séparables (par exemple, $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble dénombrable dense dans $\mathbb{R}$). Plus généralement, tout fermé de $\mathbb{C}$ est séparable (exercice).

– 2. Tout espace normé de dimension finie est séparable : si F est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de F, l'ensemble dénombrable $D = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \lambda_i \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans F.

Proposition 1.7.1. *Pour que* X *normé soit séparable, il faut et il suffit qu'il existe une suite croissante* (F_n) *de sous-espaces de dimension finie de* X *telle que* $\bigcup_n \mathrm{F}_n$ *soit dense dans* X*. Si* X *est un espace normé séparable de dimension infinie, on peut trouver une suite croissante* (F_n) *de sous-espaces vectoriels de* X *telle que* $\dim \mathrm{F}_n = n$ *pour tout* $n \geq 0$ *et telle que la réunion* $\mathrm{F} = \bigcup_n \mathrm{F}_n$ *soit dense dans* X.

En effet, si $\mathrm{D} = \{d_0, d_1, \ldots, d_n, \ldots\}$ est dense et si $\mathrm{F}_n = \mathrm{Vect}(d_0, \ldots, d_{n-1})$, il est évident que $\bigcup_n \mathrm{F}_n$ est dense dans X puisque cet ensemble contient D. Inversement si $\bigcup \mathrm{F}_n$ est dense, on choisit D_n dénombrable dense dans F_n, et $\mathrm{D} = \bigcup_n \mathrm{D}_n$ sera dénombrable et dense dans X.

Pour établir la deuxième partie il suffit de modifier légèrement l'argument ci-dessus, en ne prenant le vecteur d_{n+1} *que s'il* n'est pas déjà dans $\mathrm{Vect}(d_0, \ldots, d_n)$: on pose $\mathrm{F}_0 = \{0\}$ et pour tout $n \geq 0$, en supposant F_n déjà défini, de dimension n, on désigne par k_n le plus petit indice m tel que $d_m \notin \mathrm{F}_n$ (s'il n'y avait pas de tel indice m, tous les vecteurs (d_m) seraient dans F_n, donc on aurait $\mathrm{X} = \mathrm{F}_n$ de dimension finie, contradiction). On pose $\mathrm{F}_{n+1} = \mathrm{Vect}(\mathrm{F}_n, d_{k_n})$. On vérifie que F_{n+1} contient $d_0, \ldots, d_{k_n}$, donc à la fin $\bigcup_n \mathrm{F}_n$ contient l'ensemble dense D.

Exemples 1.7.2.

1. Les espaces ℓ_p et les espaces $\mathrm{L}_p([0,1])$ sont séparables pour $1 \leq p < \infty$.

   Pour tout $n \geq 0$, désignons par $\mathbf{e}_n$ le $n$ième vecteur de la *suite canonique* définie à l'exemple 1.7. Le sous-espace $\mathrm{F}_n = \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_{n-1})$ est formé des vecteurs y de ℓ_p dont les coordonnées y_j, $j \geq n$ sont nulles. Il est facile de voir que tout $x \in \ell_p$ est limite d'une suite de tels vecteurs y.

2. En revanche, ℓ_∞ et $\mathrm{L}_\infty([0,1])$ ne sont pas séparables.

   Pour $t \in [0,1]$, soit f_t la fonction indicatrice de $[0,t]$; alors $\|f_s - f_t\|_\infty = 1$ si $s \neq t$, et la famille (f_t) est non-dénombrable ; si (x_n) était dense dans L_∞, il existerait pour tout $t \in [0,1]$ un indice *unique* n tel que $\|f_t - x_n\|_\infty < 1/4$, ce qui donnerait une injection de $[0,1]$ dans $\mathbb{N}$.

Soient X un espace normé et D un sous-ensemble de X ; on dit que D est *total* dans X si le sous-espace vectoriel L (algébrique) engendré par D est dense dans X (ce sous-espace L est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de D).

Par exemple, la suite canonique $(\mathbf{e}_n)_{n\geq 0}$ est totale dans ℓ_p pour tout $p < \infty$. Elle n'est pas totale dans ℓ_∞, mais elle est totale dans c_0.

Proposition 1.7.2. *Pour qu'un espace normé* X *soit séparable, il faut et il suffit qu'il admette une partie dénombrable totale.*

Démonstration. Soit X un espace normé tel qu'il existe une suite (x_n) d'éléments totale dans X ; l'espace vectoriel L engendré par la suite est dense dans X, et il est égal à la réunion croissante des sous-espaces L_n de dimension finie définis par $\mathrm{L}_n = \mathrm{Vect}(x_0, \ldots, x_{n-1})$. On sait alors que X est séparable puisque $\bigcup_{n\geq 0} \mathrm{L}_n$ est dense dans X (appliquer la proposition 1). Dans l'autre direction c'est trivial.

//